Gustav Gruss

O větě Lambertově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 3, 161--165

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121865`

O větě Lambertově.

Napsal dr. **Gustav Gruss.**

Jsou-li pro tři pozorovací doby t, t', t'' geocentrické délky tělesa nebeského λ, λ', λ'', jeho geocentrické šířky β, β', β'', délky země L, L$'$, L$''$, radie vektory (průvodiči) Země R, R$'$, R$''$, platí pro dobu t', označí-li se vzdálenost planety od Země $\varDelta'$, rovnice:

$$
\text{(I)} \quad \varDelta' \frac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\cos\beta_0 \operatorname{tg} J} = R' \sin(L' - K) - n R \sin(L - K) - n'' R'' \sin(L'' - K),
$$

kdež K jest délkou výstupného uzlu největšího kruhu proloženého prvním (λ, β) a třetím (λ'', β'') geocentrickým místem tělesa, J pak sklonem kruhu toho. Jest tedy:

$$
(1) \quad \begin{aligned} \sin(\lambda - K) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg}\beta, \\ \sin(\lambda'' - K) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg}\beta''. \end{aligned}
$$

β_0 jest šířkou průseku šířkového kruhu prostředního místa s největším kruhem určeným rovnicemi (1). β_0 vyhovuje proto rovnici:

$$
(2) \quad \sin(\lambda' - K) \operatorname{tg} J = \operatorname{tg}\beta_0.
$$

Hodnoty n a n'' značí *poměry* ploch trojúhelníků a to n poměr plochy trojúhelníka mezi průvodiči r' a r'' ku ploše trojúhelníka mezi průvodiči r a r''; n'' jest pak obdobně poměr plochy trojúhelníka mezi r a r' ku ploše trojúhelníka mezi průvodiči r a r''. Označí-li se plochy trojúhelníků symbolem $(r^i r^k)$, bude

$$
n = \frac{(r'r'')}{(rr'')}, \qquad n'' = \frac{(rr')}{(rr'')}.
$$

Zavedou-li se za doby pozorovací násobené Gaussovou konstantou k ($\log k = 8{\cdot}2355814$) hodnoty Θ, bude

$$kt = \Theta, \qquad kt' = \Theta', \qquad kt'' = \Theta''.$$

Mezidoby násobené konstantou k budou:

$$\Theta' - \Theta = \tau'', \qquad \Theta'' - \Theta' = \tau, \qquad \Theta'' - \Theta = \tau', \qquad (\tau'' + \tau = \tau').$$

Veličiny n a n'' jsou:

$$(3) \qquad \begin{aligned} n &= \frac{\tau}{\tau'}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau'^2 - \tau^2}{r'^3} + \ldots\right) \\ n'' &= \frac{\tau''}{\tau'}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau'^2 - \tau''^2}{r'^3} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Zavedou-li se místo délek Země *délky Slunce* a označí-li se

$$(4) \qquad \begin{aligned} R \sin(L - K) &= A, \\ -R' \sin(L' - K) &= B, \\ R'' \sin(L'' - K) &= C, \end{aligned}$$

lze psáti rovnici (I)

$$(\mathrm{I}') \qquad \Delta' \frac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\cos\beta_0 \operatorname{tg} J} = n A + B + n'' C.$$

Pro *Slunce* platí podobně rovnice

$$(\mathrm{II}) \qquad o = NA + B + N''C.$$

N a N″ jsou poměry ploch trojúhelníků

$$N = \frac{(R'R'')}{(RR'')}, \qquad N'' = \frac{(RR')}{(RR'')},$$

tudíž

$$(5) \qquad \begin{aligned} N &= \frac{\tau}{\tau'}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau'^2 - \tau^2}{R'^3} + \ldots\right) \\ N'' &= \frac{\tau''}{\tau'}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau'^2 - \tau''^2}{R'^3} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Odečte-li se rovnice (II) od rovnice (I′), dostane se

$$\Delta' \frac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\cos\beta_0 \operatorname{tg} J} = (n - N)\, A + (n'' - N'')\, C$$

aneb, zavedou-li se tu hodnoty (3) a (5)

$$\Delta' \frac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\cos\beta_0 \operatorname{tg} J} = \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{R'^3}\right)\frac{1}{6\tau'}[A\,\tau(\tau'^2 - \tau^2) + C\tau''(\tau'^2 - \tau''^2)]$$

Veličiny A a C se mohou rozvinouti dle mocností času, takže lze psáti

$$\begin{aligned} A &= B - \alpha\tau'' + \alpha'\tau''^2 + \ldots, \\ C &= B + \alpha\tau + \alpha'\tau^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Zanedbáním veličin řádu třetího malých mezidob najde se snadno

$$\Delta' \frac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\cos\beta_0 \operatorname{tg} J} = \frac{\tau\tau''}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{R'^3}\right) B$$

aneb

$$\Delta' \frac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\cos\beta_0 \operatorname{tg} J} = -\frac{\tau\tau''}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{R'^3}\right) R' \sin(L' - K),$$

když L′ značí *nyní délku Slunce.*

Značí-li se písmenem P′ sférická kolmice vedená ze středního místa Slunce (z L′) na největší kruh prvním a třetím místem tělesa proložený, bude

$$\sin(L' - K) = \frac{\sin P'}{\sin J}. \tag{6}$$

Tedy

$$\Delta' \frac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\cos\beta_0 \operatorname{tg} J} = -\frac{\tau\tau''}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{R'^3}\right)\frac{R' \sin P'}{\sin J}$$

aneb

$$\frac{\Delta'}{R'} = \frac{\tau\tau''}{2}\,\frac{\sin P'}{\sin(\beta' - \beta_0)}\,\frac{\cos\beta_0}{\cos J}\left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3}\right). \tag{A}$$

Z rovnice (A) jest patrno, že musí míti činitelé

$$\frac{\sin P'}{\sin(\beta' - \beta_0)}$$

a

$$\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3}$$

totéž znamení, ostatní veličiny jsou kladné.

Jest tedy

$$\frac{1}{R'^3}-\frac{1}{r'^3}$$

kladné, je-li $R' < r'$ a *záporné*, je-li $R' > r'$.

Sin P' a sin $(\beta' - \beta_0)$ musí míti proto znamení *stejná*, je-li $R' < r'$ a znamení *opáčná*, je-li $R' > r'$.

Největší kruh proložený prvním a třetím místem tělesa dělí kouli nebeskou ve dvě hemisfery; mají-li sin P' a sin $(\beta' - \beta_0)$ znamení opačná, leží druhé místo tělesa a příslušné místo Slunce v *různých* hemisferách; mají-li sin P' a sin $(\beta' - \beta_0)$ znamení stejná, leží druhé místo tělesa a příslušné místo Slunce v *týchž* hemisferách. V případě prvém jest $R' > r'$ a geocentrická dráha tělesa mezi prvním a třetím místem jest vzhledem k místu Slunce *konkavní*; v případě druhém jest $R' < r'$ a geocentrická dráha tělesa jest *konvexní*. Tím jest dokázána slavná věta *Lambertova* o zakřivení geocentrické dráhy tělesa.

Je-li konečně $R' = r'$, musí $\sin(\beta' - \beta_0) = 0$ čili $\beta' = \beta_0$, t. j. těleso se musí pohybovati v *největším kruhu*. Naopak musí pro $\beta' = \beta_0$, t. j. pohybuje-li se těleso v největším kruhu, býti velmi přibližně $R' = r'$. Velmi přibližně pravíme, poněvadž při odvození vzorce (A) se zanedbaly malé veličiny řádů vyšších, vzorec (A) jest jen velmi přibližným. Jestli se nalézá druhé místo Slunce na největším kruhu, v němž se těleso pohybuje, jest P' rovno nulle a poněvadž $\beta' = \beta_0$, zdálo by se, že pro případ ten nemusí $R' = r'$. Rovnice (6) dává $L' = K$ a druhá rovnice soustavy (4) $B = 0$. Rovnice (I') jest pro $\beta' = \beta_0$ a $B = 0$

$$nA + n''C = 0 \text{ aneb } \frac{n}{n''}A + C = 0;$$

obdobně jest

$$\frac{N}{N''}A + C = 0,$$

odečtením obou těchto rovnic obdrží se

$$\left(\frac{n}{n''} - \frac{N}{N''}\right)A = 0 \qquad \text{aneb} \qquad \frac{n}{n''} - \frac{N}{N''} = 0.$$

Jest pak

$$\frac{n}{n''}=\frac{\tau}{\tau''}\left(1-\frac{1}{6}\frac{\tau^2-\tau''^2}{r'^3}+\ldots\right)$$

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}''}=\frac{\tau}{\tau''}\left(1-\frac{1}{6}\frac{\tau^2-\tau''^2}{\mathrm{R}'^3}+\ldots\right)$$

a tudíž

$$\frac{n}{n''}-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}''}=\frac{1}{6}(\tau^2-\tau''^2)\left(\frac{1}{\mathrm{R}'^3}-\frac{1}{r'^3}\right)+\ldots=0.$$

Rovnice tato ukazuje, že jest velmi přibližně $\mathrm{R}'=r'$. Máme tedy větu: *Pohybuje-li se těleso nebeské geocentricky v největším kruhu, jest jeho vzdálenost od Slunce velmi přibližně rovna vzdálenosti Země od Slunce.* A naopak: *Je-li vzdálenost tělesa od Slunce rovna vzdálenosti Země od Slunce, pohybuje se těleso geocentricky v největším kruhu.*

Věta tato jest doplňkem věty Lambertovy. Na poměry ty upozornil hlavně *E. Weiss* ve Vídni v pojednání: „Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen“.

Je-li $r>\mathrm{R}$, pozná se okamžitě ihned pomocí trojúhelníku rovinného mezi sluncem (S), Zemí (Z) a Tělesem (P). Je-li úhel χ mezi směrem k Tělesu a prodlouženým směrem k SZ u Země Z *menším* než 90°, jest patrně $r>\mathrm{R}$; úhel χ jest určen rovnicí:

$$\cos\chi=-\cos\beta\cos(\lambda-\Theta),$$

kdež β jest geocentrická šířka, λ geocentrická délka tělesa a Θ jest délkou Slunce. Je-li $\cos(\lambda-\Theta)$ záporným, tedy $\lambda-\Theta>90°$, musí $r>\mathrm{R}$.

O metrických relacích transversál.

Napsal

Miloslav Pelíšek,
professor v Praze.

(Dokončení.)

Vedeme-li příčku, jež uzavírá s přeponou pravoúhlého trojúhelníka úhel 45°, a protíná odvěsny a výšku v bodech x, y, z, platí pro její libovolný bod o