Matyáš Lerch

Poznámka o funkci $\frac{\sin x}{x}$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 4, 292--294

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121923`

Poznámka o funkci $\frac{\sin x}{x}$.

Sdílí

Matyáš Lerch.

Ze známého vzorce

$$\sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2} \,.\, \sin\frac{\varphi}{2},$$

plyne bezprostředně

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}.$$

Klademe-li do tohoto vzorce za φ po řadě hodnoty

$$x, \ \frac{x}{2}, \ \frac{x}{4}, \ \ldots \ \frac{x}{2^{n-1}},$$

obdržíme řadu rovnic

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2} \,.\, \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \cos\frac{x}{4} \,.\, \frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}},$$

$$\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} = \cos\frac{x}{8} \,.\, \frac{\sin\frac{x}{8}}{\frac{x}{8}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\frac{x}{2^{n-1}}} = \cos\frac{x}{2^n} \,.\, \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}},$$

kteréžto znásobivše vespolek, obdržíme patrně vzorec

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2} \,.\, \cos\frac{x}{4} \,.\, \cos\frac{x}{8} \ldots \cos\frac{x}{2^n} \,.\, \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}.$$

Roste-li n do nekonečna, blíží se $\frac{x}{2^n}$ nulle a tedy hodnota $\frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}$ jednotce, tak že obdržíme tu na pravé straně nekonečný součin

$$(1) \qquad \frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \, . \cos \frac{x}{4} \, . \cos \frac{x}{8} \ldots \text{ do nekonečna.}$$

Jak známo, konverguje tento součin, je-li řada

$$1 - \cos \frac{x}{2}, \quad 1 - \cos \frac{x}{4}, \quad 1 - \cos \frac{x}{8} \ldots$$

konvergentní. *)

Znamenáme-li tu $u_m = 1 - \cos \frac{x}{2^{m-1}}$, bude při nekonečně rostoucím m, jelikož $u_m = 2 \sin^2 \frac{x}{2^m}$,

$$\lim \frac{u_{m+1}}{u_m} = \lim \frac{\sin^2 \frac{x}{2^{m+1}}}{\sin^2 \frac{x}{2^m}} = \left[\lim \frac{\sin \frac{x}{2^{m+1}}}{\sin \frac{x}{2^m}} \right]^2,$$

a poněvadž tu

$$\lim \frac{x}{2^m} = 0, \quad \lim \frac{x}{2^{m+1}} = 0,$$

jest

$$\lim \frac{\sin \frac{x}{2^{m+1}}}{\sin \frac{x}{2^m}} = \lim \frac{\frac{x}{2^{m+1}}}{\frac{x}{2^m}} = \frac{1}{2}$$

a následovně

$$\lim \frac{u_{m+1}}{u_m} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1,$$

čímž dokázána konvergence řady této a tudíž i součinu (1).

Ku konci ukážeme, kterak lze použiti řady (1) ku stanovení těžiště kruhového oblouku.

---

*) Viz: *Skřivan*, Přednášky o algebr. anal., str. 106.

Budiž ABC libovolný oblouk kruhový, po němž hmota rovnoměrně rozdělena, A, C jeho body mezní, B bod uprostřed mezi oběma, O pak středem kružnice, jíž oblouk náleží. Oblouk AC se skládá ze samých hmotných bodů, jež si můžeme jakkoli spojeny mysliti. Těchto bodů hmotných je na obou polovicích oblouku týž počet a my můžeme spojiti vždy dva z nich, které mají od sebe vzdálenosť $=$ AB; těžiště jejich nalezá se uprostřed tětivy jimi stanovené a vyplňuje kruhový oblouk, jehož poloměr je $r \cos\frac{\alpha}{2}$, značí-li r poloměr OA daného oblouku a $2\alpha = \widehat{AOC}$ středový jeho úhel, — a jehož středový úhel je dvakráte menší. Těžiště takto vzniklého oblouku je zároveň těžištěm oblouku daného.

Podobným spůsobem lze nahraditi tento oblouk jiným, jehož poloměr je patrně $r \cos\frac{\alpha}{2} . \cos\frac{\alpha}{4}$ a jehož středový úhel je $\frac{1}{4}\widehat{AOC}$.

Pokračujeme-li tímto spůsobem, nalezáme vždy nové a nové oblouky, jichž úhly středové stále klesají a blíží se nulle.

V mezním případě, kdy úhel tento mizí, redukuje se oblouk na jediný bod, jenž je hledaným těžištěm daného oblouku. Bod ten nalezá se patrně na přímce OB u vzdálenosti

$$r . \cos\frac{\alpha}{2} . \cos\frac{\alpha}{4} . \cos\frac{\alpha}{8} \dots = r . \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

od bodu O, kterážto veličina patrně se rovná poměru $\frac{\overline{AC}}{arc AC}$, jakož odjinud známo.

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

Dle známé formule

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$

máme, položivše