František Josef Studnička

O řadách součtových vůbec a čísel obrazcových zvlášť

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 1, 40--46

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121791

Oba kruhy protínají se ve dvou bodech (v obr. 7. byl by bod D jedním z nich, kdyby kruh BC náležel k bodu A_1 místo k A, $B'C'$ pak k bodu A_4 co polu), jež leží na rozhraní všech sektorů. V těchto bodech vidí pozorovatel začátek úkazu právě při východu slunce a konec při západu, aneb naopak; odchýlí-li se však ve směru některého z oněch sektorů, vidí již jen začátek neb jen konec aneb celý úkaz aneb nevidí docela ničeho.

Pro letošní rok leží body ty, jeden v Sibíři severně od jezera Baikalského, druhý u ostrovů Shetlandských jižně od Ameriky.

(Pokračování.)

O řadách součtových vůbec a číslech obrazcových zvlášť.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Úvod.

Jak jde na jevo z historického přehledu, který byl položen na první místo sešitu tohoto, zanášeli se již od nejstarších dob rozliční počtářové s řadami čísel zvláštními vlastnostmi vynikajících a zejména škola pythagorská vyznamenala se nemálo svou dovedností na tomto poli mathematickém.

A od té doby stala se tak zvaná *čísla obrazcová* neb *figurovaná* předmětem rozmanitých úvah i theoretických i praktických, ač důležitost těchto badání v rozličných dobách rozličně byla posuzována a ceněna.

Nelze sice upříti, že prováděno bylo v oboru tomto mnoho hříček neplodných, ale nesmí též žádný tohoto předmětu znalec tvrditi, že by zbytečným bylo všeliké uvažování zajímavých vlastností, kterými se čísla obrazcová honosí. A byť i neměla ani atomistika míti nějakého užitku z výzkumů sem připadajících, tož aspoň pobaví se jimi duch přesnějšími studiemi unavený a posilní se na další badání větší bystrosti a vytrvalosti vyžadující.

Poněvadž v našich učebních knihách se buď nečiní ani zmínky o těchto jindy tak oblíbených číslech aneb jen povrchně se k nim poukazuje, odhodlal jsem se krátce o nich tuto pojednati, aby každý dostatečného ponětí nabyl o tom, co jsou čísla obrazcová a jak s jinými řadami čísel souvisí.

I. O řadách součtových.

Ustanovíme-li pro řadu číselných veličin

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \; \ldots, \; a_n, \tag{1}$$

novou řadu $\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \ldots, \Delta a_n,$ (2)

„ „ $\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \Delta^2 a_3, \ldots, \Delta^2 a_n,$ (3)

.
.
.

„ „ $\Delta^k a_1, \Delta^k a_2, \Delta^k a_3, \ldots, \Delta^k a_n,$ (4)

tak, že tu pro libovolné i a k, vzaté z řady čísel 1, 2, 3, ..., všeobecně platí

$$\Delta^{i+1} a_k = \Delta^i a_{k+1} - \Delta^i a_k$$

a platí-li zároveň podmínka, že pro určitou hodnotu m pak jest všeobecně

$$\Delta^m a_k = a,$$

kdež značí a veličinu stálou, představuje nám

(1) arithmetickou řadu stupně m-tého
(2) „ „ „ $(m-1)$-ho
(3) „ „ „ $(m-2)$ „
.
.
.
(4) „ „ „ $(m-k)$ „

Řady (2), (3), ..., (4) nazýváme *rozdílovými* řadami, jelikož se v nich vyskytují rozdíly sousedních dvou členů řady předcházející; všeobecně pak o nich platí, jak známo,*)

---

*) Viz „Třetí zpráva jednoty českých mathematiků" pag. 58 a 60, vzorec (10) a (17).

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta a_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{m}\Delta^m a_1, \quad (5)$$

$$\Sigma a_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{2}{2}\Delta a_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{m+1}\Delta^m a_1, \quad (6)$$

Jako byly řady (2), (3) ... odvozeny z řady (1) *odečítáním*, možná vyvésti *sečítáním* z téže řady

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, \quad a_n \qquad (7)$$

novou řadu $\Sigma a_1, \Sigma a_2, \Sigma a_3, \ldots, \Sigma a_n$ (8)

„ „ $\Sigma^2 a_1, \Sigma^2 a_2, \Sigma^2 a_3, \ldots, \Sigma^2 a_n$ (9)

.
.
.

„ „ $\Sigma^k a_1, \Sigma^k a_2, \Sigma^k a_3, \ldots, \Sigma^k a_n,$ (10)

značí-li tu všeobecně pro celistvé k a i

$$\Sigma^{i+1} a_k = \Sigma^i a_1 + \Sigma^i a_2 + \ldots + \Sigma^i a_k. \qquad (11)$$

A tu představuje nám opět

(7) arithmetickou řadu stupně m-tého

(8) „ „ „ $(m+1)$-ho

(9) „ „ „ $(m+2)$ „

.
.
.

(10) „ „ „ $(m+k)$ „

Řady tyto, jež možná, jak patrno, až do nekonečna sledovati, nazýváme *součtovými* řadami, jelikož se v nich vyskytují součty členů řady předcházející; všeobecně pak o nich platí pravidla vzorcem (5) a (6) vyjádřená, mimo to však zvláštní pravidlo, podle něhož byly sestaveny, že n-tý *člen řady* k-té *jest součet* n *členů řady* (k—1)-ní.

Abychom určili kterýkoli člen sloupce posledního, kterýž podle pravidla právě vytknutého představuje s jedné strany n-tý člen řady, v níž stojí, s druhé pak strany součet n členů řady předcházející, musíme znáti jednu vlastnost binomických koefficientů, kteráž se odůvodní snadno takto:

Ze známé stejniny

$$\binom{m+n}{m+1} = \binom{m+n-1}{m+1} + \binom{m+n-1}{m}$$

jde dále $\binom{m+n-1}{m+1} = \binom{m+n-2}{m+1} + \binom{m+n-2}{m}$

" " $\binom{m+n-2}{m+1} = \binom{m+n-3}{m+1} + \binom{m+n-3}{m}$

$\vdots \qquad \vdots$

" " $\binom{m+3}{m+1} = \binom{m+2}{m+1} + \binom{m+2}{m}$

" " $\binom{m+2}{m+1} = \binom{m+1}{m+1} + \binom{m+1}{m}$

a konečně $\binom{m+1}{m+1} = \binom{m}{m}$,

takže sečteme-li na obou stranách a zkrátíme-li, snadno obdržíme vzorec hledanou vlastnost vyjadřující

$$\binom{m+n}{m+1} = \binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-2}{m} + \ldots + \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{m} \tag{12}$$

Abychom určili součty jednotlivých řad součtových, použijme především opětně vzorce (6) a sice pro $n = n$, $n-1$, $n-2, \ldots, 3, 2, 1$; obdržíme tu řadu stejnin

$$\Sigma a_n \;\; = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots$$
$$\Sigma a_{n-1} = \binom{n-1}{1} a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta a_1 + \binom{n-1}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots$$
$$\Sigma a_{n-2} = \binom{n-2}{1} a_1 + \binom{n-2}{2} \Delta a_1 + \binom{n-2}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots$$
$$\vdots$$
$$\Sigma a_2 \;\; = \binom{2}{1} a_1 + \binom{2}{2} \Delta a_1$$
$$\Sigma a_1 \;\; = \binom{1}{1} a_1$$

a tudíž sečteme-li na obou stranách, majíce zřetel k vzorci (11) a (12) pro $m = 1$,

$$\Sigma^2 a_n = \binom{n+1}{2} a_1 + \binom{n+1}{3} \Delta a_1 + \binom{n+1}{4} \Delta^2 a_1 + \ldots \tag{13}$$

Podobným spůsobem obdrželi bychom dále

$$\Sigma^3 a_n = \binom{n+2}{3} a_1 + \binom{n+2}{4} \Delta a_1 + \binom{n+2}{5} \Delta^2 a_1 + \ldots \quad (14)$$

$$\Sigma^4 a_n = \binom{n+3}{4} a_1 + \binom{n+3}{5} \Delta a_1 + \binom{n+3}{6} \Delta^2 a_1 + \ldots \quad (15)$$

$$\vdots$$

$$\Sigma^{m+1} a_n = \binom{n+m}{m+1} a_1 + \binom{n+m}{m+2} \Delta a_1 + \binom{n+m}{m+3} \Delta^2 a_1 + \ldots \quad (16)$$

Podle těchto vzorců možná tudíž ustanoviti pro kteroukoli řadu součtovou i člen všeobecný i součet n-členů.

V této všeobecnosti, jak tu byly vytknuty, nemají však řady tyto zvláštního významu pro mathematické výzkumy druhu jiného, nýbrž poskytují jen samy o sobě co případ možný jakési formální zajímavosti.

Teprv ve zvláštních případech, o nichž tuto chceme pojednati, nabývají důležitosti i theoretické i praktické, jakž brzy poznáme.

II. O číslech obrazcových vůbec.

Nejjednodušší případ, jaký poskytují řady součtové, určuje podmínka

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 1,$$

takže zároveň tu platí pro každou hodnotu přípony k

$$\Delta a_k = \Delta^2 a_k = \Delta^3 a_k = \ldots = \Delta^n a_k = 0;$$

pro tento případ jest pak ze vzorců (6), (13), (14)...

$$\Sigma a_n = \binom{n}{1}$$

$$\Sigma^2 a_n = \binom{n+1}{2}$$

$$\Sigma^3 a_n = \binom{n+2}{3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

všeobecně

$$\Sigma^{m+1} a_n = \binom{n+m}{m+1}. \quad (17)$$

A jelikož tu zároveň podlé všeobecného pravidla dříve vytknutého jest

$$\Sigma^{m+1} a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{m} = \sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{k-1}$$

platí pro tento případ všeobecně

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{m} = \sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{k-1} = \binom{n+m}{m+1} = \binom{m+n}{n-1}. \quad (18)$$

Společný tvar těchto řad součtových jest tudíž pro $k = 1, 2, 3, \ldots n$,

$$\binom{m}{0}, \binom{m+1}{1}, \binom{m+2}{2}, \ldots, \binom{m+n-1}{n-1}:$$

a čísla těchto řad zvláštních slují *čísla obrazcová* neb *figurovaná řádu* m-tého. Podle toho značí na př. číslo

$$p = \binom{i+k}{k}$$

$(k+1)$-ní číslo obrazcové řádu i-tého, číslo

$$q = \binom{8}{3} = \binom{5+3}{3}$$

čtvrté číslo obrazové řádu pátého.

Chceme-li rozličné řady čísel obrazcových si zjednati, použijme vzorce (18), kterýž obsahuje i člen všeobecný i součet n-členů příslušných; obdržímeť tu snadno schema toto:

m	obrazcová čísla	n-tý člen	Součet n členů
0	1, 1, 1, 1,...	1	$\binom{n}{1}$
1	1, 2, 3, 4,...	$\binom{n}{1}$	$\binom{n+1}{2}$
2	1, 3, 6, 10,...	$\binom{n+1}{2}$	$\binom{n+2}{3}$
3	1, 4, 10, 20,...	$\binom{n+2}{3}$	$\binom{n+3}{4}$
4	1, 5, 15, 35,...	$\binom{n+3}{4}$	$\binom{n+4}{5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$1, \binom{i+1}{1}, \binom{i+2}{2} \ldots$	$\binom{i+n-1}{i}$	$\binom{i+n}{i+1}$

Řada první jest tu řadou základní, řada druhá obsahuje čísla *přímková* neb *lineární*, řada třetí čísla *třírohá* neb *trigonální*, řada čtvrtá čísla *čtyrstěnná* neb *tetraëdrická*, kdežto následující co čísla řádů vyšších nežli 3 nemají znázornění v prostoru tři jen rozměry poskytujícím. Zároveň tu jde na jevo, jak jednotlivá čísla obrazcová se sebou souvisí; jest tudíž všeobecně $(k+1)$-ní *číslo řádu* i-*tého složeno z* k-*tého čísla téhož řádu a* $(k+1)$-*ho čísla řádu* $(i-1)$-*ho*, což poznáváme i ze stejniny

$$\binom{i+k}{k} = \binom{i+[k-1]}{k-1} + \binom{[i-1]+k}{k}, \qquad (19)$$

což ostatně platí i o členech řad součtových, jakž snadno ze vzorce (11) lze vyvésti; neb píšeme-li tu $k-1$ za k a odečteme-li tuto novou rovnici od původní, obdržíme

$$\Sigma^{i+1} a_k - \Sigma^{i+1} a_{k-1} = \Sigma^i a_k, \qquad (20)$$

což se shoduje se vzorcem (19).

Zároveň tu poznáváme ze stejniny

$$(i+1)\binom{n+i}{i+1} = n\binom{n+i}{i},$$

že každé číslo n, znásobené s nějakým číslem obrazcovým $\binom{n+i}{i}$, rovná se součinu sousedního vyššího čísla obrazcového $\binom{n+i}{i+1}$ s příslušným číslem řadovým $i+1$, vlastnost to čísel všeobecnou, již *Fermat* první objevil.*)

(Dokončení.)

*) S jakousi chloubou píše v poznámkách k Diofantovi, v knize o polygonálních číslech. prop. IX. „Propositionem pulcherrimam et mirabilem *quam nos invenimus* hoc in loco sine demonstratione apponemus. In progressione naturali quæ ab unitate sumit exordium quilibet numerus in proxime majorem facit duplum sui trianguli, in triangulum proxime majoris facit triplum suæ pyramidis, in pyramidem proxime majoris facit quadruplum sui triangulo-trianguli, et sic uniformi et generali in infinitum methodo. Nec existimo pulchrius aut generalius in numeris posse dari theorema cujus demonstrationem margini inserere nec curat nec vacat.“