K. V. Zenger
Řešení rovnic numerických pomocí logarithmů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 4, 288--291

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121930

Jsou nyní derivace $\frac{\partial\varphi}{\partial a_k}$ vyjádřeny opět co symetrické funkce kořenů, ale co funkce stupňů nižších nežli byla původní funkce φ; neboť vůči rovnici (3) jest patrno, že jest $\frac{\partial\varphi}{\partial a_k}$ v kořenech α stupně $\lambda_1 + \lambda_2 .. + \lambda_n - 1 + n - k - (n - 1)$ t. j. $\lambda_1 + . + \lambda_n - k$, kdežto φ byla stupně $\lambda_1 + .. + \lambda_n$.

S derivacemi naložíme tak, jako jsme s φ učinili, a pokračujeme touže cestou, až dojdeme stálých aneb funkcí linearných t. j. funkce

$$\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_n,$$

jejíž hodnota jest $-a_1$ aneb funkce nulltého stnpně t. j. stálé. Dosazováním zpátečným doděláme se pak hodnoty funkce φ vyjádřené koefficienty $a_1, a_2, .. a_n$. Tím ale úkol řešen; zároveň vychází známý výsledek, *že libovolnou symetrickou funkci φ kořenů algebraické rovnice lze vyjádřiti co celistvou funkci koefficientů.*

Řešení rovnic numerických pomocí logarithmů.*)

Sděluje

prof. K. V. Zenger.

V následujících řádcích podávám methodu, jíž lze ze sblížené hodnoty kořene algebraické rovnice stanoviti posloupně hodnoty vždy přesnější počtem velmi jednoduchým, který se pomocí logarithmů velmi rychle dá provésti.

Buď

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0 \qquad (1)$$

daná rovnice o reálných koefficientech. Značme literou u přibližnou hodnotu jednoho realného kořene, na př. horní mez realných kořenů, kterou nám známé pravidlo podává.

Položme

$$\frac{x}{u} = y \quad \text{čili} \quad x = uy,$$

i obdržíme pro novou neznámou y rovnici

*) Předneseno v týdenní schůzi Jednoty českých mathematiků dne 21. června 1882.

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_n = 0, \qquad (2)$$

kdež

$$a_1 = \frac{A_1}{u}, \quad a_2 = \frac{A_2}{u^2}, \ldots a_n = \frac{A_n}{u^n}. \qquad (3)$$

Značí-li u' přesnou hodnotu kořene, jehož sblíženou hodnotou jest u, máme obdobně, položivše

$$\frac{x}{u'} = y' \quad \text{čili} \quad x = u'y',$$

rovnici

$$y'^n + a'_1 y'^{n-1} + a'_2 y'^{n-2} + \ldots + a'_n = 0, \qquad (4)$$

kdež

$$a'_1 = \frac{A_1}{u'}, \quad a'_2 = \frac{A_2}{u'^2}, \ldots a'_n = \frac{A_n}{u'^n}.$$

Kořen $x = u'$ vyhovuje dané rovnici, tedy vyhovuje hodnota $y' = \frac{u'}{u'} = 1$ poslední rovnici, t. j. platí relace

$$1 + a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n = 0. \qquad (5)$$

Nahradíme-li hodnotu u hodnotou $u + du$ o jistý přírůstek větší, nabudou dle (3) koefficienty $a_1, a_2, \ldots a_n$ jiných hodnot, které značme $a_1 + da_1$, $a_2 + da_2, \ldots a_n + da_n$. Dle supposice jest u sblížená hodnota ku u' t. j. $u' - u$ malé číslo; přidáme-li ku u přirůstek $du = u' - u$ jest pak $u + du = u'$ a rovnice (2) přejde do (4) a tedy pak platí relace (5), t. j. pak máme

$$1 + a_1 + da_1 + a_2 + da_2 + \ldots a_n + da_n = 0. \qquad (6)$$

Při malém přírůstku du můžeme přírůstky $da_1, \ldots da_n$ nahraditi přibližně differencialy t. j. položivše dle (2):

$$\left.\begin{aligned} \log a_1 &= \log A_1 - \log u \\ \log a_2 &= \log A_2 - 2\log u \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \log a_n &= \log A_n - n\log u \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

psáti

$$\frac{da_1}{a_1} = -\frac{du}{u}, \qquad da_1 = -a_1\frac{du}{u},$$

$$\frac{da_2}{a_2} = -2\frac{du}{u}, \quad \text{tedy} \quad da_2 = -2a_2\frac{du}{u},$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\frac{da_n}{a_n} = -n\frac{du}{u}, \qquad da_n = -na_n\frac{du}{u}.$$

Vyhoví-li tyto *sblížené* hodnoty přírůstků da relaci (6), bude du *sblížená* hodnota čísla $u' - u$ t. j. $u + du$ sblížená hodnota hledaného kořene u'. Položivše k vůli stručnosti

$$1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \varepsilon, \tag{8}$$

máme tedy pro korrekci du podmínku

$$\varepsilon - \frac{du}{u}(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n) = 0,$$

čili

$$\varepsilon - \frac{du}{u}[\varepsilon - 1 + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \ldots + (n-1)a_n] = 0,$$

z níž

$$du = \frac{u\varepsilon}{\varepsilon - 1 + a_2 + 2a_3 + \ldots + (n-1)a_n}. \tag{9}$$

S nalezenou hodnotou $u + du$ naložíme jako s u atd., až koefficienty a naposled nalezené, t. j. poslední hodnotě u příslušné, rovnici (5) dosti přesně vyplní, t. j. až podají součet ε nulle dosti blízký.

Vezměme na př. rovnici kubickou

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0.$$

Zde máme

$$a_1 = \frac{A_1}{u}, \quad a_2 = \frac{A_2}{u^2}, \quad a_3 = \frac{A_3}{u^3},$$

$$1 + a_1 + a_2 + a_3 = \varepsilon, \quad du = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon - 1 + a_2 + 2a_3}.$$

Applikujme k rovnici

$$x^3 - 2x^2 + x - 7 = 0.$$

Hodnota 3 činí tuto funkci i její derivace kladnými, jest tedy horní mezí kořenů; položme $u = 3$. Pak máme

A) $$a_1 = -\frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{9}, \quad a_3 = -\frac{7}{27}, \quad \varepsilon = \frac{5}{27},$$

$$du = -\frac{15}{33} = -0{,}454.$$

Sblíženou hodnotu $u + du = 3 - 0{,}454$ zaokrouhleme na $3 - 0{,}15 = 2{,}5$ a položme nyní na novo $u = 2{,}5$. Tu máme

B) $$a_1 = -0{,}8, \quad a_2 = 0{,}16, \quad a_3 = -0{,}448,$$
$$\varepsilon = -0{,}09, \quad du = 0{,}12,$$

uskrovníme-li se dvěma desetinnými místy. Tím $u + du$ má hodnotu $2{,}5 + 0{,}12 = 2{,}62$. Tuto hodnotu položíme znova za u do formulí a nalezneme pomocí logarithmů

$$C) \quad \log - a_1 = \log 2 - \log u = \begin{array}{r} 0{,}30103 \\ -0{,}41830 \\ \hline 0{,}88273 - 1, \end{array}$$

tedy $a_1 = -0{,}763$;

$$\log a_2 = \log 1 - 2 \log u = \begin{array}{r} 0{,}00000 \\ -0{,}83660 \\ \hline 0{,}16340 - 1, \end{array}$$

tedy $a_2 = 0{,}145$;

$$\log - a_3 = \log 7 - 3 \log u = \begin{array}{r} 0{,}84510 \\ -1{,}25490 \\ \hline 0{,}59020 - 1, \end{array}$$

tedy $a_3 = -0{,}389$.

$$\varepsilon = -0{,}007; \quad du = 0{,}011; \quad u + du = 2{,}631.$$

Za u položme do formulí 2,631 a nalezneme

$$D) \quad \log - a_1 = \log 2 - \log u = \begin{array}{r} 0{,}30103 \\ -0{,}42012 \\ \hline 0{,}88091 - 1, \end{array}$$

tedy $a_1 = -0{,}7602$;

$$\log a_2 = \log 1 - 2 \log u = \begin{array}{r} 0{,}00000 \\ -0{,}84024 \\ \hline 0{,}15976 - 1, \end{array}$$

tedy $a_2 = 0{,}1445$;

$$\log - a_3 = \log 7 - 3 \log u = \begin{array}{r} 0{,}84510 \\ -1{,}26036 \\ \hline 0{,}58474 - 1, \end{array}$$

tedy $a_3 = -0{,}3844$.

$$\varepsilon = -0{,}0001; \quad du = 0{,}0001; \quad u + du = 2{,}6311.$$

Hodnota kořene 2,6311 jest ve všech čtyrech decimálkách přesna; neboť vložíme-li do výrazu $x^3 - 2x^2 + x - 7$ hodnotu 2,6310, obdržíme záporný výsledek, totiž $-0{,}0014$, vložíme-li za x číslo 2,6312, vyjde kladný výsledek $+0{,}0009$.