Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 2, 146--155

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121885`

Opakujeme-li tuto integraci per partes $n-1$krát, obdržíme konečně

$$\int_{0,0}^{s,t} \ldots = \frac{1}{(n-1)!}\left(s\frac{\partial}{\partial s}+t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1} f$$

$$+\int_{0,0}^{s,t}\frac{1}{(n-1)!}\left[\left(s\frac{\partial}{\partial s}+t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\frac{\partial}{\partial s}\right] f\,ds+\Big/_{s}^{t}.$$

Sečteme-li všech $n-1$ rovnic, obdržíme vzhledem k (1) po substituci pro $s=x$, $t=y$ rozvoj Taylorův pro $f(x, y)$ až k členům stupně $n-1$ho, zbytek jest pak vyjádřen ve formě *křivkového integrálu*:

$$R_n=\int_{0,0}^{x,y}\frac{1}{(n-1)!}\left[\left(s\frac{\partial}{\partial s}+t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\frac{\partial}{\partial s}\right] f\,ds+\Big/_{s}^{t}.$$

Zavedeme-li nyní substituci nových proměnných, možno celý postup opakovat pro řadu Lagrange-Laplaceovu, čímž obdržíme zbytek ve formě omezeného integrálu, v němž inversní funkce Φ, Ψ se nevyskytují.

Rozšíření na libovolný počet proměnných jest samozřejmé.

Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

(Pokračování.)

9. Úprava vzorce (8):

Integrací po částech dokáží se snadno rovnice:

$$\frac{1}{4}\int x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right)dx = x^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right)$$

$$+\frac{t}{2}\int x^{-\frac{3}{4}}\sin\left(\frac{t}{2}\log x\right)dx,$$

$$\frac{t}{2}\int x^{-\frac{3}{4}}\sin\left(\frac{t}{2}\log x\right)dx = 2t\,x^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{t}{2}\log x\right)$$

$$-t^2\int x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right)dx,$$

$$\int x^{-\frac{5}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx = -4x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right)$$
$$-2t \int x^{-\frac{5}{4}} \sin\left(\frac{t}{g} \log x\right) dx.$$

Součet první a druhé rovnice dává

$$J_1 = \left(\frac{1}{4} + t^2\right) \int x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx = x^{\frac{1}{4}} \left[\cos \frac{t}{2} \left(\log x\right)\right.$$
$$\left. + 2t \sin\left(\frac{t}{2} \log x\right)\right],$$

a z třetí rovnice následuje, že

$$J_2 = \int x^{-\frac{5}{4}} \left[\cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) + 2t \sin\left(\frac{t}{2} \log x\right)\right] dx$$
$$= -4x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right).$$

Integrací po částech lze rovnici (8) transformovati na

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \Big[\psi(x) J_1\Big]_1^\infty + \int_1^\infty \psi'(x) \,.\, x^{\frac{1}{4}} \left[\cos\left(\frac{t}{2} \log x\right)\right.$$
$$\left. + 2t \sin\left(\frac{t}{2} \log x\right)\right] dx$$

a dále vzhledem k rovnici (4) na

$$\xi(t) = \frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) - \int_0^\infty \frac{d\left[\psi'(x) \,.\, x^{\frac{3}{2}}\right]}{dx} \,.\, J_2 \, dx,$$

$$\xi(t) = 4 \int_0^\infty \frac{d\left[\psi'(x) \,.\, x^{\frac{3}{2}}\right]}{dx} \,.\, x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx. \quad (20)$$

Z rovnice

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}, \; x > 1$$

následuje derivací dle x, že

$$\psi'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 e^{-n^2 \pi x}$$

jest hodnota stále záporná, kdežto

$$\psi''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^2 n^4 e^{-n^2 \pi x}$$

hodnota stále kladná a absolutně větší než $3\psi'(x)$. Výraz

$$\frac{d}{dx}[\psi'(x) \cdot x^{\frac{3}{2}}] = \psi''(x)\, x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\psi'(x)\, x^{\frac{1}{2}}$$

jest tedy stále kladný.

Z toho vyplývá, že funkce $\xi(t)$ definovaná integrálem (20) jest reální a kladná pro všecky body imaginární osy (neboť cosinus ryze imaginárního argumentu jest kladný) a nemůže míti na této ose žádný nullový bod.

Rozklad funkce $\xi(t)$ na primární faktory.

10. Buďtež ϱ a $i\sigma$ reální, resp. imaginární část proměnné s, tedy

$$s = \varrho + i\sigma.$$

Poněvadž pro každé prvočíslo p platí za supposice $\varrho > 1$

$$|p^{-s}| = p^{-\varrho} < 1,$$

obdržíme vzhledem k rovnici (1)

$$\prod_p \frac{1}{1+p^{-\varrho}} < \left|\zeta(s)\right| \leqq \prod_p \frac{1}{1-p^{-\varrho}}, \quad \varrho > 1.$$

Pro $\varrho > 1$ a pro libovolné σ jest tedy $|\zeta(s)|$ obsažena v konečných mezích a nemůže se rovnati nulle. Všecky nullové body funkce $\zeta(s)$ musí míti reálnou část menší než 1 a můžeme je vzhledem ke vzorci (9) rozděliti na dvě třídy:

a) nullové body funkce

$$\frac{1}{s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

To jsou body $s = -2, \ -4, \ -6, \ldots$ (nikoliv $s = 0$; viz (10)).

b) nullové body funkce $\xi(t) = \xi\left(\frac{i}{2} - is\right)$.

Poloha těchto posledních bodů α určí se přibližně z nerovnosti

$$\varrho < 1.$$

Proměnné s a t jsou spojeny rovnicí (6)

$$t = \frac{i}{2} - is = \sigma + i\left(\frac{1}{2} - \varrho\right);$$

rozložíme-li t na reální a imaginární část:

$$t = u + v\,i,$$

jest

$$\frac{1}{2} - \varrho = v,$$

pročež se transformuje hořejší nerovnost na

$$v > -\frac{1}{2}.$$

Z definice (8) funkce $\xi(t)$ následuje však, že jest to funkce sudá; je-li tedy v imaginární část čísla t, pro které jest $\xi(t) = 0$, jest $-v$ imaginární část čísla $-t$, pro něž opět $\xi(-t) = 0$, t. j. poslední nerovnost zůstane správnou, nahradí-li se v ní číslo v číslem $-v$:

$$-v > -\frac{1}{2} \text{ nebo } v < \frac{1}{2}.$$

Imaginární část v nullových bodů funkce $\xi(t)$ hoví tudíž nerovnostem

$$-\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Jinými slovy: nullové body funkce $\zeta(s)$ uvedené sub $b)$ mají reální část ϱ v mezích

$$0 < \varrho < 1. \tag{22}$$

Nullové body funkce $\xi(t)$ leží tedy uvnitř pruhu omezeného dvěma přímkami, vedenými rovnoběžně k reální ose roviny t po obou stranách ve vzdálenosti $= \frac{1}{2}$. Aneb:

Nullové body funkce $\zeta(s)$ uvedené sub $b)$ leží uvnitř pruhu omezeného jednak imaginární osou roviny s, jednak přímkou, která jest s ní rovnoběžná a prochází bodem $s = 1$.

V isogonálním vztahu rovin t a s určeném rovnicí (6) odpovídají si právě tyto dva pruhy.

Z nullových bodů funkce $\zeta(s)$ sub b) uvedených nemůže býti žádný reální; neboť vzhledem k rovnici (6) odpovídal by takovému bodu ryze imaginární nullový bod funkce $\xi(t)$, což jest vyloučeno (viz konec odst. 9.).

11. Dosavadními úvahami není vyloučeno, že by funkce $\zeta(s)$ nemohla míti nějaký komplexní nullový bod na kraji zmíněného pruhu; v rovnici (22) by pro takový nullový bod nastoupilo znamení rovnosti místo znamení nerovnosti. Že funkce $\zeta(s)$ nemá žádný nullový bod, jehož reální část by se rovnala jedné, dokázal ponejprv Hadamard (*22*, *23*, *24*) a téměř současně, avšak jinou methodou Valleé-Poussin (*69*, *70*). Landau (*37*, § 2) dal důkazu formu velice jednoduchou.

Důsledky z této věty jsou důležité pro odvození asymptotické hodnoty součtu $\Sigma \log p$ (viz odst. 21.).

V nerovnostech (22) nemůže tedy pro žádný nullový bod funkce $\zeta(s)$ nastoupiti znamení rovnosti mezi ϱ a 1; následkem toho vůbec žádné ze čtyř znamení nerovnosti v (22) a (23) nemůže býti nahrazeno znamením rovnosti, což lze snadno nahlédnouti z relace (6) a z poznámky, že $\xi(t)$ jest funkce sudá.

12. Riemann vyslovil o kořenech rovnice $\xi(t) = 0$ dvě věty, z nichž jedna, že totiž jsou všechny tyto kořeny reální, dosud dokázána není (viz odst. 25.) a druhá, udávající přibližně počet těch kořenů v daných mezích, byla teprve později dokázána (viz odst. 14.), když Hadamard odůvodnil rozklad funkce $\xi(t)$ na primární faktory Riemannem sice předpokládaný, ale nedokázaný (odst. 13.).

Nejobšírnější *numerické výpočty* kořenů rovnice $\xi(t) = 0$ provedl Gram (*19*, *20*) vycházeje (v *20*) z formule

$$\zeta(s) = \lim_{n=\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} m^{-s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} \right), \tag{23}$$

která platí, je-li reální část s v mezích 0 a 1. Odůvodniti lze tuto formuli na základě Hermiteova vzorce pro funkci $\zeta(s)$ (viz odst. 6.) a rovnice

$$\int_0^\infty (e^{-x} - 1)\, x^{s-2}\, dx = \Gamma(s-1),$$

která platí rovněž, je-li reální část s v intervalu $0 \dots 1$.

Gram transformuje pravou stranu rovnice (23) (tato rovnice platí ostatně i pro $\varrho > 1$ *), neboť pak se shoduje s původní definicí funkce $\zeta(s)$ užívaje Eulerovy summační formule na semikonvergentní řadu pro

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+t'i\right),$$

kdež t' jest *reální***) proměnná.

V této řadě

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+t'i\right)=C(t')+i\,S(t')$$

stačí vzíti dvacet prvních členů, aby mohla býti reální část $C(t')$ i maginární část $S(t')$ vypočtena na 7 desetinných míst, není-li $t' > 50$. Nejprve vyhledává hodnoty s, pro které jest $\zeta(s)$ blízko nulle; pak počítá kořeny na 6 deset. míst interpolací. Výsledek výpočtů jest, že rovnice

$$\xi(t)=0$$

má v intervallu 0 . . 50 deset reálných kořenů; první jest $\alpha_1 = 14{\cdot}134725\,..$, poslední $\alpha_{10} = 49{\cdot}773832\,..$ Dalších pět kořenů určil Gram přibližně:

$$\alpha_{11}=52{\cdot}8\,..,\quad \alpha_{12}=56{\cdot}4\,..,\quad \alpha_{13}=59{\cdot}4\,..,\quad \alpha_{14}=61{\cdot}0\,...$$
$$\alpha_{15}=65{\cdot}0\,...$$

Přibližné výpočty Jensenovy (*29*) a Lindelöfovy (*38*) se shodují s těmito resultáty.

13. V applikaci funkce $\xi(t)$ na theorii prvočísel má fundamentální důležitost rozklad funkce $\xi(t)$ na primární faktory.

Podle známé věty Weierstrassovy lze každou transcendentní celistvou funkci $\varphi(z)$ proměnné z vyjádřiti součinem,

$$\varphi(z)=e^{Q(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{u_n}\right)e^{\frac{z}{u_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{u_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{u_n}\right)^{p_n}};$$

$u_1, u_2, \ldots u_n$ jsou nullové body funkce $\varphi(z)$, p_n celá čísla a $Q(z)$ celistvá funkce proměnné z. Omezíme úvahy jen na funkce

---

*) ϱ značí, jako dříve, reální část s.

**) Tuto proměnnou nutno rozeznávati od proměnné t definované rovnicí (6).

$\varphi(z)$, pro něž jednak p_n neroste do nekonečna s rostoucím n a jednak $Q(z)$ jest polynom stupně q. Volba čísel p_n není jednoznačně určena, je-li dána funkce $\varphi(z)$ toliko svými nullovými body. V dalším budeme předpokládati

$$p_n = p,$$

kdež p jest nejmenší celé číslo, pro které řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|u_n|^{p+1}}$$

ještě konverguje; theorie o rozkladu celistvých funkcí na primární faktory (viz na př. Borel *2*, Vivanti-Gutzmer *74*) dokazuje konvergenci nekonečného součinu

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_n}\right) e^{\frac{z}{u_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{u_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{u_n}\right)^p},$$

ve kterém jest p voleno naznačeným způsobem. Větší z obou čísel p a q nazývá se *rod* *) celistvé funkce $\varphi(z)$.

Hadamard dokázal (1893) větu, kterou již Riemann bez důkazu vyslovil:

Funkce $\xi(t)$ proměnné t^2 jest rodu rovného nulle **). V příslušném pojednání (*21*) jsou dokázány obecné věty o vztazích mezi rodem celistvé funkce, vzrůstem její absolutní hodnoty s rostoucí absolutní hodnotou proměnné, a klesáním absolutní hodnoty koëfficientů $a_1, a_2, a_3 \ldots$ v Maclaurinově řadě s rostoucím indexem.

Hadamardovy důkazy zjednodušili Schou (*64*) a Schaper (*62*), jenž vypracoval na Hilbertův podnět tuto theorii pro t. zv. „Hadamardovy funkce“.

Celistvá funkce

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

nazývá se dle Schapera „Hadamardovou funkcí řádu α“, lze-li

---

*) *Laguerre*, jenž pojem rodu zavedl, užívá názvu »genre«.

**) Vzhledem k (8) jest $\xi(t)$ sudá funkce; v Maclaurinově řadě pro $\xi(t)$ vyskytují se toliko sudé mocniny t, t. j. $\xi(t)$ jest funkcí t^2.

nalézti kladné číslo α takové, že v řadě $a_1, a_2 \ldots$ od jistého indexu počínaje jest

$$|a_m| < \frac{1}{(m!)^{\alpha-\delta}};$$

δ značí dané kladné číslo jakkoliv malé. Je-li funkce $\Phi(z)$ dána, nestačí tato nerovnost k definici čísla α. Neboť vyhovovalo-li by nějaké číslo α, vyhovovalo by každé menší. Jednoznačně se určí „řád" α takto: α budiž dolní mez čísel α_m definovaných rovnicemi

$$|a_m| = \frac{1}{(m!)^{\alpha_m}}, \quad m = 0, 1, 2 \ldots$$

Při této volbě čísla α jest zajisté ona nerovnost splněna a lze dokázati, že řád α funkce se nezmění, vezmou-li se za základ k jeho výpočtu místo koëfficientů a_n koëfficienty b_n rozvoje

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

v kterém může z_0 býti libovolný bod roviny z (Schaper l. c. p. 13—14).

Je-li $\Phi(z)$ Hadamardova funkce řádu α, platí pro dosti veliké hodnoty $r = |z|$ nerovnost

$$|F(z)| < e^{r^{\lambda+\delta}}; \tag{24}$$

při tom jest

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$

a δ libovolně malé kladné číslo.

Dále platí věta: Vyhovuje-li vůbec nějaká celistvá funkce poslední nerovnosti pro jistou kladnou hodnotu λ, jest její rod roven nejvýše λ. Číslo λ nemůže tedy býti menší než rod té funkce, t. j. než číslo p nebo q. Na základě těchto dvou vět lze dokázati, že funkce $\xi(t)$ jest rodu nullového, dvojím způsobem:

Buď se dokáže z Maclaurinova rozvoje funkce $\xi(t)$ (viz rovnici (8), která dovoluje koëfficienty toho rozvoje vyjádřiti ve formě omezených integrálů), že jest $\xi(t)$ Hadamardova funkce proměnné t^2 řádu α většího než 1; dle prvé věty platí tedy nerovnost (24) pro $\xi(t)$ *), je-li

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} < 1,$$

z čehož dle druhé věty následuje, že $p = q = 0$ (Hadamard). Aneb možno přímo z rovnice (9) po případě (19) odvoditi, že $\xi(t)$ *) vyhovuje nerovnosti (24) pro $\lambda < 1$. Dle druhé věty jest opět $p = q = 0$ (Schaper dle Hilberta *62* p. 60—63; Borel *2* p. 85—87).

Rozklad funkce $\xi(t)$ na primární faktory zní

$$\xi(t) = . \, \xi(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_n^2}\right). \tag{25}$$

Čísla

$$\alpha_1^2, \ \alpha_2^2, \ \alpha_3^2 \ldots$$

jsou nullové body funkce $\xi(t)$, považuje-li se za proměnnou t^2; každý z nich zastupuje dva nullové body téže funkce, považuje-li se za proměnnou t. V součinu (25) buďtež

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3 \ldots$$

ty nullové body, jejichž reální část jest kladná, seřazené dle rostoucích hodnot r. části.

Z definice rodu následuje, že součin (25) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2}$$

jsou absolutně konvergentní.

14. Na základě tohoto výsledku podařilo se Mangoldtovi (*40*), (*41*), (*44*) dokázati ještě jinou větu o kořenech funkce $\xi(t)$ Riemannem poněkud nejasně formulovanou.

Věta ta zní:

Je-li $N(T)$ počet kořenů rovnice $\xi(t) = 0$, jejichž reálná část jest obsažena v intervallu $0 \ldots T$, jest přibližně

$$N(T) \doteq \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

*) V nerovnosti (24) jest ovšem položiti $F(z) = \xi(t)$, $z = t^2$.

absolutní hodnota chyby není dle Mangoldta větší než (v. *44*)

$$0{\cdot}43200 \, log \, T + 1{\cdot}91662 \, log \, log \, T + 13{\cdot}07873.$$

Jest tudíž

$$\lim_{T=\infty} \frac{N(T)}{\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}} = 1$$

Mangoldtovy úvahy, jež uvádí podrobně v práci (*41*), jsou velmi dlouhé a složité; vedle zmíněných vět Hadamardových užívá též resultátů Stieltjesových (*66*), které se týkají funkce gamma. Práce (*40*) jest výtah z (*41*).

Dále odvozuje Mangoldt (*41*) ještě několik jiných vět o přibližných hodnotách kořenů α a o jich rozdělení v daných intervallech. Tyto věty podobně jako věty Vallée-Poussinovy (*72*) týkající se téhož předmětu shodují se s numerickými výpočty Gramovými (viz odst. 12.), které jsou na Hadamardově theorii úplně nezávislé.

Cílem Mangoldtovy práce (*41*) byl důkaz Riemannovy formule. Důkaz ten jest však nad míru dlouhý a složitý: mnohem kratší důkaz podal Landau (*36*), jemuž se podařilo vystačiti s několika jednoduchými větami o kořenech rovnice $\xi(t) = 0$ (t. j. o komplexních kořenech rovnice $\zeta(s) = 0$). Z jeho vět, jejichž důkaz jest do nejmenších podrobností proveden (*36*), uvádím jen následující:

Je-li g kladné celé číslo ne menší než 2, lze nalézt v intervallu

$$g \leqq t \leqq g + 1$$

takové číslo T_g, že intervall

$$T_g - \frac{1}{a \log T_g} \leqq t \leqq T_g + \frac{1}{a \log T_g}$$

neobsahuje reální část žádného kořenu α; a jest kladná konstanta na g nezávislá.

(Pokračování.)