Miloslav Pelíšek

O metrických relacích transversál. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 3, 165--190

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121870

$$\frac{n}{n''} = \frac{\tau}{\tau''}\left(1 - \frac{1}{6}\,\frac{\tau^2 - \tau''^2}{r'^3} + \ldots\right)$$

$$\frac{N}{N''} = \frac{\tau}{\tau''}\left(1 - \frac{1}{6}\,\frac{\tau^2 - \tau''^2}{R'^3} + \ldots\right)$$

a tudíž

$$\frac{n}{n''} - \frac{N}{N''} = \frac{1}{6}\,(\tau^2 - \tau''^2)\left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3}\right) + \ldots = 0.$$

Rovnice tato ukazuje, že jest velmi přibližně $R' = r'$. Máme tedy větu: *Pohybuje-li se těleso nebeské geocentricky v největším kruhu, jest jeho vzdálenost od Slunce velmi přibližně rovna vzdálenosti Země od Slunce.* A naopak: *Je-li vzdálenost tělesa od Slunce rovna vzdálenosti Země od Slunce, pohybuje se těleso geocentricky v největším kruhu.*

Věta tato jest doplňkem věty Lambertovy. Na poměry ty upozornil hlavně *E. Weiss* ve Vídni v pojednání: „Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen“.

Je-li $r > R$, pozná se okamžitě ihned pomocí trojúhelníku rovinného mezi sluncem (S), Zemí (Z) a Tělesem (P). Je-li úhel χ mezi směrem k Tělesu a prodlouženým směrem k SZ u Země Z *menším* než 90°, jest patrně $r > R$; úhel χ jest určen rovnicí:

$$\cos\chi = -\cos\beta\cos(\lambda - \Theta),$$

kdež β jest geocentrická šířka, λ geocentrická délka tělesa a Θ jest délkou Slunce. Je-li $\cos(\lambda - \Theta)$ záporným, tedy $\lambda - \Theta > 90°$, musí $r > R$.

O metrických relacích transversál.

Napsal

Miloslav Pelíšek,
professor v Praze.

(Dokončení.)

Vedeme-li příčku, jež uzavírá s přeponou pravoúhlého trojúhelníka úhel 45°, a protíná odvěsny a výšku v bodech x, y, z, platí pro její libovolný bod o

(60) $$oz = ox\,(\cos\mu - \sin\mu)\cos\mu + oy\,(\cos\mu + \sin\mu)\sin\mu,$$

a dáme-li bodu o splynouti s bodem z

(61) $$\frac{zx}{zy} = \frac{1+\operatorname{tg}\mu}{1-\operatorname{tg}\mu}\,.\operatorname{tg}\mu.$$

Položíme-li úhel $\mu = 45$, obdržíme *rovnoramenný pravoúhlý* trojúhelník. Protneme-li tento libovolnou příčkou, jež svírá s přeponou úhel ω a protíná ramena a výšku v bodech x, y, z, obdržíme pro libovolný bod o této příčky

(62) $$oz = \frac{ox}{2}\,(1 - \operatorname{tg}\omega) + \frac{oy}{2}\,(1 + \operatorname{tg}\omega).$$

Splyne-li na této příčce o se z, jest pak

(63) $$\frac{xz}{yz} = \frac{1+\operatorname{tg}\omega}{1-\operatorname{tg}\omega}.$$

Vedeme-li zvláště příčku pod úhlem 30°, obdržíme

(64) $$oz = ox\,.\,\frac{1-\sqrt{3}}{2} + oy\,\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

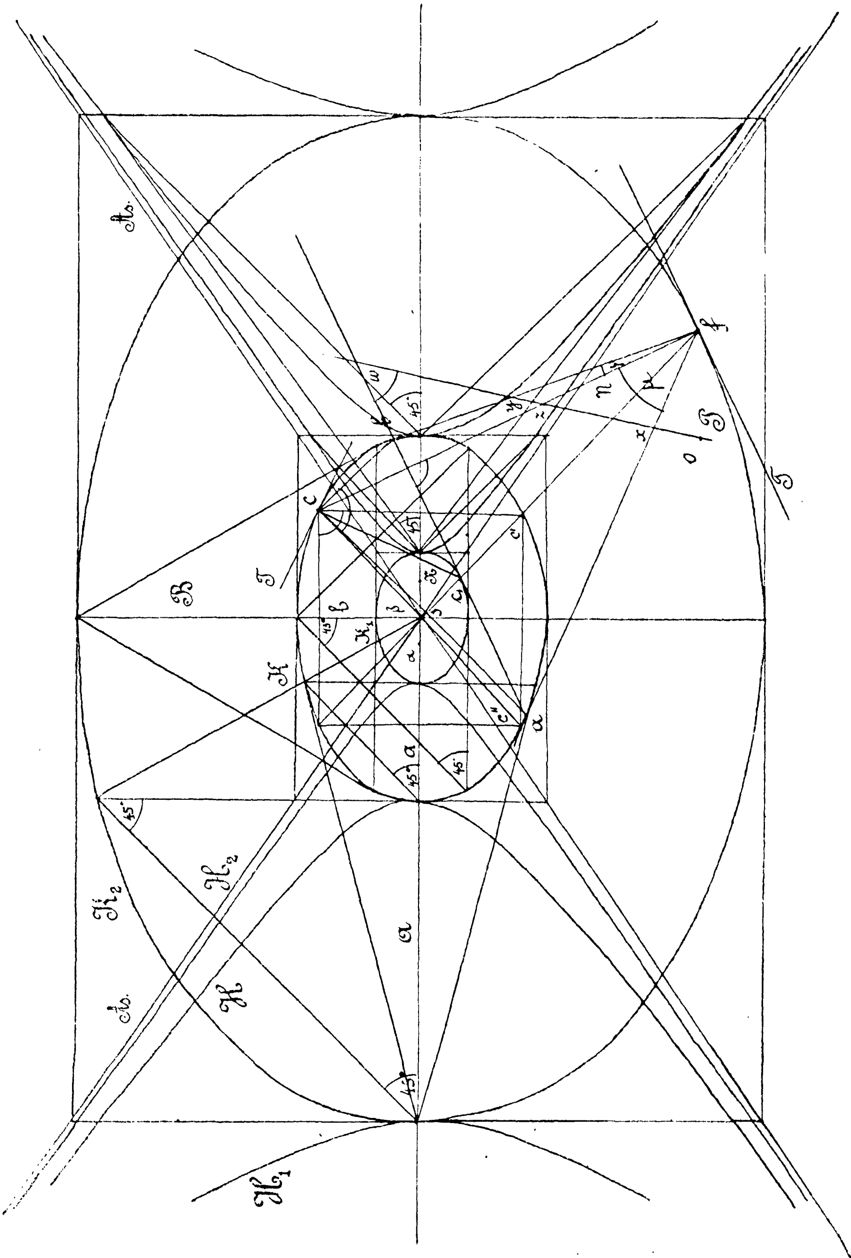
a

(65) $$\frac{xz}{yz} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}.$$

* * *

Mějme nyní konečně na zřeteli kollineárnou kuželosečku k dané kružnici, určenou tečnami fa, fb s body dotyku a, b a bodem c (obr. 7.). Pro tuto kuželosečku jsme odvodili relace (27) a (30). Jest patrno, kdybychom pošinovali libovolně zvolenou úběžnou přímku F tak. aby zůstala stále rovnoběžnou ku ab, že obdržíme libovolnou kuželosečku jakožto kollineárný obraz dané kružnice.

Taktéž jest patrno, že obdržíme na těchto kuželosečkách libovolné body, dáme-li bodu c na kružnici všechny možné polohy; přece by však bylo předčasné tvrditi, že zmíněné relace



Obr. 2.

(27) neb (30) platí obecně, poněvadž má bod f vůči oné kollineární kuželosečce zvláštní polohu. Zvláštnost této polohy spočívá v té okolnosti, že, vedeme-li z bodu f kolmici fd na poláru ab bodu f, protíná tato kolmice kuželosečku v takovém bodě c, že nazíráme tetivu ab z tohoto bodu c pod pravým úhlem.

Vlastnost tato dostačí, abychom vyhledali geometrické místo bodu f, pro které platí hořejší relace.

Předpokládejme prozatím, že jest ona kollineární kuželosečka k ellipsa s poloosami a, b (obr. 9.); její rovnice jest tudíž

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Otáčí-li se pravý úhel kol libovolného bodu c na k jakožto vrcholu, vytvoří, jak známo průsečíky jeho ramen na k kvadratickou involuci. Střed c_1 této involuce jest patrně předně na normále v bodě c, jejíž rovnice jest, znamenají-li x_1, y_1 koordináty bodu c:

$$a^2x_1\eta - b^2y_1\xi = (a^2-b^2)x_1y_1$$

Jsou-li ramena onoho pravého úhlu rovnoběžná k osám, jest patrno, že jest za druhé střed oné involuce na průměru, jenž spojuje průsečíky těchto ramen s ellipsou; průměr ten jest patrně souměrný k průměru sc daného bodu vzhledem k osám kuželosečky. Z toho následuje, že koordinaty ξ, η tohoto středu involuce c_1 hověti musí rovnici:

$$\frac{\xi}{\eta}=-\frac{x_1}{y_1}.$$

Eliminujeme-li z předcházejících tří rovnic x_1, y_1, obdržíme rovnici pro místo k_1 všech středů takových involuc, proběhne-li daný bod c danou ellipsou k. Rovnice tato jest

$$\frac{\xi^2}{\dfrac{a^2(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}}+\frac{\eta^2}{\dfrac{b^2(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}}=1.$$

Místo k_1 jest tedy podobná a souosá ellipsa ku k, jejíž poloosy α, β se rovnají

$$\alpha = \frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \qquad \beta = \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}.$$

Vrcholy této ellipsy obdržíme patrně, vedeme-li vrcholy dané ellipsy přímky, jež svírají s osou úhly 45^0; spojíme-li průsečíky těchto přímek a dané ellipsy, obdržíme přímky kolmé k osám k a průsečíky těchto kolmic s osami jsou vrcholy ellipsy k_1, kdežto ony kolmice jsou vrcholové tečny k_1.

Polární křivka k_2 této ellipsy k_1 vzhledem k dané ellipse k jest, jak známo, zase kuželosečka. Vrcholy její jsou patrně póly vrcholových tečen ku k_1, jež jsou současně poláry těchto hledaných vrcholů vzhledem ku k.

Rovnice tečny ku k_1 ve vrcholu velké osy jest

$$x = \frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2},$$

kdežto rovnice poláry hledaného vrcholu, jehož souřadnice buďtež x_{11}, 0, jest:

$$\frac{x \,.\, x_{11}}{a^2} = 1.$$

Eliminací x z obou rovnic obdržíme výraz pro x_{11}, jenž se patrně rovná poloose ellipsy k_2. Buďtež její poloosy A, B; pak jest

$$\mathrm{A} = \frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}, \qquad \mathrm{B} = \frac{b(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2},$$

ze kterých výrazů jde na jevo, že i k_2 jest ellipsa s dřívějšími souosá a podobná.

Vyjádříme-li v posledních výrazech naopak a, b jakožto funkce veličin A, B, obdržíme:

$$a = \frac{\mathrm{A}(\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2)}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}, \qquad b = \frac{\mathrm{B}(\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2)}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2},$$

z čehož jde na jevo, že mezi ellipsami k_2 a k panuje táž souvislost, jako mezi ellipsami k a k_1; jinými slovy, k jest místo středů involuc, jež vytvoří ramena pravého úhlu na k_2, otáčí-li se tento kol vrcholu na k_2; dle výše uvedeného platí též zde, že střed involuce c, příslušný nějakému bodu f na k_2, jest na průměru souměrném ku průměru sf vzhledem k společným osám všech tří ellips. Normála v bodě f prochází tedy bodem c a jest též kolmá ku poláře ab bodu f vzhledem ku k.

Máme tudíž následující výsledek:

„Volíme-li na k bod c a vyhledáme-li na k_1 bod c_1, jenž leží tak, že poloměry sc, sc_1 jsou souměrné k osám; vedeme-li v bodě c_1 tečnu ku k_1, jež protíná k v bodech a, b, následuje předně, že jest úhel acb pravým; označíme-li dále f průsečík přímky sc_1 s k_2, jest f pól přímky ab co poláry vzhledem ku k, a tečna v f ku k_2 jest rovnoběžná k tečně ab; spojíme-li konečně c a f, jest tato přímka normálou v bodě f ku k_2 a tedy též kolmá ku ab."

Místo bodů f, pro něž platí relace (27) neb (30), jest tedy kuželosečka oné kollineárné kuželosečce podobná a s ní souosá; jsou-li osy kollineárné kuželosečky a, b, jsou osy hledané kuželosečky

$$\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-b^2}, \qquad \frac{b(a^2+b^2)}{a^2-b^2},$$

Jelikož souvisí daná kuželosečka k s k_2 přesně tak, jako k_1 s k, dají se patrně osy kuželosečky k_2 též sestrojiti následujícím způsobem:

Vedeme ve vrcholech dané kuželosečky k vrcholové tečny a přímky, jež svírají s osami úhly 45°; průsečíky těchto přímek s k promítněme ze středu s na vrcholové tečny; pak obdržíme na těchto patrně úsečky, o které jsou poloosy k_2 větší než poloosy k. Vyhledanými body na vrcholových tečnách třeba jen vésti přímky pod úhlem 45° k osám, jež protínají osy v hledaných vrcholech kuželosečky k_2.

Zopakujme konečný výsledek:

Vedeme-li libovolnou příčku P, jež protíná tečny fa, fb ellipsy k a kolmici fc k poláře ab v bodech x, y, z, pak platí pro libovolný bod o této příčky relace:

$$oz = ox \cdot \frac{\cos(\omega+\mu)\sin\nu}{\sin(\mu+\nu)\cos\omega} + oy\frac{\cos(\omega-\nu)\sin\mu}{\sin(\mu+\nu)\cos\omega},$$

při čemž jsou μ a ν úhly, jež svírají tečny fa a fb s přímkou fc a ω úhel, který svírá příčka P s polárou ab.

Předcházející rovnice představovaly stále ellipsu; zavedeme-li však ib místo b, obdržíme hyperbolu H s týmiž osami. Pro tuto obdržíme osy obdobné hyperboly H_1:

$$\alpha = \frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}, \quad \beta = \frac{ib(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}, \quad (i = \sqrt{-1})$$

jež jsou tedy totožné s osami ellipsy k_2.

Osy obdobné hyperboly H_2 jsou dány výrazy:

$$A = \frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{ib(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2},$$

jež jsou tedy totožné s osami ellipsy k_1.

Jelikož jsou hyperboly H, H_1, H_2 podobné a souosé, musí míti též společné asymptoty.

Hyperboly H, H_1, H_2 jsou tedy v následující souvislosti:

„Volíme-li na H bod c (obrazec si čtenář doplň laskavě, a vyhledáme na H_1 bod c_1, jenž leží souměrně tak, že poloměry sc, sc_1 jsou souměrné k osám hyperbol; vedeme-li v bodě c_1 tečnu ku H_1, jež protíná H v bodech a, b, pak následuje předně, že jest úhel acb pravým; označíme-li dále f průsečík přímky sc_1 s H_2, jest f pól přímky ab jakožto poláry vzhledem ku H a tečna v f ku H_2 jest rovnoběžná k tečně ab; spojíme-li konečně c a f, jest tato přímka normálou v bodě f ku H_2 a tedy též kolmá ku ab.“

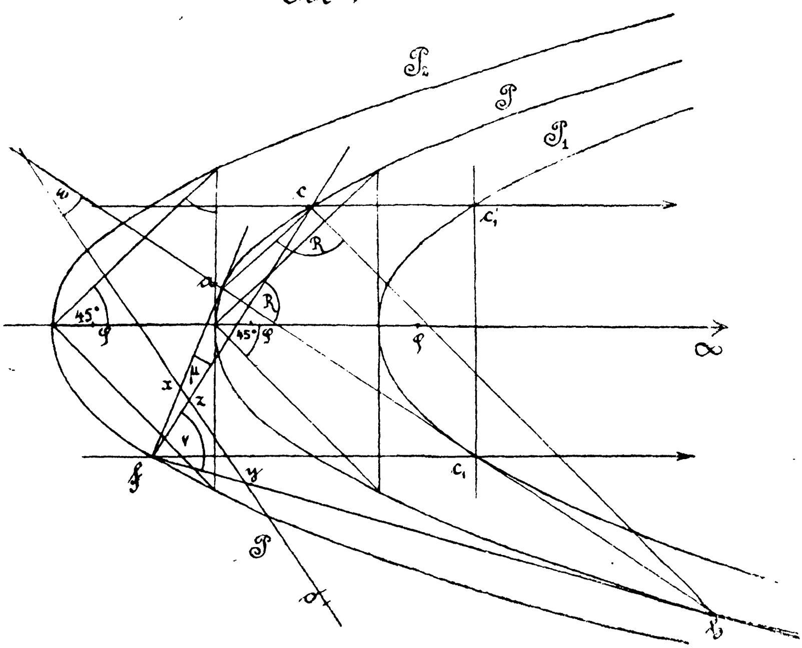
Vedeme-li nyní libovolnou příčku P, jež protíná tečny fa, fb a kolmici fc ku poláře ab v bodech x, y, z, platí pro libovolný bod o této příčky relace:

$$oz = ox \cdot \frac{\cos(\omega + \mu)\sin\nu}{\sin(\mu + \nu)\cos\omega} + oy\frac{\cos(\omega - \nu)\sin\mu}{\sin(\mu + \nu)\cos\omega},$$

při čemž znamenají μ, ν úhly, jež tvoří tečny fa, fb s kolmicí fc na poláru ab, a ω úhel, jejž svírá příčka P s polárou ab.

Pro parabolu P (obr. 10.) se stanou hořejší výrazy neurčitými, jest však jasné, že i u paraboly jakožto mezného případu zůstává v platnosti konstrukce s přímkami pod úhlem 45°; dále jest patrno, že spojnice průsečíků těchto přímek a paraboly protíná osu v bodě, jenž jest od vrcholu dané paraboly vzdálen o dvojnásobný parametr. Poněvadž jsou podobné paraboly vlastně shodné, obdržíme obdobné paraboly P_1, P_2, pošineme-li parabolu P rovnoběžně k její ose a dvojnásobný parametr dovnitř a na vnější stranu.

Obr. 10.



Máme tedy větu:

„Pošineme-li parabolu P (obr. 10.) o dvojnásobný parametr ve směru osy na vnitřní a vnější stranu do poloh P_1 a P_2; vedeme-li pak z libovolného bodu f paraboly P_2 tečny fa, fb ku parabole P, jest polára ab bodu f vzhledem ku P současně tečnou ku P_2, a bod dotyku c_1 této tečny jest na rovnoběžce k ose parabol vedené bodem f; spustíme-li dále s bodu f kolmici fd na poláru ab a protíná-li ona kolmice parabolu P v bodě c, jest úhel acb pravý.“ Označíme-li dále μ, ν úhly, jež tvoří sečna fc s tečnami fa, fb, dále α úhel poláry ab s tetivou ac a vedeme-li konečně libovolnou transversálu T, jež protíná fa, fb a sečnu fc v bodech x, y, z, je v platnosti pro libovolný bod o této libovolné transversály relace (27)

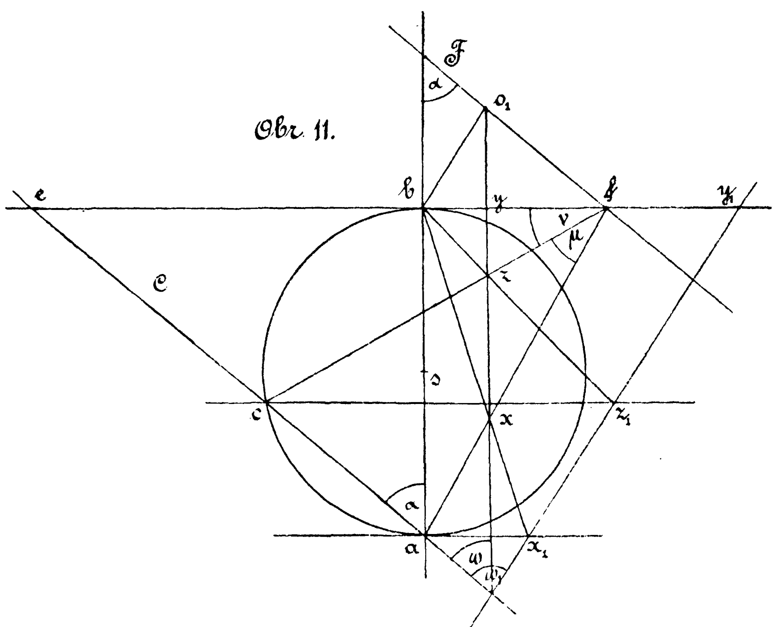
$$oz = ox\,\frac{\cos(\omega+\mu)}{\cos\omega\,.\,\cos\mu}\sin^2\alpha + oy\,\frac{\cos(\omega-\nu)}{\cos\omega\,.\,\cos\nu}\cos^2\alpha$$

aneb též relace (30)

$$oz = ox\,.\,\frac{\cos(\omega+\mu)\sin\gamma}{\sin(\mu+\nu)\cos\omega} + oy\,\frac{\cos(\omega-\nu)\sin\mu}{\sin(\mu+\nu)\cos\omega}\,.$$

Ku konci dlužno poukázati k tomu, že pro $\omega = o$ přejde relace (27) v prvotní relaci *Hamiltonovu* ve případě ellipsy, hyperboly i paraboly, z čehož by se dala zase odvoditi celá řada podrobnějších vztahů.

* * *



Obr. 11.

Uspořádejme nyní centrální kollineaci, kterou transformujeme obrazec 1. tak (obr. 11.), aby tetiva ac byla osou kollineace C, a bod b středem kollineace, kdežto libovolná přímka F rovnoběžná ku ac má býti přímkou úběžnou.

Budiž f průsečík přímky F s tečnou kružnice v bodě b, pak jest patrně f úběžník tansformovaných tečen v bodech a, b jakož i rovnoběžné sečny bodem c, kdežto kružnice sama se transformovala v kuželosečku určenou tečnami fa, fb s body dotyku a, b jakož i bodem c.

Veďme nyní libovolným bodem o na ose kollineace ac libovolnou příčku P_1, jež protíná netransformované tečny bodů a, b jakož i rovnoběžnou sečnu bodem c v bodech x_1, y_1, z_1 a úběžnou přímku v bodě o'_1, a svírá s osou kollineace jakož i s úběžnou přímkou úhel ω_1. Příčka ta se transformuje ve přímku P, jež prochází bodem o a protíná transformované tečny a sečnu v bodech x, y, z a uzavírá s osou kollineace úhel ω. Buďte dále μ, ν úhly, jež svírá transformovaná sečna s tečnami fa, fb a konečně α úhel, jejž svírá tetiva ac s polárou ab.

Z podobnosti trojúhelníků $xox_1 \sim xbo_1$ následuje:

$$\frac{ox_1}{xo} = \frac{bo_1}{xo_1}.$$

V trojúhelníku bfo_1 jest však

$$bo_1 = \frac{o_1 f \cos\alpha}{\cos(\omega_1 - \alpha)}.$$

V trojúhelníku $o_1 fx$ jest dále:

$$xo_1 = \frac{o_1 f \,.\, \cos(\alpha - \mu - \nu)}{\cos(\alpha - \mu - \nu - \omega)}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty, obdržíme:

$$\frac{ox_1}{ox} = \frac{\cos\alpha \,.\, \cos(\alpha - \mu - \nu - \omega)}{\cos(\omega_1 - \alpha)\cos(\alpha - \mu - \nu)}.$$

Podobně obdržíme z obrazce po krátkých redukcích:

$$\frac{oy_1}{oy} = \frac{\cos(\alpha - \omega)}{\cos(\omega_1 - \alpha)} \quad \text{a} \quad \frac{oz_1}{oz} = \frac{\cos\alpha \cos(\alpha - \nu - \omega)}{\cos(\omega_1 - \alpha)\cos(\alpha - \nu)}.$$

Dosadíme-li hodnoty ty do relace Hamiltonovy

$$oz_1 = ox_2 \sin^2\alpha + oy_1 \cos^2\alpha,$$

obdržíme, násobíme-li současně činitelem $\cos(\omega_1 - \alpha)$,

$$
(66)\quad \begin{aligned} oz = ox\,.\,&\frac{\cos(\alpha - \nu)\cos(\alpha - \mu - \nu - \omega)}{\cos(\alpha - \mu - \nu)\cos(\alpha - \nu - \omega)}\,.\,\sin^2\alpha \\ + oy\,.\,&\frac{\cos(\alpha - \nu)\cos(\alpha - \omega)}{\cos\alpha\,.\,\cos(\alpha - \nu - \omega)}\,.\,\cos^2\alpha\,. \end{aligned}
$$

Rovnice ta platí zase ovšem prozatím jen pro průsečík o přímky P s osou kollineace ac. Vedeme-li transversálu P bodem f, splynou s tímto bodem průsečíky x, y, z, takže obdržíme relaci prostou délek, panující jen mezi intervenujícími úhly:

$$
(67)\quad \begin{aligned} 1 = &\frac{\cos(\alpha - \nu)\cos(\alpha - \mu - \nu - \omega)}{\cos(\alpha - \mu - \nu)\cos(\alpha - \nu - \omega)}\,.\,\sin^2\alpha \\ + &\frac{\cos(\alpha - \nu)\cos(\alpha - \omega)}{\cos\alpha\,.\,\cos(\alpha - \nu - \omega)}\,.\,\cos^2\alpha. \end{aligned}
$$

Volíme-li na přímce P libovolný bod o', dá se podobně jako pro relaci (27) dokázati, že platí relace (66) pro každý bod přímky P.

Nepřihlížejme prozatím ku kollineárné kuželosečce k stanovené tečnami fa, fb s body dotyku a, b jakož i bodem c, nýbrž k dané kružnici, vzhledem ku které mají všechny v rovnici (66) se vyskytující veličiny svůj určitý význam.

Máme pak zvšeobecnění Hamiltonovy poučky v tomto směru:

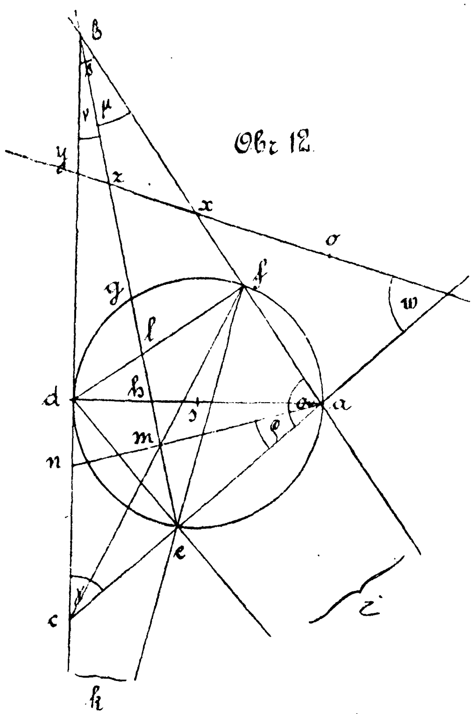
Vedeme-li v libovolném bodě b kružnice tečnu, libovolným bodem f této tečny sečnu, jež prochází diametrálním bodem a bodu b a konečně tímže bodem f libovolnou sečnu, jež protíná kružnici v bodě c; označíme-li α úhel tetivy ac s průměrem ab, dále μ, ν úhly sečny fc s přímkami fb, fa; vedeme-li konečně libovolnou příčku P, jež protíná přímky fa, fb, fc v bodech x, y, z a svírá s tetivou ac úhel ω, jest pro libovolný její bod o v platnosti relace (66).

Táž relace má patrně platnost, sestrojíme-li na odvěsně ab pravoúhlého trojúhelníka abf jakožto průměru kružnici; vedeme-li protilehlým vrcholem f libovolnou sečnu, jež protíná kružnici na odvrácené straně v bodě c; protneme-li konečně přímky fa, fb, fc libovolnou příčkou v bodech x, y, z.

Prodloužíme-li tetivu ac, až protne v e tečnu bodu b, obdržíme různostranný trojúhelník, na jehož výšce jakožto průměru jest sestrojena kružnice, a pro tento trojúhelník má relace (66) též platnost.

Z toho plynou následující četné vztahy:

Opíšeme-li v libovolném trojúhelníku *abc* (obr. 12.), jehož úhly označíme α, β, γ, na výšce *ad* jakožto průměru kružnici, jež protíná strany *ac*, *ab* v bodech *e*, *f*; uzavírá-li dále příčka *be*



se stranami *ab*, *bc* úhly μ, ν a vedeme-li konečně libovolnou transversálu P, jež protíná přímky *ba*, *bc*, *be* v bodech *x*, *y*, *z* a svírá se stranou *ac* úhel ω, platí pro libovolný bod *o* této přímky následující relace:

$$
\begin{aligned}
(68) \qquad oz = ox \,.\, & \frac{\sin(\gamma + \nu)\sin(\alpha - \omega)}{\sin\alpha\sin(\gamma + \nu + \omega)} \,.\, \cos^2\gamma \\
+ \, oy \,.\, & \frac{\sin(\gamma + \nu)\sin(\gamma + \omega)}{\sin\gamma \,.\, \sin(\gamma + \nu + \omega)} \sin^2\gamma \,.
\end{aligned}
$$

Mezi intervenujícími úhly panuje však pro libovolné ω relace:

$$(69)\qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{\sin(\gamma+\nu)\sin(\alpha-\omega)}{\sin\alpha\,.\,\sin(\gamma+\nu+\omega)}\,.\,\cos^2\gamma \\ &+ \frac{\sin(\gamma+\nu)\sin(\gamma+\omega)}{\sin\gamma\,.\,\sin(\gamma+\nu+\omega)}\,.\,\sin^2\gamma\,. \end{aligned}$$

Splyne-li o se z, obdržíme relaci:

$$(70)\qquad \frac{zx}{zy} = \frac{\sin\alpha\,.\,\sin(\gamma+\omega)}{\sin\gamma\,.\,\sin(\alpha-\omega)}\,.\,\mathrm{tg}^2\gamma.$$

Položíme-li $\omega = 90 - \gamma$, vedeme-li tedy transversálu rovnoběžně ku výšce ad, obdržíme:

$$(71)\qquad \begin{aligned} oz &= ox\,.\,\frac{\sin(\gamma+\nu)\cos\beta}{\sin\alpha\,.\,\cos\nu}\,.\,\cos^2\gamma \\ &+ oy\,.\,\frac{\sin(\gamma+\nu)}{\sin\gamma\,.\,\cos\nu}\,.\,\sin^2\gamma. \end{aligned}$$

Splyne-li zvláště transversála s výškou ad a bod o s bodem h, obdržíme:

$$(72)\qquad \frac{ha}{hd} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta\sin\gamma}\,.\,\mathrm{tg}^2\gamma\,.$$

Položíme-li $\omega = 90^0$, vedeme-li tedy transversálu kolmo ku straně ac, obdržíme:

$$(73)\qquad \begin{aligned} oz &= ox\,.\,\mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,(\gamma+\nu)\cos^2\gamma \\ &+ oy\,\mathrm{cotg}\,\gamma\,.\,\mathrm{tg}\,(\gamma+\nu)\sin^2\gamma\,. \end{aligned}$$

Splyne-li však o se z, obdržíme:

$$(74)\qquad \frac{zx}{zy} = \mathrm{tg}\,\alpha\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma.$$

Patrně platí též;

$$(74a)\qquad \frac{ei}{de} = \mathrm{tg}\,\alpha\,.\,\mathrm{tg}\,\nu.$$

Položíme-li $\omega = o$, vedeme-li tedy transversálu rovnoběžnou se stranou ac aneb s ní splývající, obdržíme v tomto posledním případě:

$$(75) \qquad oe = oa \cos^2\gamma + oc \sin^2\gamma,$$

jest zde tedy v platnosti *jednoduchá relace Hamiltonova;* splyne-li zvláště o s. e, obdržíme:

$$(76) \qquad \frac{ea}{ec} = \operatorname{tg}^2\gamma$$

podobně platí též

$$(76a) \qquad \frac{fa}{fb} = \operatorname{tg}^2\beta.$$

Položíme-li $\omega = 180 - \beta$, vedeme-li tedy transversálu rovnoběžně ku přímce ef, aneb dáme-li jí hned s touto splynouti, obdržíme pro libovolný bod o přímky ef:

$$(77) \qquad \begin{aligned} oe &= of \cdot \frac{\sin\gamma \sin(\gamma + \nu)}{\sin\alpha \cdot \sin(\gamma - \mu)} \cdot \cos^2\gamma \\ &+ ok \cdot \frac{\sin(\gamma - \beta)\sin(\gamma + \nu)}{\sin\gamma \cdot \sin(\gamma - \mu)} \cdot \sin^2\gamma \end{aligned}$$

aneb, splyne-li o s e:

$$(78) \qquad \frac{ef}{ek} = \frac{\sin\alpha \sin(\gamma - \beta)}{\cos^2\gamma}.$$

Položíme-li $\omega = \alpha - 90^0$, splyne-li tedy transversála s přímkou df, obdržíme pro libovolný bod o této přímky:

$$(79) \qquad \begin{aligned} ol &= of \cdot \frac{\sin(\gamma + \nu)}{\sin\alpha \cdot \cos(\beta - \nu)} \cdot \cos^2\gamma \\ &+ od \frac{\sin(\gamma + \nu)\cos\beta}{\sin\gamma \cdot \cos(\beta - \nu)} \cdot \sin^2\gamma. \end{aligned}$$

Splyne-li však o s l, obdržíme:

$$(80) \qquad \frac{lf}{ld} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\gamma} \operatorname{tg}^2\gamma.$$

Označíme-li m průsečík přímek be a cf, dále n průsečík přímek bc a am, konečně ϱ úhel mac; splyne-li transversála s přímkou an, obdržíme:

$$\frac{ma}{mn} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin(\gamma + \varrho)}{\sin\gamma \cdot \sin(\alpha - \varrho)} \cdot \operatorname{tg}^2\gamma.$$

Podobně shledáme pouhou transmutací:

$$\frac{ma}{mn} = \frac{\sin\alpha \,.\, \sin(\gamma + \varrho)}{\sin\beta \sin\varrho} \,.\, \mathrm{tg}^2\,\beta.$$

Z těchto rovnic následuje po jistých redukcích:

$$\cotg\varrho = \frac{\sin\beta\,\mathrm{tg}^2\,\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\beta}{\sin\alpha\sin\gamma\,\mathrm{tg}^2\,\beta}$$

jakož i

(81) $$\frac{ma}{mn} = \mathrm{tg}^2\,\beta + \mathrm{tg}^2\,\gamma\,.$$

Položíme-li v předcházejících relacích $\beta = \gamma$, obdržíme vztahy platné pro *rovnoramenný trojúhelník*, z nichž uvedeny buďtež pouze následující:

(82) $$\frac{ha}{hd} = 2\,\mathrm{tg}^2\,\beta\,,$$

(83) $$\frac{ei}{de} = 2\,\frac{\mathrm{tg}^2\,\beta}{\mathrm{tg}^2\,\beta - 1}\,,$$

(84) $$\frac{ea}{ec} = \frac{fa}{fb} = \mathrm{tg}^2\,\beta,$$

(85) $$\frac{ef}{ek} = \infty\,;\ ef \,||\, bc\,,$$

(86) $$\frac{lf}{ld} = 2\sin^2\beta, \quad \text{atd.}$$

Položíme-li v předcházejících relacích $\beta = 60^0$, obdržíme vztahy platné pro *rovnostranný trojúhelník*, z nichž uvedeny buďte pouze následující, vesměs racionální:

(87) $$\frac{ha}{hd} = 6\,,$$

(88) $$\frac{ei}{de} = 3\,,$$

(89) $$\frac{ea}{ec} = 3$$

$$\frac{ab}{bi} = 3; \quad af = fi, \tag{90}$$

$$\frac{ef}{ek} = \infty; \quad ef \parallel bc \tag{91}$$

$$\frac{lf}{ld} = \frac{3}{2}, \tag{92}$$

$$\frac{fh}{ch} = \frac{eh}{bh} = \frac{3}{4} \quad \text{atd.} \tag{93}$$

Položíme-li v relacích (68)—(81) $\alpha = 90^0$, při čemž jest současně $\gamma = 90 - \beta$, obdržíme vztahy platné pro *pravoúhlý trojúhelník*, z nichž buďtež uvedeny pouze následující:

$$\frac{ha}{hd} = \frac{1}{\sin^2 \beta}, \tag{94}$$

$$\frac{ei}{di} = \infty; \quad ab \parallel de, \tag{95}$$

$$\frac{ea}{ec} = \operatorname{cotg}^2 \beta \quad \text{jakož i} \quad \frac{fa}{fb} = \operatorname{tg}^2 \beta, \tag{96}$$

$$\frac{ef}{ek} = \operatorname{tg}^2 \beta - 1, \tag{97}$$

$$\frac{lf}{ld} = \operatorname{tg}^2 \beta; \quad fd \parallel ac \quad \text{atd.} \tag{98}$$

Položíme-li v předcházejících relacích $\beta = 45^0$, obdržíme relace platné pro *pravoúhlý rovnoramenný* trojúhelník, na př.:

$$\frac{ha}{hd} = 2, \tag{99}$$

$$\frac{ea}{ec} = 1, \tag{100}$$

$$\frac{lf}{ld} = 1 \quad \text{atd.} \tag{101}$$

Obraťme nyní svůj zřetel ku kollineární kuželosečce dané kružnice (obr. 11.) stanovené tečnami fa, fb s body dotyku a,

b jakož i bodem c. Jest zase patrno, že vhodnou volbou úběžné přímky F můžeme docíliti libovolné kuželosečky a vhodnou volbou bodu c na dané kružnici libovolného bodu na oné kuželosečce; přece však není relace (66) v platnosti všeobecně, nýbrž jest vázána na ony zvláštní polohy bodu f, pro které jest jeho polára kolmá k tečně fb, tedy normálou oné kuželosečky.

Místo bodů f seznáme následující úvahou:

Pohybuje-li se bod b na kuželosečce, zahaluje normála ab v tomto bodě evolutu oné kuželosečky a pól f této normály opisuje polární křivku této evoluty vzhledem k dané kuželosečce.

Buďtež x_1, y_1 koordinaty bodu b oné kollineárné kuželosečky; je-li tato ellipsa, jest její rovnice

$$(\alpha) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1;$$

pak jest, značí-li x, y běžné souřadnice rovnice normály v tomto bodě:

$$(\beta) \qquad y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

a rovnice poláry pro pól, jehož souřadnice jsou ξ, η, vzhledem ku k:

$$(\gamma) \qquad y - \eta = -\frac{b^2 \xi}{a^2 \eta}(x - \xi).$$

Poněvadž má býti tato polára totožnou s onou normálou, jsou podmínečné rovnice:

$$(\delta) \qquad \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} = -\frac{b^2 \xi}{a^2 \eta}$$

$$(\varepsilon) \qquad -\frac{a^2 y_1}{b^2} + y_1 = \frac{b^2 \xi^2}{a^2 \eta^2} + \eta.$$

Eliminujeme-li z rovnic (α), (δ) a (ε) souřadnice x_1, y_1, obdržíme rovnici polární křivky evoluty ellipsy vzhledem k této ellipse:

$$(a^2\eta^2 + b^2\xi^2)^2 . (a^6\eta^2 + b^6\xi^2) = a^4 b^4 (a^2 - b^2)^2 \xi^2 \eta^2.$$

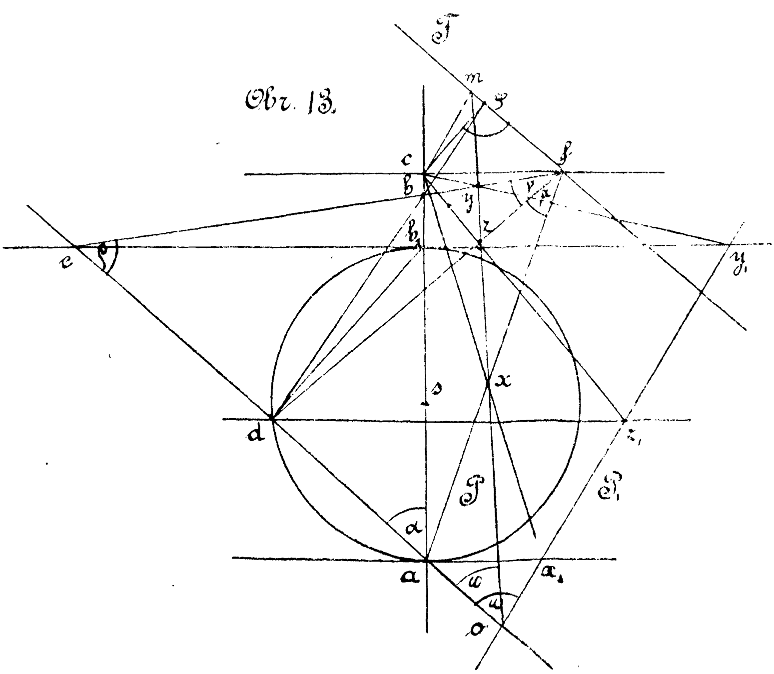
Rovnici polární křivky evoluty hyperboly vzhledem k této hyperbole obdržíme z předcházející, píšeme-li ib místo b a tedy $-b^2$ místo $+b^2$ a naopak $+b^2$ místo $-b^2$.

Vedeme-li tedy z libovolného bodu f těchto křivek obě tečny a libovolnou sečnu k základní kuželosečce a protneme tyto tři přímky libovolnou transversálou, jest pro libovolný bod této transversály v platnosti relace (66). Pro různé zvláštní polohy bodu f nabyli bychom zase různé podrobnější vztahy a taktéž pro různé zvláštní polohy oné transversály; je-li na př. $\omega = o$, je-li tedy transversála rovnoběžná k poláře ab aneb splývá-li s ní, jest pro každý její bod v platnosti *prvotní relace Hamiltonova* (1), čímž jsme obdrželi další zajímavý případ její platnosti vzhledem k libovolné kuželosečce.

* * *

Uspořádejme centrální kollineaci, kterou transformujeme obrazec první, následujícím způsobem:

Obr. 13.



Budiž zase (obr. 13.) k_1 daná kružnice, b_1a její průměr a ad její tetiva, jež svírá s tímto průměrem úhel α; veďme v bodech a a b_1 tečny a bodem d rovnoběžnou sečnu. Transformujme obrazec ten pomocí centrálné kollineace, jejíž osa jest tetiva ad a jejíž střed c jest *libovolný* bod průměru b_1a, a jejíž úběžná přímka F jest libovolná rovnoběžka ku ad.

Vedeme-li bodem c rovnoběžku k daným tečnám, jest její průsečík f s úběžnou přímkou průsečík transformovaných tečen. Vedeme-li dále bodem c kolmici $c\varphi$ k úběžné přímce, jest patrně průsečík b přímky $d\varphi$ s přímkou cb_1 transformace bodu b_1; transformuje se tudíž daná kružnice v kuželosečku k určenou tečnami fa, fb s body dotyku a, b jakož i bodem d. Budiž dále P_1 libovolná trasversála P, jež protíná tečny ad v bodě o, svírá s ní úhel ω_1 a protíná tečny v bodech a, b jakož i rovnoběžnou sečnu bodem d v bodech x_1, y_1, z_1. Veďme bodem c rovnoběžku cm ku P_1; pak jest om transformovaná transversála P, jež protíná tečny a sečnu kuželosečky v bodech x, y, z a svírá s tetivou ad úhel ω. Označme ϱ úhel tetivy ad s tečnou fb, dále μ, ν úhly tečen fa, fb se sečnou fd a konečně $\varphi = \mu + \nu$; pak následuje z obrazce po několika redukcích:

$$\frac{ox_1}{ox} = \frac{cm}{xm} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha - \omega_1)} \cdot \frac{\sin(\mu + \nu + \varrho + \omega)}{\sin(\mu + \nu + \varrho)}$$

$$\frac{oy_1}{oy} = \frac{cm}{ym} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha - \omega_1)} \cdot \frac{\sin(\varrho + \omega)}{\sin\varrho}$$

$$\frac{oz_1}{oz} = \frac{cm}{zm} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha - \omega_1)} \cdot \frac{\sin(\nu + \varrho + \omega)}{\sin(\nu + \varrho)} .$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do relace Hamiltonovy (1), obdržíme, krátivše:

$$\begin{aligned}(102) \qquad oz = {} & ox \cdot \frac{\sin(\nu + \varrho)\sin(\varphi + \varrho + \omega)}{\sin(\nu + \varrho + \omega)\sin(\varphi + \varrho)} \cdot \sin^2\alpha \\ & + oy \cdot \frac{\sin(\nu + \varrho)\sin(\varrho + \omega)}{\sin(\nu + \varrho + \omega)\sin\varrho} \cdot \cos^2\alpha .\end{aligned}$$

Relace ta platí ovšem prozatím, nalézá-li se o na tetivě ad; vedeme-li však transversálu of, obdržíme:

$$
(103)\quad
\begin{aligned}
1 &= \frac{\sin(\nu+\varrho)\sin(\varphi+\varrho+\omega)}{\sin(\nu+\varrho+\omega)\sin(\varphi+\varrho)}\,.\sin^2\alpha \\
&+ \frac{\sin(\nu+\varrho)\sin(\varrho+\omega)}{\sin(\nu+\varrho+\omega)\sin\varrho}\,.\cos^2\alpha.
\end{aligned}
$$

Pomocí této relace dá se, jako dříve, dokázati, že (102) platí pro libovolný bod o příčky P.

Z relace (103) následuje zase, že úhel α jest funkcí ostatních úhlů:

$$
\sin^2\alpha = \frac{\sin(\varphi+\varrho)\sin\nu}{\sin(\nu+\varrho)\sin\varphi},\quad \cos^2\alpha = \frac{\sin\varrho\,.\sin(\varphi-\nu)}{\sin(\nu+\varrho)\sin\varphi}.
$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (102), obdržíme:

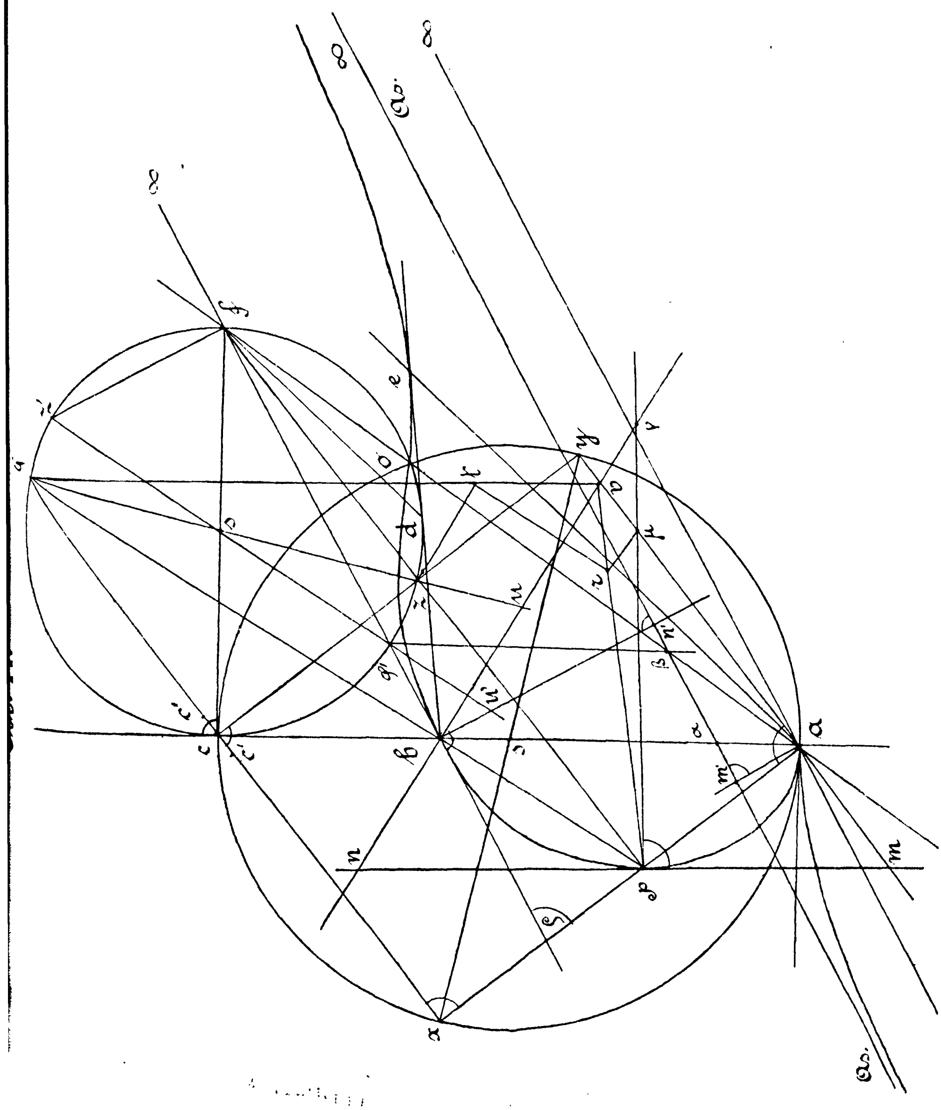
$$
(104)\quad
\begin{aligned}
oz &= ox\,.\,\frac{\sin(\varphi+\varrho+\omega)\sin\nu}{\sin(\nu+\varrho+\omega)\sin\varphi} \\
&+ oy\,.\,\frac{\sin(\varrho+\omega)\sin(\varphi-\nu)}{\sin(\nu+\varrho+\omega)\sin\varphi}.
\end{aligned}
$$

Tato velice všeobecná rovnice platí též patrně pro *libovolný trojúhelník aef*, jehož úhel při vrcholu f jest φ a jehož rameno fe tvoří se základnou ae úhel ϱ, vedeme-li tím vrcholem příčku fd, jež svírá s ramenem fe úhel ν a konečně libovolnou transversálu P, jež svírá se základnou trojúhelníka úhel ω, protíná ramena fa, fb a příčku fd v bodech x, y, z a sice jest v platnosti tato relace pro libovolný bod o příčky P.

Relace ta jest patrně zase bohatým zdrojem metrických vlastností trojúhelníků, jež bychom zase obdrželi pro různé hodnoty v rovnici oné se vyskytujících úhlů a pro různé polohy transversály P jakož i pro různé polohy bodu o na této transversále.

Pomíjejíce těchto speciálních případů, vraťme se zase ke kollineárné kuželosečce k, určené tečnami fa, fb s body dotyku a, b jakož i bodem d; jelikož jest α funkcí ostatních úhlů, jest patrno, že nepanuje vztah (102) neb (104) všeobecně. Vhodnou volbou kollineačního středu c a úběžné přímky F, můžeme obdržeti co kollineárnou libovolnou kuželosečku a na ní libovolný bod; avšak f má k ní pak zvláštní polohu.

Místo abychom vyhledali geometrické místo bodů f, pro



které platí relace (102) neb (104), což by se stalo podobně jako v obou předcházejících případech, můžeme, k vůli změně pohlížeti též na věc s následujícího stanoviska:

Buďtež (obr. 14.) fa, fb tečny kuželosečky s body dotyku a, b; tím jest stanoven svazek podvojně se dotýkajících kuželoseček; pro každou kuželosečku tohoto svazku se dá vyhledati jediný bod p, pro nějž mají platnost zmíněné relace.

Úlohou jest vyhledati geometrické místo těchto bodů; podobnou úlohu jsme mohli ovšem též řešiti v obou předcházejících případech.

Vedeme-li bodem a libovolnou tetivu ap jakožto osu kollineace a bodem f rovnoběžnou úběžnou přímku $f\varphi$, jakož i kolmici fc na poláru ab bodu f a konečně středem kollineace c kolmici $c\varphi$ na úběžnou přímku $f\varphi$; pak protíná přímka φb onu tetivu v žádaném bodě p. Místo bodů φ jest kružnice na průměru fc. Svazek paprsků $f(\varphi\ldots)$ jest shodný se svazkem $a(p\ldots)$ jakož i se svazkem $c(\varphi\ldots)$. Každému paprsku svazku a přísluší tedy jediný paprsek svazku b; svazky $a(p\ldots)$, $b(p\ldots)$ vytvořují hledanou křivku, jejíž rovnici lze snadno určiti následujícím způsobem:

Označme:

$$ab = n, \quad ac = m, \quad cf = 2r$$

a volme ac za osu úseček X, bod a za počátek; pak jest, označuje-li λ trig. tangentu úhlu, jejž svírá *přímka ap* s osou ac, rovnice přímky ap

$$(\alpha) \qquad y = \lambda x,$$

kdežto rovnice přímky $f\varphi$ jest

$$(\beta) \qquad y + 2r = \lambda(x - m),$$

a rovnice přímky $c\varphi$:

$$(\gamma) \qquad y = -\frac{1}{\lambda}(x - m).$$

Má tedy průsečík φ následující koordinaty:

$$y_1 = -\frac{2r}{1+\lambda}, \quad x_1 = \frac{m\lambda^2 + 2r\lambda + m}{1+\lambda^2},$$

a jest tedy rovnice přímky $b\varphi = bp$

$$(\delta) \qquad \frac{y}{y + \frac{2r}{1+\lambda^2}} = \frac{x - n}{x - \frac{m\lambda^2 + 2r\lambda + m}{1+\lambda^2}}.$$

Eliminujeme-li z rovnic (α) a (δ) veličinu λ, obdržíme rovnici hledané křivky

$$2rx^3 + (m - n)\,x^2y + 2rxy^2 + (m - n)\,y^3 = 2nrx^2.$$

Jest tedy hledaná křivka třetího stupně, což by se dalo též ukázati ryze geometricky.

Tato křivka má v bodě a zvratný bod, prochází bodem b, dotýkajíc se zde přímky bf. Křivka prochází též průsečíkem přímky af s kružnicí na průměru cf, tvoříc zde obratník. Další bod této křivky obdržíme, vedeme-li bodem b tečnu bd ke kružnici o průměru cf a bodem a rovnoběžku ae ku přímce fd; průsečík e těchto dvou přímek jest bod křivky a be jest jeho tečna. Přímka bf udává směr asymptoty křivky.

Určeme na základě kinematických úvah normálu a tečnu v onom libovolném bodě p a pak zejmena asymptotu, což vede ke konstrukcím velmi jednoduchým a zajímavým.

Především uvažme, že průsečík x paprsků ap, φc naplňuje kružnici na průměru ac.

Trojúhelník φxp, jehož strany i úhly jsou proměnlivé, opisuje-li p žádanou křivku, mění však svůj tvar a velikost tak, že jeho strany procházejí stále třemi pevnými body a že mimo to dva jeho vrcholy φ a x opisují určité kružnice. Podmínky tyto stačí, abychom vyhledali normálu ku křivce, kterou opisuje třetí vrchol p.

Veďme bodem c kolmici φx a poloměry bodů x a φ, jež protínají tuto kolmici v bodech y a z. Otočíme-li cx kolem okamžitého středu y o úhel $d\Theta$, opíše x na své kružnici dráhu $dx = xy d\Theta$; současně se však otočí $c\varphi$ o týž úhel $d\Theta$ a otočení toto lze vykonati též kolem okamžitého středu z, takže φ vykoná na své kružnici dráhu $d\varphi = \varphi z \,.\, d\Theta$.

Máme tedy pro poměr vykonaných drah rovnici

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{d\varphi} = \frac{xy}{\varphi z}.$$

Poznámka. Jelikož musíme předpokládati o úsečkách xc, $c\varphi$, že jsou tuhé a tedy nepromĕnné délky, zapadne bod c při otáčení kolem okamžitého středu y, nebéřeme-li zřetele na nekonečně malé veličiny vyššího stupně, do nekonečně blízké polohy c' na $x\varphi$, a rovněž tak zapadne bod c při otáčení kolem okamžitého středu z do polohy c'' na $x\varphi$, takže

$$c'c'' = (cy \pm cz)\, d\Theta$$

znamená prodloužení neb zkrácení přímky $x\varphi$, přejde-li do soumezné polohy.

Kolmice v bodech a, c ku stranám trojúhelníka ax, cx protínají průměr bodu x v témže bodě y, kolmice v bodě b ku $p\varphi$ protínejž průměr bodu φ v bodě u. Hledaná normála v bodě p protínejž kolmice v bodech a, b vztyčené ku stranám ax, bp, v bodech μ, ν; pak můžeme psáti, podobně jako (α), následující rovnice:

$$(\beta) \qquad \frac{d\varphi}{dp} = \frac{\varphi u}{p\nu},$$

$$(\gamma) \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{p\mu}{xy}.$$

Násobením těchto tří rovnic (α), (β), (γ), obdržíme podmínečnou rovnici pro normálu v bodě p:

$$(\delta) \qquad \frac{p\mu}{p\nu} = \frac{\varphi z}{\varphi u}.$$

Na základě rovnice (δ) vyhledáme bod μ pomocí následujících *lineárních konstrukcí:*

Budiž v průsečík kolmice ay s kolmicí bu; veďme zt rovnoběžně ku bv, až protíná φv v bodě t; veďme dále tr rovnoběžně ku φp, až protíná pv v bodě r; konečně veďme $r\mu$ rovnoběžně ku bv, až protíná ay v bodě μ; pak jest $p\mu$ žádaná normála, jež protíná bv v bodě ν.

Skutečně jest pak

$$\frac{\varphi z}{\varphi u} = \frac{\varphi t}{\varphi v} = \frac{pr}{rv} = \frac{p\mu}{p\nu}.$$

Zapadne-li p do nekonečna, stanou se hořejší výrazy neurčitými. Vedeme-li však v bodě p tečnu, jež protíná kolmice $a\mu$, $b\nu$ v bodech m, n, obdržíme z pravoúhlých trojúhelníků $\mu pa \sim mpa$:

$$p\mu = \frac{pa \,.\, pm}{am}$$

a rovněž tak z pravoúhlých trojúhelníků $p\nu b \sim pbn$:

$$p\nu = \frac{pb \,.\, pn}{nb} \,.$$

Rovnice (δ) se dá tedy přetvořit v následující:

$$(\varepsilon) \qquad \frac{p\mu}{p\nu} = \frac{pa \,.\, pm \,.\, bn}{pb \,.\, pn \,.\, am} \,.$$

Zapadne-li p do nekonečna, jest

$$\lim \frac{p\mu}{p\nu} = \lim \frac{bn}{am} = \frac{bn'}{am'} \,.$$

Jak již bylo zmíněno, jest nekonečně vzdálený bod vyšetřované křivky průsečík přímky bf a rovnoběžné přímky vedené bodem a. V tomto případě zapadne φ do průsečíku φ' přímky bf a kružnice na průměru cf; bod z zapadne do bodu z' jenž jest diametrálním k bodu φ'; bod u zapadne do průsečíku u' přímky $\varphi' z'$ a kolmice bodem b ku $b\varphi'$. Jest tedy pro asymptotu v platnosti rovnice

$$\lim \frac{bn}{am} = \frac{bn'}{am'}, = \frac{\varphi' z'}{\varphi' u'} \,.$$

Poněvadž jsou však přímky $a\,\infty$, $b\,\infty$ rovnoběžné, jsou tedy též kolmice k nim mezi sebou rovnoběžné, a průsečík α asymptoty s přímkou ab musí tuto děliti v témže poměru $am' : bn'$.

Vedeme-li tedy bodem φ' rovnoběžku $\varphi'\beta$ ku ab, jež protíná af v bodě β, jest β bodem hledané asymptoty, kterou obdržíme, vedeme-li bodem β rovnoběžku $\beta\alpha$ ku bf.

Skutečně jest pak

$$\frac{\varphi' z'}{\varphi' u'} = \frac{\varphi' f}{\varphi' b} = \frac{f\beta}{\beta a} = \frac{b\alpha}{a\alpha} = \frac{bm'}{an'} \,.$$

Po této odchylce od vlastního thema rekapitulujme docílené výsledky.

Tečnami fa, fb (obr. 14.) s body dotyku a, b jest stanoven svazek kuželoseček, jež se vesměs vzájemně dotýkají v bodech a, b, a každým bodem p vyhledané křivky třetího stupně jest určena jediná kuželosečka onoho svazku. Je-li φ úhel tečen fa, fb, a svírá-li sečna pf této kuželosečky s tečnami fa úhly μ, ν; svírá-li dále tetiva ap s tečnou fb úhel ϱ, s polárou ab však úhel α; vedeme-li konečně libovolnou transversálu P, jež svírá s tetivou ap úhel ω a protíná tečny fa, fb jakož i sečnu fp v bodech x, y, z, jest pak pro libovolný bod o této transversály v platnosti buď relace

$$(102)\quad \begin{aligned} oz &= ox \cdot \frac{\sin(\nu+\varrho)\sin(\varphi+\varrho+\omega)}{\sin(\nu+\varrho+\omega)\cdot\sin(\varphi+\varrho)}\cdot\sin^2\alpha \\ &+ oy\cdot\frac{\sin(\nu+\varrho)\sin(\varrho+\omega)}{\sin(\nu+\varrho+\omega)\sin\varrho}\cdot\cos^2\alpha \end{aligned}$$

aneb též relace

$$(104)\quad \begin{aligned} oz &= ox \cdot \frac{\sin(\varphi+\varrho+\omega)\sin\nu}{\sin(\nu+\varrho+\omega)\sin\varphi} \\ &+ oy\cdot\frac{\sin(\varrho+\omega)\sin(\varphi-\nu)}{\sin(\nu+\varrho+\omega)\sin\varphi}\,. \end{aligned}$$

Z relací těch bychom zase obdrželi mnohé podrobnější vztahy, kdybychom dali zvláštní hodnoty úhlům v relacích oněch se vyskytujících, jakož i zvláštní polohy transversále P a na ní bodu o.

Zvláštně nutno vytknouti onen případ, že transversála P jest rovnoběžná k tetivě ap, aneb že s ní splývá; pak jest $\omega = o$ a relace (102) přejde ihned v *jednoduchou relaci Hamiltonovu.*

Je-li naopak dána libovolná transversála T, existuje v onom svazku podvojně se dotýkajících kuželoseček jen jediná, vzhledem ku které platí jednoduchá Hamiltonova relace, totiž kuželosečka určená průsečíkem p tetivy ap rovnoběžné k transversále T s onou křivkou třetího stupně.