Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Bobek

O geometrickém místu bodů obratu křivek svazku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 4, 283--284

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121928

O geometrickém místu bodů obratu křivek svazku.

Napsal K. Bobek.

V rovině dán svazek C_n stupně n-tého; kterého stupně a které třídy jest křivka K, na níž se nalézají body obratu jednotlivých křivek C_n?

Budiž svazek křivek dán rovnicí

$$f - \lambda\varphi = 0, \tag{1}$$

v které f a φ jsou funkce stupně n-tého v stejnoměrných souřadnicích $x_1 x_2 x_3$. Křivka C_n, jíž právě přísluší hodnota λ v rovnici (1), má křivku Hesseovu H o rovnici

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \lambda\varphi_{11}, & f_{12} - \lambda\varphi_{12}, & f_{15} - \lambda\varphi_{13} \\ f_{21} - \lambda\varphi_{21}, & f_{22} - \lambda\varphi_{22}, & f_{23} - \lambda\varphi_{23} \\ f_{31} - \lambda\varphi_{31}, & f_{32} - \lambda\varphi_{32}, & f_{33} - \lambda\varphi_{33} \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

kdež $f_{ik} = f_{ki} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$. Souřadnice průsečíků křivek (1) a (2) t. j. bodů obratu křivky C_n vyhovují rovnicím (1) a (2); vyloučíme-li tedy λ z obou, obdržíme rovnici platnou pro všechny body obratu křivek svazku (1) ve formě:

$$\begin{vmatrix} f_{11}\varphi - \varphi_{11}f, & f_{12}\varphi - \varphi_{12}f, & f_{13}\varphi - \varphi_{13}f \\ f_{21}\varphi - \varphi_{31}f, & f_{22}\varphi - \varphi_{22}f, & f_{23}\varphi - \varphi_{23}f \\ f_{31}\varphi - \varphi_{31}f, & f_{32}\varphi - \varphi_{32}f, & f_{33}\varphi - \varphi_{33}f \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

z kteréžto ihned poznáváme, že křivka K jest stupně

$$3(n - 2 + n) = 6(n - 1).$$

Tentýž výsledek lze obdržeti jiným spůsobem, jenž nám podává i singularity křivky K snadněji než rovnice (3).

Každým bodem a roviny prochází jediná křivka C_n svazku, nikoliv ale jediná křivka Hesseova. Konické poláry bodu a vzhledem ku křivkám C_n tvoří totiž svazek (k^2) a každé křivce C_n svazku přísluší jediná kuželosečka z (k^2) a naopak. Ve svazku (k^2) nalézají se ale tři kuželosečky zvrhlé na přímky a křivky Hesseovy, náležející ku křivkám C_n, jimž přísluší tyto tři zvláštní kuželosečky co konické poláry bodu a, procházejí bodem a; každým bodem procházejí tedy tři křivky Hesseovy, jejichž stupeň, jak známo a rovnice (2) ukazuje, jest $3(n - 2)$. Budiž a bod přímky p a C_n křivka svazku jím procházející, příslušná křivka Hesseova seče p v $3(n-2)$ bodech a', a naopak procházejí bodem a' tři křivky Hesseovy, jejichž křivky C_n sekou p v $3n$ bodech. I nachází se tedy na přímce p celkem $3n+3(n-2)=6(n-1)$ bodů, v nichž se protíná křivka C_n s příslušnou křivkou Hesseovou. *Stupeň křivky* K, *kterou naplňují tyto body, jest tedy* $6(n-1)$; což se s prvním výsledkem shoduje. Úvahy právě vyvinuté dovolují nám ale ustanoviti jednoduchým spůsobem počet bodů dvojnásobných křivky K. Položme totiž bod a do bodu b, kterým všechny křivky C_n procházejí. Pak procházejí i konické poláry téhož bodu bodem b. Přísluší-li křivkám $C'_n C''_n C'''_n$ konické poláry svazku (k^2) zvrhlé na přímky, z nichž jedna bodem b prochází, pak mají $C'_n C''_n C'''_n$ v bodě b body obratu a i tři jím příslušné křivky Hesseovy procházejí bodem b. I nalézáme tedy, že *v každém základném bodě svazku* C_n *mají tři křivky svazku body obratu*, dále, *že body tyto jsou pro křivku* K *body trojnásobnými.* Tato křivka má tedy n^2 bodů trojnásobných, což platí tolik co $3n^2$ bodů dvojnásobných.

Má-li a za druhé takovou polohu, že křivka $C_n^{(1)}$ jím procházející v něm má bod dvojnásobný, pak se nacházejí tečny bodu tohoto ve svazku konických polár bodu a, a jsou konickou polarou bodu a pro křivku $C_n^{(1)}$. Křivka Hesseova této křivky prochází jak známo taktéž bodem a a dotýká se tečen křivky $C_n^{(1)}$; patrno, že bude míti i K v bodě a bod dvojnásobný, jehož tečny jsou totožny s tečnami křivky $C_n^{(1)}$. Jelikož ve svazku křivek C_n se $3(n-1)^2$ křivek s body dvojnými nalezá, má křivka K ještě $3(n-1)^2$ bodů dvojnásobných. Pročež má celkem $3n^2+3(n-1)^2=6n(n-1)+3$ bodů dvojnásobných, a tedy jest její *třída*

$$6(n-1)(6n-7)-12n(n-1)-6=6(n-2)(4n-3).$$

Protíná každou křivku C_n ve

$$6(n-1).n-3n^2=3n(n-2)$$

bodech, t j. v bodech obratu křivky C_n.