

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Vavřinec

Psychologie základních výkonů početních a počátků algebry

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 2, D21--D33

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121752>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1935

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

geometrii neeuklidovskou a polydimenzionální. Je nesporné a třeba to uznati, že vysoká úroveň vědecká po této stránce čestně obhajuje naše jméno v ušlechtilém zápase mezinárodním; pravdou ale též je, že ve jménu vědy se opomíjí bližší kontakt s nižším stupněm školským.

Je též těžko říci, že by celá středoškolská planimetrie byla jen pouhou snůškou vět a pouček bez systému. Systém tu přece jen je — stará soustava Euklidova, speciální případ neeuklidovské geometrie parabolické.

Nesmí se zapomínat na to, že vyučování geometrii má vedle svého úkolu logicky výchovného též úkol ryze praktický — příprava pro techniky, konstruktéry! Mohlo by se stejně říci, že i geometrie aplikovaná ve velké řadě přednášek na technice a v technické praxi vůbec je už zastaralá, poněvadž nepřihlíží k moderním metodám geometrie vědecké. Tyto dvě skupiny geometrií zůstanou ještě na dlouho (asi navždy) od sebe odděleny.

A právě k těm aplikacím geometrickým by se měla střední škola (hlavně reálka) více přikloniti. Je přece známo, že už na střední škole by se dala provést řada speciálních geom. příkladů, k nimž se na technice dospívá po dlouhých výkladech technicko-teoretických (na př. ze staveb. mechaniky parabola momentů ohybu při rovnoměrně zatíženém trámu). To by bylo vhodné pojitko střední školy s technikou — třebaže v rámci geometrie metrické.

Rovněž deskr. geometrie — nejen planimetrie — by si měla více všimnat drobných užití praktických, jak bylo již na to upozorněno. Upozornil bych při této příležitosti, že by tu (v příslušném ovšem měřítku) měla být vzorem nová kniha Kadeřávek-Klíma-Kounovský: Deskriptivní geometrie svou vyrovnaností metodickou i ve výběru látky po stránce teoretické i praktické.

Psychologie základních výkonů početních a počátků algebry.

Josef Vavřinec, Plzeň.

(Rozšířené sdělení z II. sjezdu matematiků zemí slovanských v Praze, přednesené dne 26. září 1934.)

Čítáme úvahy o tom, jak lze cvičiti duševní schopnosti vyučováním počtů a algebry. Důležité však jest všimnouti si toho, že, máme-li nějakou schopnost cvičiti, musí tu napřed býti, musejí tu býti aspoň její počátky, na kterých bychom mohli stavěti a ji rozvíjeti. Jest nám uvažovati o tom, kolik můžeme na počátku od jednotlivých schopností chtíti, abychom duše žákovy nepře-

tížili a dotyčnou její schopnost tím, že ji svými požadavky přetříváme, v jejím rozvoji nezdrželi, ba dokonce, abychom nezpůsobili, že zakrní. Je tu však ještě druhá věc; přirozeně dnes už nikdo nebude chtít dosáhnouti jakéhokoli učebního výsledku dresurou, nedbaje porozumění žákovu. Chceme, aby žák tomu, čemu ho učíme, také rozuměl. Tu však nezapomínejme, že každé uvědomování podmínek a rozbor kteréhokoli výkonu vyžaduje určité duševní námahy. Proto musí naše snaha mířiti k tomu, abychom výkony, s nimiž jsme žáka seznámili, postupem času cvikem zmechanisovali, aby důvody a podmínky výkonů postupně přešly do podvědomí žákovu a dály se tak s minimálním vynaložením sil, aby se zabránilo únavě, jež brání pokroku a nabývání dalších vědomostí a cviků. Nikoli mechanismus pro mechanismus, ale za účelem úspory sil i času a umožnění dalšího vývoje.

Účelem vyučování počtům a matematice není, aby se žák naučil technice určitých výkonů, nýbrž, aby osvoji si tuto techniku, dovedl jich užívat v situacích, do kterých bude v životě postaven. Cvičení v tomto používání se děje t. zv. praktickými příklady. Tu se staví žáku v cestu čtverá obtíží; předně pochopiti význam pojmů, které se ve vyslovení úlohy vyskytují, jejich vlastnosti a vztahy; po druhé najíti postup řešení, t. j. co vypočítá napřed a co potom; po třetí určití početní výkon, jehož při jednotlivých krocích postupu řešení bude třeba, a po čtvrté provésti jej.

Zdá se mi, že obtíže, které činí žáku právě provedení výkonu, bývají někdy příčinou, že chybuje hned s počátku. Pozorujeme často, že volí výkon snazší, sčítání místo odčítání, nebo násobení místo dělení; jde tu asi podvědomě cestou nejmenšího odporu; jsem ovšem dalek toho, abych považoval tento důvod za jediný a dokonce snad za hlavní příčinu chyby.

Chci pojednati o tom, které psychologické požadavky činí na žáka (a počítajícího vůbec) jednotlivé početní výkony. Jsem si dobře vědom toho, že to, co uvádím, není jedinou podmínkou správné aplikace aritmetiky a také algebry, ale jest to jistě jedna z prvních, nejelementárnějších a také takových, kterým lze poměrně snadno vyhověti. Nezmiňuji se úmyslně, budiž mi dobře rozuměno, o jiných podmínkách úspěchu a chci se věnovati této jediné věci.

Pokusím se o podrobný rozbor toho, co žádáme na žákovi při určitém početním výkonu, při jednotlivých krocích při jeho provádění, jaké duševní námahy vyžaduje a jak nejvýhodnější a nejkratší cestou přejdeme od výkonu, který žák provádí s uvědoměním každého kroku, k takovému, v němž jednotlivé části postupně mizejí v podvědomí, splývají a mechanisují se.

Chci se pokusiti o tuto, řekl bych, pedagogicko-psychologickou drobnomalbu.

Při *sčítání* dvou jednociferných čísel žádáme při *nacvičování* trojí úsilí vůle a to uvědomiti si pojem každého ze sčítanců, pojem výkonu a zapamatovati si trvale součet v souvislosti s oběma sčítanci a výkonem; při opakování se změní třetí část a nastoupí úsilí vůle vybaviti z paměti — tu jde o paměť trvalou — součet. To se stránky ryze počtářské. Uvážíme-li, že v tomto případě jde o naprostého začátečníka, shledáme, že tu přistupují v úvahu ještě jiné okolnosti. Počítání se může díti jen ústně; tu se žádá na žákovi, aby si na krátkou chvíli pamatoval oba sčítance a žádaný výkon; je tu kombinace paměti okamžité — zapamatovati si sčítance a výkon — a trvalé, vybaviti součet. Učitel, vyslovuje sčítance, může je současně psát na tabuli; zde přestává dřívější nárok na okamžitou paměť, ale činí se nárok na trvalou, aby žák vybavil, které pojmy znamenají napsané značky; zároveň musí srovnávati auditivní a visuelní znaky pojmů, srovnávati je a uvědomovati si jejich identitu; nárok na trvalou paměť (poznávati napsané značky) jest podporován pamětí okamžitou (na níž ovšem nyní nespočívá takový úkol, jako v prvním případě), protože sčítanci i žádaný výkon byli vysloveni. Jestliže by učitel žáku součet jen napsal, nevyslovuje sčítanců a výkonu, odpadla by podpora trvalé paměti pamětí okamžitou. Kdyby učitel žáku součet diktoval, aby jej napsal, musí si žák uvědomiti pojmy sčítanců i výkonu, přijde na řadu visuelní a motorická trvalá paměť při psaní číslic a značky výkonu a zároveň okamžitá, aby si při psaní pamatoval nadiktované sčítance, potom trvalá, aby vybavil součet a znovu trvalá visuelní a motorická, aby jej napsal. V každém případě je třeba, aby žák také vyvinul určité úsilí vůle.

To platí pro naprostého začátečníka v počtech. V dalším budu předpokládati, že psaní a poznávání číslic a znamének výkonných je naprosto zmechanisováno, že se příslušné pojmy vybavují tedy naprosto automaticky a věc po této stránce nevyžaduje již téměř žádné námahy.

Jdeme nyní dále v *analýze sčítání*. Při třech jednociferných sčítancích vyslovených a napsaných je požadavek tento: Uvědomiti si pojem prvních dvou sčítanců, uvědomiti si výkon, úsilí vůle vybaviti jejich součet; nyní však přistoupí úsilí vůle vypuditi prvé dva sčítance z paměti a součet prvních dvou v ní podržeti; uvědomiti si další výkon, pojem třetího sčítance a vybaviti součet intermediárního součtu s třetím sčítancem. Při větším počtu sčítanců se bude opakovati požadavek, aby byly z vědomí vypuzeny intermediární součty, kterých při sčítání již není třeba. Tu se stává začátečníkovi výkon nepřehledný tím, že se mu toto zapuzování představ nedaří, setrvávají příliš dlouho v jeho vědomí a jsou mu tím na překážku. Jest to patrně z té příčiny, že si začátečník intermediární součty vyslovuje dvakrát; jednou jako

výsledky počtu, po druhé jako sčítance a tím jsou zdůrazňovány. Proto jest směřovati k prvému zjednodušení, aby se totiž intermediární součty vyslovovaly jen jednou; aby pojem součtu vplýval jaksi hned v pojem sčítance; tu přestane jejich zdůrazňování a usnadní se jejich vypuzování z vědomí. To však musí býti teprve druhým stupněm cviku, neboť jinak by mohlo uniknouti porozumění celému výkonu, že při něm totiž některá čísla vystupují ve dvojnásobném významu. Ještě však zbývá zbytečné zdůrazňování výkonu a dalšího sčítance, které musí v dalším postupu cviku odpadnouti; to, že obojí jest napsáno, musí býti již dostatečným podnětem; přestanou tedy býti vyslovovány a zbude jen vyslovování součtů. Tedy na příklad součet $7 + 6 + 8 + 5$. Prvý stupeň: Sedm a šest jest třináct; třináct a osm jest dvacet jedna; dvacet jedna a osm jest dvacet šest. Druhý stupeň: Sedm a šest jest třináct, a osm dvacet jedna a pět dvacet šest. Třetí: Sedm, třináct, dvacet jedna, dvacet šest; po případě i slovo sedm může odpadnouti.

Je-li sčítanců několik, přistupuje ještě další požadavek pozornosti, aby totiž žádný nebyl vynechán, ale také, aby nebyl vzat dvakrát. Jest si všimnouti také toho, že zde nelze počítati na pozornost mimovolnou, nýbrž, že musí býti chtěná a totéž platí o vybavování z paměti. Je to důležitá podmínka výkonu, ale také pramen námahy a proto i únavy. Pokračující v analýse dále, konstatujeme, že zvláštního napětí pozornosti jest třeba při přechodu desítky. V celku se tu jedná o značnou distribuci pozornosti a to na správnost intermediárních součtů, správnost sčítanců i úplnost jejich vyčerpání.

Tento výkon sčítání několika jednociferných sčítanců má základní význam při písemném sčítání a proto je velmi důležitě, aby se tu docílilo co největšího zjednodušení a co největší pohyblivosti, plynulosti představ, aby ty, kterých již není třeba, ve vědomí nesetrvávaly a nebyly na překážku. Je to tím důležitější, že jest to po prvé, kdy se tento požadavek, jenž má pro zručnost v počítání prvotřídní důležitost, vyskytne. Jest tu dbáti nejen toho, aby se hned v zárodku předešlo tomu, aby si žák tvořil rigidní, nepohyblivé představy, nýbrž i aby si zvykal tvořiti za určitými cíli také představy co možno plynulé.

Taková asi jest analýsa výkonu izolovaného počtáře. Počítáme-li však se žáky ve třídě, kdy jde o součinnost všech, vypadá věc ještě jinak. Zde má žák nejen počítati sám a tedy věnovati pozornost vlastnímu výkonu, nýbrž věnovati jí také výkonům toho, jenž počítá nahlas a sledovati tento výkon kriticky, aby nepodlehli sugesci slyšené chyby. Musí dále podrobiti své duševní tempo duševnímu tempu počítajícího nahlas, což značí pro mnohého naslouchajícího velikou a často těžko překonatelnou obtíž, ať jest již tempo počítajícího rychlejší nebo volnější nežli jeho vlastní.

Rychlejší tempo má za následek, že naslouchající ztrácí přehled; volněji, že musí své rychlejší násilně uvolňovati. Přímým nebezpečím jest tu učitel s velmi pomalým duševním tempem, protože přímo brání rychlejšímu tempu žáků a tím zvýšení cviku, při němž jest důležitou složkou zrychlení výkonu.

Při sčítání dvou čísel dvojciferných jest prvý krok, který si musí žák uvědomiti, že si je musí představit ve formě součtů desítek a jednotek; sečísti potom napřed desítky, potom jednotky a pak částečné součty; jde tu o zapamatování zejména součtu desítek. To je základ. Tento výkon se ovšem zkracuje velmi brzy tím, že se první sčítanec nerozkládá, nýbrž jen druhý a přičítají se postupně jeho desítky a potom jednotky. Všimněme si, co se tu vlastně žádá. Žák si musí uvědomiti rozklad prvního sčítance, aniž by ho explicitě provedl, rozložiti skutečně druhého sčítance, sečísti implicitě desítky obou sčítanců, uvážit, že zvětší-li se jeden (zde prvý) sčítanec o nějaké číslo a druhý zůstane beze změny, zvětší se součet o totéž číslo a vysloviti součet celého prvního sčítance a desítek druhého. Tento součet musí potom podržeti okamžik v paměti a přičísti k němu jednotky druhého sčítance. Jde tu kromě užití trvalé paměti k vybavení součtů a okamžité k podržení intermediárního, také o dělení pozornosti na tyto výkony. Výkon se zjednodušuje tím, že si žák neuvědomuje uvedené poučky o sčítání, nýbrž při přičítání desítek druhého sčítance užívá spíše zvukové analogie: Je-li dvacet a třicet padesát, jest dvacet sedm a třicet padesát sedm.

Již u méně obratného počtáře docílíme snadno toho, aby vyslovil konečný součet najednou, není-li součet jednotek větší než deset; vyžaduje to od něho, aby před vyslovením součtu desítek anticipoval přibližný součet jednotek, t. j. zjistil, že není větší než deset. Odtud jest jen krok, ale pro žáka dosti obtížný, aby anticipuje přibližně součet jednotek, i když je větší než deset, zvětšil součet desítek o jednu a vyslovil celý součet najednou. Zde musí v obou případech dělit pozornost na tři strany; na součet desítek, přibližný součet jednotek a přesný součet jednotek, po případě na počet jednotek v součtu jednotek sčítanců, je-li tento součet větší deseti. Všimněme si, čím to jest, že sčítání v případě, že součet jednotek sčítanců jest větší deseti, jest těžší. V prvním případě žák prostě sčítá číslice, vyjadřující stejné řádové jednotky; má tedy po každé jen dva sčítance a klade v myslí číslice, součty ty vyjadřující, za sebou. V druhém však má v prvním součtu tři sčítance, musí si pamatovati intermediární součet prvních dvou i třetího sčítance a dáváti na ně pozor současně. Proto třeba začít cvičení sčítáním sčítanců prvního druhu, ale upozorniti žáky na to, že přibližný součet jednotek jest anticipovati, aby se připravila půda složitějšímu případu druhému.

Při větším počtu sčítanců nežli dvou přibudou intermediární součty, o nichž platí celkem to, co bylo o nich řečeno při sčítání sčítanců jednociferných; požadavky na paměť a snahu po plynulosti se stupňují a únavnost výkonu roste rychle s počtem sčítanců; zvláště jest si tu všimnouti, že intermediární součty jsou často již trojciferné a že zapamatování čísla jest tím obtížnější, čím více má cifer.

Při sčítání čísel více než dvojciferných nastává přirozeně další ztížení, nikoli však nepřekonatelné při dvou až třech sčítancích. Hlavní potíž jest tu právě, že intermediární součty mívají již poměrně značnější počet cifer a proto se nesnadno zapamatují. Komplikací nového druhu způsobuje nestejný počet číslic sčítanců, jenž nutí k dalšímu dělení pozornosti, totiž na to, aby byly přičítány náležitě řádové jednotky.

Předpokládám ovšem, že sčítanci byli vždy napsáni; kdyby byli jen vysloveni, vzrostly by požadavky na okamžitou paměť a její dělení tou měrou, že by se obtíže staly velmi brzy nepřekonatelnými.

Při provádění praktických úloh přistupují další požadavky na záka, ale po stránce technické mohlo by nastati v některém směru i ulehčení; vzbuzený zájem může totiž způsobiti, že se čísla snáze podrží v paměti; o tom se však na tomto místě nemíním šířiti.

Při písemném sčítání jest práce počítajícího ulehčena tím, že se sčítají vždy jen jednotky téhož řádu, kdežto dříve se řády střídaly; sčítanci jsou tedy prakticky jen jednociferní a intermediární součty zřídka více než dvojciferné. Důležitým momentem jest tu, aby počítající, zapisuje počet jednotek částečného součtu, podržel na okamžik v paměti počet jednotek vyššího řádu, jež má přičísti; musí dělit pozornost na napsání číslice a na zapamatování oněch jednotek vyššího řádu. Jsou tu však ještě některé jiné okolnosti, jež zaslужují pozornosti učitelovy; jsou různé podle toho, jsou-li sčítanci napsáni pod sebou nebo vedle sebe.

Prvý případ je zřejmě jednodušší; nesmíme však přehlédnouti jednu věc, jež sice nepatří do výkonu sčítání samotného, ale činí začátečníkovi značnou obtíž, totiž samo zapisování sčítanců, aby číslice téhož řádu byly umístěny správně do sloupců. Píšící si musí představití vizuálně obraz čísla, které má napsati, a umístiti jeho číslice v představě na náležité místo a hlavně začít na správném místě psáti. Vyslovování velikých čísel po skupinách šesti, resp. tří řádových jednotek tento výkon ulehčuje; píšící si musí ovšem představití umístění skupin. Větší požadavky však klade zapsání sčítance, jenž obsahuje desetinný zlomek, protože tu se o umístění číslic v napsaném zlomku rozhodne až po vyslovení celé lomené části, protože teprve tu se píšící dozví, o které řádové jednotky jede; tu se klade značný nárok na paměť i představivost píšícího,

jenž si má pamatovati jejich počet i řád, představiti si lomenou část napsanou, doplniti ji v představě potřebným počtem nul a děliti pozornost mezi tyto věci, jež musejí býti v představě bezpodmínečně naprosto současně. Je ovšem pravda, že se tu docílí zjednodušení tím, že se číslice za desetinnou čárkou prostě naktují a potom se dá číslo vysloviti; ale tu uniká důležitý cvik.

Sčítání sčítanců v řádkách jest složitější. Jedná-li se o čísla celistvá, musí si počítající dávatí pozor na to, které řádové jednotky sčítá, t. j. kterou číslici na kterém místě od levé strany má v každém sčítanci brátí; při sčítancích několikačiferných se stává věc začátečníkovi brzy nepřehlednou. Jsou-li sčítanci čísla desetinná, musí odhadovati umístění cifer sčítanců vpravo a vlevo od desetinné čárky; zvláště obtížné jest to při číslicích, jež jsou na téže straně desetinné čárky, od které počal sčítati, protože musí dojítí až k ní a potom se vrátiti k cifře. Počne-li tedy sčítati od pravé strany řádky, což jest výhodné při celých číslech, musí se od desetinné čárky vraceti vpravo.

Konečně bych se zmínil o sčítání sčítanců porůznu napsaných, o které může jítí, když se jedná o úsporu psaní a tím i času. Počítající si musí pamatovati také místa, kde jsou sčítanci napsáni, a uchovati si o nich přehled, aby vyčerpal vždycky správně řádové jednotky, o které právě jde. Tento případ se vyskytne na př. při užívání tabulek, mají-li se sečísti dvě čísla (na př. logaritmy) vytištěná na téže stránce; tu jest opisování jejich přímo hříšným mařením času. Žák si práci ulehčí, ukazuje-li si je dvěma prsty levé ruky a pravou píše do sešitu.

Při sčítání čísel obecných jde o komplikaci požadavku na pozornost a paměť, aby počítající správně vybíral čísla stejnojmenná a vyčerpal vždy všechny sčítance; sčítaje sčítance určitého druhu musí však právě věnovati pozornost všem, konstatovati, který právě v úvahu nepřichází — ovšem jen tím, že se jeho pozornost s něho rychle sveze, aby naopak zase zdůraznila ty, které se právě přičítají; jak důležité jest, aby počítající věnoval pozornost — svého druhu ovšem, jak bylo právě řečeno, — všem sčítancům, jest patrnó z toho, že začátečník dosti často vynechává sčítance z konce výrazu, protože jeho pozornost tu ochabuje a pohodlní právě proto, že si není vědom jejího významu. Učitelovou úlohou jest, aby žáka zvykal hned od začátku stejnojmenné pozornosti. Je-li výraz, jehož členy jest sčítati, napsán na více než jednom řádku, nastává tu do jisté míry případ sčítanců porůznu napsaných.

Při *odečítání* (předpokládám zatím, že rozdíl bude vždycky kladný) jednoho nebo několika menšitelů z paměti vyžaduje analogický postup jako při sčítání také analogických duševních výkonů. I zde, aspoň při odčítání dvou dvojčiferných čísel lze po-

dobným postupem jako při sčítání docíliti toho, aby počítající vyslovil hned rozdíl. V případě, že se jednotky menšitele dají odčítati od jednotek menšence, jde o to, aby žák tento fakt anticipoval a potom vyslovil číslo, jehož číslice jsou rozdíly číslic stejných řádů v menšenci a v menšiteli. Není-li to možno, musí opět anticipovati tento fakt a vysloviti číslo, jehož číslice v desítkách vznikne odečtením číslice o jedničku větší číslice v menšiteli od číslice v menšenci a v jednotkách odečtením číslice v menšiteli od čísla o deset většího číslice v menšenci. Při určení desítek rozdílů jde v podstatě o současné odečtení dvou menšitelů, z nichž jeden jest číslice menšitele a druhý jedna.

Ještě jest třeba se pozdržeti u jedné věci, totiž, že velmi často jest dobře provésti odečtení čísel dvojciferných (a někdy i více-ciferných — podle stupně cviku) doplňováním, jako se to činí při odčítání písemném. Menšitele doplníme na nejbližší desítku, zjistíme, oč jest menšenek větší než tato desítka a výsledky sečteme. Při skutečném provádění jde o to, aby počítající se snažil určit obě čísla skoro současně a bezprostředně potom je sečetl. Doporučuje se to zvláště, je-li menšitel napsán před menšencem, což se vyskytuje zejména při užívání tabulek. Žák nemusí prováděti inverzi pořádku čísel.

Při odčítání písemném je tu požadavek, aby žák, doplňuje určité řádové jednotky menšitele na počet týchž řádových jednotek v menšenci, nezapomínal případně zvětšiti v menšiteli počet řádových jednotek nejbližše vyšších. V případě několika menšitelů musí počítající, když vyčerpal určité řádové jednotky všech menšitelů změnití své zaměření na sčítání, uvědomiti si velikost jejich součtu, uvědomiti si jejich počet v menšenci, odhadnouti, kolik nejbližše vyšších řádových jednotek k nim má přidati, provésti doplnění součtu na počet v menšenci a během psaní číslice rozdílů podržeti v paměti, kolik jednotek nejbližše vyššího řádu má k jejich součtu v menšitelích přidati. Jde tu opět o značnou distribuci pozornosti.

Při počítání čísel relativními přibudou další okolnosti. Předpokládám, že žák pravidla o přičítání a odčítání těchto čísel již zná. Budu se zabývati nejdříve slučováním jen dvou jednociferných. Jde tu o výkon pro začátečníka značně složitý. Při číslech prostých šlo o uvědomění čísel, výkonu a o vybavení určité základní spoje. V tomto případě si musí uvědomiti předně kvalitu obou čísel; po druhé výkon, který má s nimi provésti; po třetí výkon, který má provésti s jejich absolutními hodnotami; po čtvrté provésti případně změnu pořádku těchto hodnot (na př. 5—9 na 9—5); po páté vybaviti výsledek počtu s absolutními hodnotami; po šesté odhadnouti případně vzájemnou velikost absolutních hodnot a po sedmé přisouditi vý-

sledku náležité znaménko. Na paměť i pozornost začátečníka se tu kladou nezvyklé a veliké požadavky a to zejména po stránce distribuce pozornosti; žádá se tu také velmi rychlá změna zaměření duševní činnosti; na př.: Žák vidí výkonné znaménko plus, při němž jest z dřívějšíka zcela automaticky zvyklý sčítati, ale výkon na absolutních hodnotách žádá odčítání. Jiná dosud nezvyklá okolnost jest, že musí rozeznávati znaménka výkonná a jakostná. Zde je třeba pečlivého a dobře rozváženého cvičení, aby výkony postupně splynuly a vše se dalo automaticky.

Jde-li o slučování více než dvou relativních čísel, musí žák prováděti uvedené výkony s intermediárními výsledky, jež má udržeti v paměti a nevidí jich napsaných, požadavky se stupňují a může nastati velmi brzy únava a zmatek. Podobně se požadavky stupňují při číslech několikasčíslných. Při slučování čísel obecných přistupují požadavky uvedené při sčítání.

Sem náleží také odstraňování závorek, výkon jinak velmi mechanický. Počítající musí ovšem věnovati pozornost příslušným pravidlům a tedy také znaménkům před závorkou a členů v závorce, ale při odstraňování vnějších závorek také dávat pozor, kde počínají a kde končí závorky vnitřní, a pamatovati na to, že nesmí zapomenouti provésti příslušný výkon se znaménky členů, které následují za ní. Žák se totiž usměrní na pouhé opisování členů uvnitř vnitřní závorky a zapomene změnití potom toto usměrnění. Proto jest vždy dobře, když začátečník počíná odstraňováním závorek vnitřních, potom ať si zvykne počínati vnějšími, aby se naučil posléze odstraňovati aspoň dvojí najednou. Při tomto výkonu nejde zase o nic jiného, nežli o distribuci pozornosti na několikráte znaménka a polohu závorek; cvikem se jí dá docíliti. Značnou potíž činí mnohému žáku, píše-li členy výrazu s odstraněnými závorkami na jedné straně tabule (nebo stránky) na př. levé a příslušné členy původního výrazu jsou na druhé straně (pravé); hledání dalšího členu po napsání předchozího jej zdržuje a mate. Abychom jej uvarovali této nepříjemnosti (a chyb odtud plynoucích), mějme jej k tomu, aby počínal každý výraz za znaménkem rovnosti na nové řádce, tedy na levé straně tabule či papíru (toho jest si zvláště všimati), čímž se docílí toho, že členy původního a transformovaného výrazu budou přibližně napsány pod sebou; tím se počítajícímu usnadní přehled a zajistí větší možnost správného postupu.

Násobení čísel prostých z paměti a to několikasčíslného jednociferným klade podobné požadavky jako sčítání několikasčíslných sčítanců; přistupuje tu střídání výkonů násobení a sčítání. Kterak provésti splývání jednotlivých kroků při provádění tohoto výkonu, jest snad dosti zřejmo z toho, co již dříve bylo řečeno. Jisté se dá docíliti i toho, aby žák, anticipuje součin jednotek, řekl součin

dvojciferného čísla jednociferným najednou. Při násobení dvou dvojciferných čísel bude žák násobiti nejdříve desítkami násobitele a potom jednotkami; postup ze začátku bude na př. pro 37×26 : 600 a 140, 740 a 180—840, 920 a 42—962. Potom se výkon zkrátí postupně až na 740, 920, 962.

Při písemném násobení celých čísel bývá uvažováno o tom, který způsob zapisování činitelů jest vhodnější a kterými řádovými jednotkami násobitele jest začítí násobiti. Na evropské pevnině jest, myslím, všude zaveden způsob psáti násobitele za násobence v téže řádce, při čemž jest výkonným znaménkem buď ležatý křížek nebo tečka; v zemích anglosaských se píše násobitel pod násobence a to buď tak, že jednotky obou činitelů jsou pod sebou anebo nejvyšší řádové jednotky násobitele pod jednotkami násobence bez jakéhokoli znaménka výkonného. Za nevýhodu psaní činitelů vedle sebe se uvádí, že počítající musí hledati číslice, které vyjadřují řádové jednotky, jež se právě násobí, dosti daleko od sebe, co jest pro začátečníka skutečně nevýhoda. Protože však tato věc jest také v souvislosti se způsobem zapisování dělení, ukáže se potom, že jest ona výhoda anglosaského způsobu problematické ceny.

Chceme-li násobení zmechanisovati, musíme v obojím případě hledět docíliti toho, aby si počítající zvykl pamatovati číslici násobitele, kterou násobí, aby jí po každém součinu dvou číslic nemusil zrakem hledati a sledoval jím jen číslice násobence. Obtížnost násobení násobitelem, v němž chybějí některé řádové jednotky, jest pro začátečníka v tom, že usměrní svoji pozornost příliš automaticky na psaní částečných součinů o jedno místo vpravo či vlevo, místo aby ji upíral na to, o kolik míst v tu či onu stranu má psáti.

Má-li se začít násobiti nejvyššími nebo nejnižšími řádovými jednotkami násobitele, jest podle mého názoru psychologicky lhostejné. Skoro za povážlivý bych měl způsob počínati nejvyššími řádovými jednotkami, uvádí-li se tu za důvod, že nejvyšší řádové jednotky prvního částečného součinu určují již hrubý odhad celého výsledku; je to sice pravda, ale potom chyba v těchto řádových jednotkách jest i chybou odhadu a odhad jako kontrola nemá ceny. Odhad a přesný výsledek nejsou získány neodvislými cestami.

Úsporným psáním jest velmi výhodná indická metoda násobení (jež u začátečníka ovšem vymáhá rozhodně, aby se činitelé psali pod sebe), třebaže klade na počítajícího ze začátku značné požadavky a to tím větší, čím větší počet cifer obsahují činitelé. Čím dále ke středním číslicím součinu, tím větší pozornost musí míti počítající na kombinaci cifer činitelů a tím více a tím větších intermediárních výsledků si musí pamatovati.

Při násobení mnohočlenů vyžaduje psaní činitelů vedle sebe značné pozornosti, již jest dělitel na výkon násobení absolutních hodnot a na určení znaménka částečného součinu. Je-li součiny mnohočlenů přičítati nebo odečítati, jest počítajícímu dělitel pozornost dále a to na výkon, který se má se součinem provésti, nemají-li se závorky opisovati. Při mnohočlenech srovnaných podle mocnin nějakého čísla jest indická metoda velmi výhodná. Jejím důležitým požadavkem, ať jde o čísla nebo mnohočleny, jest dovednost tvoření plynulých představ, aby to, čeho již není třeba, nesetřvávalo v paměti a nezatěžovalo dílejší výkon, který má býti právě proveden.

Při *dělení* jest si na prvním místě všimnouti zapisování výkonu; na evropské pevnině se píše dělitel z a dělencem v jedné řádce, výkonným znaménkem jest dvojtečka a podíl se píše za znaménkem rovnosti dále za dělitele; v anglosaských zemích do řádky dělitel před dělencem, výkonným znaménkem jest oblouček obrácený konvexní stranou k dělenci [tedy 25) 275] a podíl se zapisuje nad dělence. Na prvý pohled se zdá prvý způsob pro výkon počtu psychologicky méně výhodný a to proto, že čteme vždy od levé strany k pravé a tu se čte při výkonu počtu směrem opačným (při výkonu počtu vyslovíme na př. 36 ve 247 a ne 247 děleno 36); začátečník si tu musí zvykati na opačný způsob čtení a to je, zdá se, zbytečně vynakládaná námaha. Také při určování řádového ukazovatele nejvyšší cifry podílu jest účelné vycházeti od dělitele, protože při pohledu na něho si počítající uvědomí, jak má uvažovati nejvyšší řádové jednotky dělence. Také psaní podílu nad dělence zdá se míti tu výhodu, že číslo, kterým se násobí dělitel, jest napsáno blíže. Ale tu počíná nevýhoda, že totiž při násobení psaném podle anglosaského způsobu jest konfigurace čísel, jež jest násobiti, jiná než tu, a zde dokonce jeden z činitelů jest nad jiným číslem, nežli které jest násobiti. Jest tu další nevýhoda, že součiny dělitele a cifer podílu se píší pod dělence a dráha, kterou musí oko, jež příslušné číslice sleduje opisovati, jest klikatá, což při současném odčítání součinů od částečných dělenců činí podstatnou potíž; té ovšem v anglosaských zemích není, protože se součiny dělitele s číslicemi podílu vždy vypisují; snad příčina toho (ovšem neuvědomělá) jest právě zde.

Při způsobu zapisování obvyklém u nás je zmíněná již počáteční nevýhoda vyvážena tím, že oko, sledující potřebné číslice, opisuje dráhu přibližně stále téhož směru, totiž zprava nalevo, na kterou je také zvyklé z násobení.

Myslím, že výhody anglosaského způsobu zapisování dělení jsou jen zdánlivé a v souvislosti s tím i onoho způsobu zapisování násobení. Nevýhodné zpětné čtení při dělení zapisovaném způsobem u nás obvyklým nastává jen tolikrát, kolik cifer podílu se

určuje; počet klikatých drah pohybu očí při způsobu anglosaském jest určen součinem počtů cifer dělitele a podílu. Zde jest na místě poznamenati, že podobnou nevýhodu jako při anglosaském způsobu zapisování dělení má psaní násobitele před násobencem, jež se může vyskytnouti při změně pořádku činitelů; tu také bude oko opisovati klikatou dráhu. Protože změna pořádku činitelů jest někdy velmi výhodná, jest radno žádati tu na žáku bezpečné zapamatování číslíce, již násobí, aby oko těchto drah nemusilo činiti anebo aby se činitelé nemusili prepisovati.

O požadavcích na paměť a pozornost žákovu při dělení není třeba po tom, co již bylo řečeno dříve, zvláště se zmiňovati. Zaslouží zmínky dělení jednociferným číslem z paměti, kdy jest třeba směřovati k tomu, aby žáku při vyslovení částečného dělence a dělitele se vynořil ihned nejen podíl, ale i zbytek a později, aby již nevyslovoval zbytků, nýbrž aby jeho představa sklouzla ihned na nového částečného dělence. Zás tu vystupuje požadavek dělení pozornosti.

Jde o význam podrobného rozboru psychologických požadavků na ducha žákovu při jednotlivých početních výkonech. Záleží tu především na tom, aby si učitel uvědomoval, co na žákovu žádá, aby uvažoval, je-li žák vůbec a po případě v jaké míře jest schopen jeho požadavkům vyhověti. Jde o to, aby si učitel zvykl žáka při jeho početním výkonu pečlivě pozorovati a dovedl odhadovati, kde, v kterém místě právě jistý, docela určitý žák vážne; nejen kde jest nedostatek trvalé a kde okamžité paměti, ale také kde jest jí nadbytek (žák si pamatuje věci, které mu překážejí); nejen kde je prostý nedostatek pozornosti, ale kde také nedostatek na jedné a přebytek na druhé straně, t. j. nedostatek dělení pozornosti, kde právě musí žák zvláště zvýšiti intensitu vůle. Dále musí učitel hleděti k tomu, aby z výkonu, abych tak řekl, plně rozvinutého vypěstoval u žáků postupně mechanismus, ale cílevědomý mechanismus a to tím způsobem, aby jednotlivé kroky „rozvinutého“ výkonu postupně buď vypadávaly anebo splývaly. To ovšem není a nemůže býti úkolem jediné třídy, nýbrž musí zráti postupem let, kdy žáku přestává býti výkon stále víc a více cílem a stává se mu prostředkem k němu, což právě také zjednává žákův zájem o mechanisaci, jež se mu do jisté míry stane žádoucím cílem k tomu, aby vědomě uvolnil své síly k další práci.

Posléze jest tu ještě jeden důležitý požadavek, má-li zmechanisování výkonu míti význam a skutečně znamenati úsporu času a jistotu v práci, totiž aby počítající si byl vědom, kam až sahají jeho schopnosti a kdy ještě výkon z paměti nebo zjednodušeně prováděný bezpečně ovládne. Pozbývá-li rychlosti a tím i jistoty a musí výkon opakovati, přestává způsob, jímž si vede, míti cenu; místo úspory času a námahy a — a to je důležité — možností

věnovati pozornost tomu, co je pro daný okamžik hlavní, nastává zmatek a zatemnění a sice právě tam, kam mělo být vrženo největší světlo. A tu jsme zas na místě, kde žádáme od žáka, aby hodně intenzivně myslel, odhadoval a také — rychle se rozhodoval, má-li počítati z paměti nebo písemně. Pozorný učitel si jistě všimne, co toto odhadování a rozhodování pro žáka znamená a jak blízko beznadějnému ztroskotání tu mnohdy žák bývá.

Při práci s třídou jest věcí učitelovou, aby znal možnosti jednotlivých žáků a tam, kde jde o jiné cíle, volil pro technický výpočet způsob, který by neodváděl pozornost žáků od hlavní věci. K zdokonalení početní techniky (i vlastní!) musí si najíti vhodný čas i příležitost; musí jej nalézt v každém roce a na každém stupni; v třídě první i poslední; jinak by možnosti žákovy v tom směru zakrněly.

K metodice deskriptivní geometrie.

Dr. Josef Klíma, Brno.

Metodice deskriptivní geometrie není u nás věnována taková pozornost jako v matematice. Snad je to zaviněno tím, že profesorů matematiky je více než profesorů deskr. geometrie, ale myslím též, že na tom má velkou vinu konservativnost, s kterou se této disciplíně vyučuje. Jak těžce se tu na př. ujímala tak samozřejmá věc, že před kolmým promítáním na dvě kolmé průmětny třeba vzíti kolmé promítání na jednu průmětnu. Doufejmež, že nové osnovy, které značí zřejmý pokrok proti dřívějšíku, uvedou tuto věc na pravou míru.

V dalším chci si povšimnouti dvou věcí z metodiky vyučování deskriptivní geometrii.

1. Máme-li provésti nějakou úlohu v kolmém promítání na dvě kolmé průmětny a dané prvky jsou v obecné poloze k průmětnám, tu na základě znalostí jistých základních konstrukcí lze tuto úlohu provésti přímo, na př. osu dvou mimoběžek, jež mají obecnou polohu. Mnohem jednodušeji řeší se taková úloha, jestliže dané prvky mají zvláštní polohu k průmětnám, na př. při ose dvou mimoběžek, jestliže jedna z nich je k některé průmětně kolmá. I lze nyní obecný případ převésti v tento jednodušší dvojím způsobem. Jeden tento způsob lze označiti jako metodu *otáčení* (Američané říkají metoda jeřábová) a druhý jako metodu *pomocných průměten*. Metody tyto liší se v tom, že u první objekt, v němž máme jistou konstrukci provésti, uvádíme otáčením kolem os rovnoběžných s průmětnami do zvláštní polohy k základním dvěma průmětnám, kdežto při druhé objekt necháme v klidu,