Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Příspěvek ke konstrukci elipsy ze sdružených průměrů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 1, 60--65

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121742

Součin dvou hran protějších jest:

$$a^2 a'^2 = \frac{4^2 M_{23}^2 M_{14}^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4 \varDelta_1^3 \varDelta_2^3 \varDelta_3^3 \varDelta_4^3}} = \frac{4^4 M_{23}^2 M_{14}^2}{3^4 T^4},$$

užijeme-li rovnice (3), a souhlasně se (13) jest: $a\,a' = \frac{16\, M_{23}\, M_{14}}{9\, T^2}$.

Následkem relace vytčené ve II. odstavci mezi hranami protějšími a středním řezem p_a máme pro sklon hran a, a':

$$\sin \varphi_a = \frac{4 p_a}{a a'} = \frac{9}{4} \frac{T^2 p_a}{M_{23} M_{14}}$$

a osa týchž mimoběžek O_a se dá počítati jako výška trojúhelníka, jenž vznikne promítnutím stěn $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ a hrany a' ve směru hrany a:

$$O_a\, a' \sin \varphi_a = \frac{2 \varDelta_2}{a} \cdot \frac{2 \varDelta_3}{a} \cdot \sin \alpha.$$

Se zřetelem na (11) a (16) plyne odtud:

$$O_a = \frac{2 M_{23}}{a\, p_a} \text{ nebo} = \frac{2 M_{14}}{a' p_a} = \frac{2}{p_a} \sqrt{\frac{M_{14}\, M_{23}}{a\, a'}} = \frac{3 T}{2 p_a}. \qquad (17)$$

neboť dle (13) platí: $$\frac{M_{14}}{a'} = \frac{M_{23}}{a}. \qquad (13')$$

(Dokončení.)

Příspěvek ke konstrukci elipsy ze sdružených průměrů.

Podává prof. **Václav Hübner** na Král. Vinohradech.

Jak známo, lze považovati elipsu za šikmý průmět kružnice. Buďtež $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ dva sdružené průměry kružnice, k níž sestrojen opsaný čtverec $p q r s$, jehož strany jsou rovnoběžné s těmito průměry, které stotožníme s osami souřadnic X, Y. Tečna v libovolném bodě $t\,(x_t, y_t)$ kružnice K, má rovnici $x x_t + y y_t = r^2$; průsečíky její se stranami $\overline{sr}$, $\overline{rq}$ (obr. 1.) jsou m, u jich souřadnice určíme, řešíme-li rovnici tečny s rovnicí $y = r$ (pro bod m) a $x = r$ (pro bod u).

Jest tudíž:

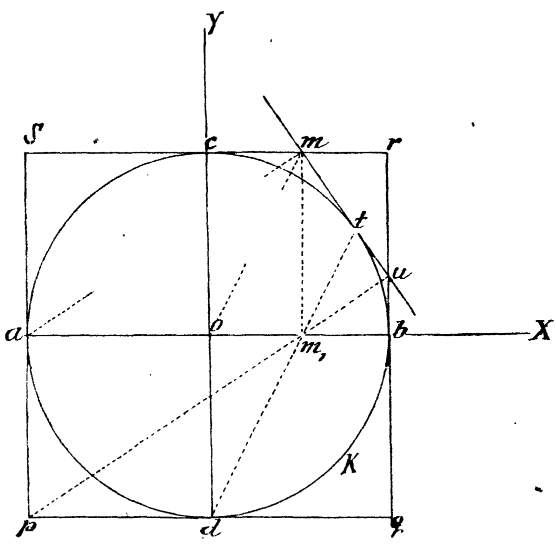
1) $x_m x_t + r y_t = r^2$ a $x_m = \dfrac{r(r - y_t)}{x_t}$, $y_m = r$;

2) $r x_t + y_u y_t = r^3$, z čehož $y_u = \dfrac{r(r - x_t)}{y_t}$, $x_u = r$.

Spojíme-li bod t (x_t, y_t) s bodem d $(0, -r)$, jest rovnice přímky td

$$y - y_t = \frac{y_t - y_d}{x_t - x_d}(x - x_t) \text{ nebo}$$

$$y - y_t = \frac{y_t + r}{x_t}(x - x_t)$$



Obr. 1.

a průsečík m_1 s osou X $(y = 0)$ má

$$x_{m1} = \frac{r x_t}{r + y_t},$$

nebo násobíme-li čitatele a jmenovatele $(r - y_t)$, obdržíme

$$x_{m_1} = \frac{r x_t (r - y_t)}{r^2 - y_t^2}$$

a ježto $x_t^2 + y_t^2 = r^2$, jest

$$x_{m_1} = \frac{rx_t(r - y_t)}{x_t^2} = \frac{r(r - y_t)}{x_t}$$

a tudíž $x_m = x_{m_1}$ t. j. spojnice mm_1 jest kolmá k ose X.

Spojnice up má rovnici

$$y - y_p = \frac{y_p - y_u}{x_p - x_u}(x - x_p), \text{ a ježto}$$

$$x_p = -r,\ y_p = -r,\ x_u = r,\ y_u = \frac{r(r - x_r)}{y_t}, \text{ jest}$$

$$y + r = \frac{-r - \dfrac{r(r - x_t)}{y_t}}{-r - r}(x + r), \text{ nebo}$$

$$y + r = \frac{y_t + r - x_t}{2y_t}(x + r) \text{ a průsečík její s osou } X\ (y = 0)$$

dán rovnicí

$$2ry_t = xy_t + rx - x_t x + ry_t + r^2 - rx_t$$

z čehož
$$x = \frac{r(y_t - r + x_t)}{(y_t + r) - x_t}.$$

Násobíme-li citatele i jmenovatele tohoto zlomku výrazem $(y_t + r) + x_t$, obdržíme

$$x = \frac{r[x_t^2 + 2x_t y_t + y_t^2 - r^2]}{y_t^2 + 2ry_t + r^2 - x_t^2} \text{ a ježto } r^2 = x_t^2 + y_t^2$$

jest
$$x = \frac{2rx_t y_t}{2y_t(r + y_t)} = \frac{rx_t}{r + y_t} = x_{m_1}$$

Z čehož vidno, že spojnice pu a dt protínají se v témž bodě m_1 na ose X.

Dále shledáváme, že zvolíme-li na ose X libovolný bod m_1 a spojíme-li jej s bodem p, protíná spojnice pm_1 stranu čtverce $\overline{rq}$ v bodě u; vztyčíme-li v bodě m_1 kolmici na osu X, protne tato stranu čtverce $\overline{sr}$ v bodě m; i jest mu tečna kružnice K. Bod dotyčný t jest průsečík spojnice dm_1 s mu.

Připomenutí:

1. Směrnice přímky pu jest $\dfrac{y_t + r - x_t}{2y_t}$,

„ „ am „ $\dfrac{y_m - y_1}{x_m - x_a} = \dfrac{r}{\dfrac{rx_t}{r + y_t} + r} = \dfrac{r + y_t}{x_t + r + y_t}.$

Násobíme-li čitatele a jmenovatele výrazem $x_t + y_t - r$ nahradíme-li $r^2 = x_t^2 + y_t^2$, obdržíme

$$\frac{(r + y_t)\,(x_t + y_t - r)}{x_t^2 + 2x_ty_t + y_t^2 - r^2} = \frac{rx_t + ry_t - r^2 + x_ty_t + y_t^2 - ry_t}{2x_ty_t}$$

$$= \frac{x_t\,(y_t + r - x_t)}{2x_sy_t} = \frac{y_t + r - x_t}{2y_t},$$

z čehož patrno, že $am \parallel pu$.

2. Směrnice přímky td jest $\frac{y_t + r}{x_t}$,

" " om " $\frac{\overline{mm_1}}{\overline{om_1}} = \frac{r}{\frac{r\,(r - y_t)}{x_t}} = \frac{x_t}{r - y_t}$

násobíme-li čitatele i jmenovatele tohoto zlomku výrazem $r + y_t$ a nahradíme-li $r^2 = x_t + y_t^2$, obdržíme

$$\frac{x_t\,(r + y_t)}{r^2 - y_t^2} = \frac{x_t\,(r_t + y_t)}{x_t^2} = \frac{r + y_t}{x_t}.$$

tudíž jest $om \parallel td$.

3. Je-li $\overline{om_1} = \frac{r}{n}$ ($n^{\text{tý}}$ díl poloměru), má rovnice přímky pm_1 ...

$$y - y_p = \frac{y_p - y_{m_1}}{x_p - x_{m_1}}\,(x - x_p), \quad \text{tvar} \quad y + r = \frac{n}{n + 1}\,(x + r).$$

Průsečík u (x_u, y_u) se stranou $\overline{rq}$ $(x = r)$ má $x_u = r$ a $y_u = \overline{bu} = \frac{r\,(n - 1)}{n + 1}$.

Rovnice přímky mu jest $y - y_m = \frac{y_m - y_u}{x_m - x_u}\,(x - x_m)$, nebo po úpravě $y\,(n^2 - 1) + 2nx = r\,(1 + n^2) \ldots (\alpha)$ a rovnice přímky dm_1 jest $y - y_d = \frac{y_d - y_{m_1}}{x_d - y_{m_1}}\,(x - x_d)$, nebo

$$y + r = nx \ldots (\beta).$$

Průsečík t (x_t, y_t) přímek mu a dm_1 určíme z rovnic (α), (β) i jest

$$x_t = \frac{2rn}{1 + n^2} \text{ a } y_t = \frac{r\,(n^2 - 1)}{1 + n^2} \text{ a}$$

$$x_t^2 + y_t^2 = \frac{r^2\,(4n^2 + n^4 - 2n^2 + 1)}{(1 + n^2)^2} = r^2;$$

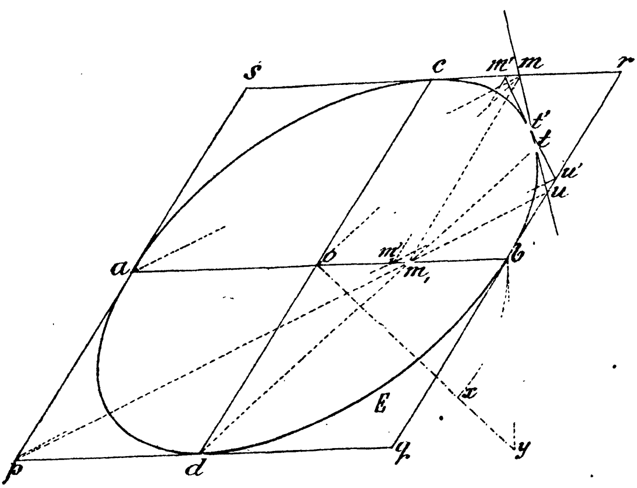
bod t jest tudíž na kružnici K a přímka mu jest tečnou, neboť dosadíme-li do rovnice tečny jdoucí bodem $t \ldots$: $xx_t + yy_t = r^2$ za x_t a y_t příslušné hodnoty, obdržíme

$$\frac{2rn}{1+n^2}\,x + \frac{(n^2-1)\,r}{1+n^2}\,y = r^2,$$

nebo $y\,(n^2 - 1) + 2nx = r\,(1 + n^2)$, kterážto rovnice jest totožná s rovnicí α).

4. Má-li bod t býti uprostřed úsečky $\overline{mu}$, musí

$$x_t = \frac{x_m + x_u}{2} = \frac{\frac{r}{n} + r}{2} = \frac{r\,(1+n)}{2n}$$



Obr. 2.

a ježto dle předcházejícího jest $x_t = \dfrac{2rn}{1+n^2}$, pak

$$\frac{r\,(1+n)}{2n} = \frac{2rn}{1+n^2}, \text{ nebo } n^3 - 3n^2 + n + 1 = 0.$$

Této rovnici vyhovuje jeden kořen $n_1 = 1$, druhé dva kořeny obdržíme z rovnice $(n^3 - 3n^2 + n + 1) : (n - 1) = n^2 - 2n - 1 = 0$, t. j. $n_2 = 1 + \sqrt{2}$, $n_3 = 1 - \sqrt{2}$ (nevyhovuje).

Pak jest $x_{m_1} = \overline{O_{m_1}} = \frac{r}{1+\sqrt{2}} = r(\sqrt{2}-1)$ (rozdíl úhlopříčky čtverce o straně $r = \overline{ob}$ a poloměru r) a

$$x_t = \frac{2r(1+\sqrt{2})}{1+(1+\sqrt{2})^2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

(polovina úhlopříčky čtverce o straně r).

Rovnoběžným promítáním se vztahy tyto nemění; odtud plyne jednoduchá konstrukce elipsy E ze dvou sdružených průměrů $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, jak v obr. 2. vyznačeno. Touto konstrukcí sestrojíme nejenom tečnu mu, ale i bod dotyčný t.

Jak z předcházejícího vidno, jest postup při sestrojování tento: Sestrojme rovnoběžník $pqrs$, rozdělme průměr $\overline{ab}$ na n stejných dílů, bod na prvním dílci na př. m_1 spojme s bodem p a d a sestrojme $m_1m \parallel \overline{cd}$, čímž určíme bod m na straně $\overline{sr}$, bod u na straně $\overline{rq}$ a na tečně mu bod dotyčný t. Tak postupujeme u každého dílce na $\overline{ob}$; na opačné straně $\overline{u}$ vyměníme jen bod p s bodem q. V obrazci sestrojen též bod t', který půlí úsečku $m'u'$; $\overline{om'_1} = \overline{xy} = \overline{ob}\,(\sqrt{2}-1)$.

Poměr geometrického názoru ke geometrii Euklidově.

Předneseno v Jednotě Č. M. a F. 4. XII. 1915 od prof. Dr. **A. Dittricha** z Třeboně.

Řekne-li se o Euklidově geometrii, že jest pravdivá, lze výroku tomuto podložiti dvojí smysl. Geometr z povolání, jenž se o geometrii zajímá jako o pletivo myšlenek, vížící se ke konečnému počtu axiomat za základ vzatých, rozumí pravdivosti její, že věty geometrické jsou logicky správně z axiomat vyvozeny. Snad by se tato imanentní pravdivost geometrie v hlavě matematika měla spíše nazvati krásou, poněvadž logické chyby v dedukcích pociťujeme jako esthétické vady theorií. Zcela jinak dívá se na pravdivost geometrie přírodopisec, mysleme na astronoma neb krystalografa. Ten rozumí pravdivostí transienci geometrických vět na přírodu. Jsou tedy v hořejším smyslu *krásné*, to jest *logicky bezvadné*, věty geometrie zároveň *pravdivé*, to jest *užitečné* při zpracování přírody.