Ladislav Seifert

Příspěvek k deskriptivní geometrii Plückerova konoidu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. 1, 1--7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121731

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Příspěvek k deskriptivní geometrii Plückerova konoidu.

L. Seifert, Brno.

(Došlo 11. června 1938.)

Věnováno prof. dr. Karlu Petrovi k jeho 70. narozeninám.

Pišme rovnici Plückerova konoidu ve tvaru

$$(x^2 + y^2) z - ay^2 = 0, \tag{1}$$

jemuž odpovídá parametrické vyjádření

$$x = r \cos \varphi, \; y = r \sin \varphi, \; z = a \sin^2 \varphi. \tag{2}$$

Roviny $x = 0$, $y = 0$ jsou hlavní roviny symetrie, bod $O(0, 0, \frac{1}{2}a)$ je střed plochy. Čáry $\varphi =$ konst jsou přímky, jež s osou Ox svírají úhel φ, $r =$ konst jsou jejich ortogonální trajektorie. Parametry φ, $\varphi + \pi$ patří téže přímce, parametry $+ \varphi$, $- \varphi$ patří přímkám, které se sekou na ose Oz.

Pro součinitele tečné roviny

$$u(X - x) + v(Y - y) + w(Z - z) = 0 \tag{3}$$

dostaneme

$$u = a \sin \varphi \,.\, \sin 2\varphi, \; v = - a \cos \varphi \,.\, \sin 2\varphi, \; w = r,$$

rovnice tečné roviny bodu (r_0, φ_0) je tedy

$$a \sin 2\varphi_0 \,(X \sin \varphi_0 - Y \cos \varphi_0) + r_0 Z = a r_0 \sin^2 \varphi_0. \tag{4}$$

Dosadíme-li z rovnic (2) za běžné souřadnice, dostaneme po redukci

$$r = \frac{r_0}{\sin 2\varphi_0} \sin (\varphi_0 + \varphi), \tag{5}$$

což je polární rovnice kruhu v rovině (xy) o středu $\left(\frac{r_0}{4 \cos \varphi_0}, \frac{r_0}{4 \sin \varphi_0}\right)$ a poloměru $\frac{r_0}{2 \sin 2\varphi_0}$, jenž, jak známo, je průmětem elipsy, ve které tečná rovina seče plochu.

Všimněme si křivky na konoidu dané rovnicí

$$r = 2g \sin 2\varphi. \tag{6}$$

Tečné roviny v bodech této křivky sekou konoid v elipsách, jejichž středy podle (5) vyplňují kruh o středu O a poloměru g v rovině $\sigma(z = \frac{1}{2}a)$. Mezi součiniteli v rovnici (3) platí

$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2 \sin^2 2\varphi + r^2$$

tedy

$$\frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2 \sin^2 2\varphi}}$$

a pro body křivky (6) má poslední výraz hodnotu $\dfrac{2g}{\sqrt{a^2 + 4g^2}}$. *Tečné roviny v bodech křivky (6) svírají konstantní úhel s osou Oz a tvoří tedy rozvinutelnou plochu, jejíž hrana vratu je šroubovice.* Tou se chceme zabývati.

Po dosazení z (6) do rovnice tečné roviny dostáváme

$$X \sin \varphi - Y \cos \varphi + \frac{2g}{a} Z = 2g \sin^2 \varphi. \tag{7}$$

Charakteristika je dána rovnicí (7) a rovnicí

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi = 2g \sin 2\varphi. \tag{8}$$

K určení hrany vratu máme ještě rovnici

$$-X \sin \varphi + Y \cos \varphi = 4g \cos 2\varphi. \tag{9}$$

Šroubovice je dána vyjádřením

$$x = 4g \sin^3 \varphi, \quad y = 4g \cos^3 \varphi, \quad z = \tfrac{1}{2}a\,(1 + 3 \cos 2\varphi); \tag{10}$$

jest to tedy racionální křivka šestého stupně a kolmý řez válce na němž se nalézá, je asteroida. Nárys dostaneme vyloučením φ z prvé a třetí rovnice (10)

$$(z - 2a)^3 + \frac{27}{16}\frac{a^3}{g^2}\, x^2 = 0 \tag{10a}$$

má tedy bod $x = 0$, $z = 2a$ za bod vratu.

Zajímavá vlastnost křivky (10) vychází následující úvahou. Pro kosiny směrné tečny dostaneme snadno

$$\alpha : \beta : \gamma = 2g \sin \varphi : -2g \cos \varphi : -a;$$

normální rovina bodu φ má rovnici

$$2Xg \sin \varphi - 2Yg \cos \varphi - aZ + \frac{a^2}{2} + \left(8g^2 + \frac{3a^2}{2}\right) \cos 2\varphi = 0. \tag{11}$$

Dvojím derivováním dostaneme snadno

$$2Xg\cos\varphi + 2Yg\sin\varphi - 2\sin 2\varphi\left(8g^2 + \frac{3a^2}{2}\right) = 0, \tag{11a}$$

$$-2Xg\sin\varphi + 2Yg\cos\varphi - 4\cos 2\varphi\left(8g^2 + \frac{3a^2}{2}\right) = 0. \tag{11b}$$

Rovnice (11) a (11a) určují polární plochu, s (11b) pak hranu vratu, t. j. *g. místo středu oskulační koule.* V parametrickém vyjádření jest

$$\begin{aligned} x &= \frac{16g^2 + 3a^2}{g}\sin^3\varphi, \quad y = \frac{16g^2 + 3a^2}{g}\cos^3\varphi, \\ z &= \frac{a}{2} - \frac{3}{a}\left(8g^2 + \frac{3a^2}{2}\right)\cos 2\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Tato křivka je opět šroubovice na asteroidickém válci a snadným výpočtem zjistíme, že *protíná jeho površky pod týmž úhlem jako šroubovice (10) protíná površky příslušného válce.*

Jiná pozoruhodná vlastnost je, že šroubovice (10) a (12) *se nalézají na rotačních hyperboloidech.* Skutečně z rovnic (10) jde nejprve

$$x^2 + y^2 = g^2(1 + 3\cos^2 2\varphi),$$

a pak vyloučením 2φ

$$\frac{x^2 + y^2}{4g^2} - \frac{4}{3a^2}\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = 1, \tag{13}$$

což je jednodílný rotační hyperboloid se středem O (ve středu konoidu), poloměrem hrdelní kružnice $2g$ a konstantní délkou imaginární poloosy rovnou $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Šroubovice (12) nalézá se také na rotačním jednodílném hyperboloidu

$$\frac{4g^2}{m^4}(x^2 + y^2) - \frac{4a^2}{3m^4}\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = 1, \tag{14}$$

kde psáno pro krátkost m^2 místo $16g^2 + 3a^2$.*)

Vraťme se nyní k dotykové čáře konoidu s uvažovanou rozvinutelnou plochou. Její půdorys (6) neb v pravoúhlých souřadnicích

$$(x^2 + y^2)^3 = 16g^2x^2y^2 \tag{15}$$

je čtyřcípá růžice. Parametricky je dána dotyková křivka rovnicemi

$$x = 2g\sin 2\varphi\,.\cos\varphi, \quad y = 2g\sin 2\varphi\,.\sin\varphi, \quad z = a\sin^2\varphi \tag{16}$$

*) Tyto vlastnosti patří ostatně obecnějším šroubovicím na válcích s podstavou hypocykloidickou, jak ukázal M. Lerch ve svém článku: Asymptotické čáry na přímém konoidu; příspěvky k vlastnostem čar šroubových, Časopis, roč. 42 (1913), str. 8.

nebo, při $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = t$

$$x = 8g \frac{t(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3}, \quad y = 16g \frac{t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^3}, \quad z = 4a \frac{t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Je to tedy racionální křivka šestého stupně. Z bodu $A(0, 0, 0)$ se promítá kuželem čtvrtého stupně

$$y^2(x^2 + y^2) = \frac{16g^2}{a^2} x^2 z^2, \tag{17}$$

který má Ox, Oz za dvojné površky. Oz je také dvojnou na konoidu, čára je tedy tímto kuželem a konoidem úplně charakterisována. Pro konstrukci poznamenejme, že řez kužele (17) s rovinou $z = \frac{1}{2}a$ je

$$y^2(x^2 + y^2) - 4g^2x^2 = 0 \text{ či } r = g \operatorname{cotg} \varphi. \tag{18}$$

Podobně průmět z bodu $(0, 0, a)$ do střední roviny je

$$x^2(x^2 + y^2) - 4g^2y^2 = 0 \text{ či } r = g \operatorname{tg} \varphi. \tag{19}$$

Oba průměty jsou t. zv. křivky *kappa*.

Průmět do roviny (xz) jest

$$a^3x^2 - 16g^2z\,(a - z)^2 = 0; \tag{20}$$

jest tedy $x = 0$, $z = a$ dvojný bod s reálnými dvojnými tečnami $ax \pm 4g\,(a - z) = 0$.

Kuspidální body konoidu $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, a)$ jsou dotykové uzly naší sextiky.

Další zajímavá okolnost týká se obálky tečných rovin (7). Tato obálka je *rozvinutelná plocha čtvrté třídy*. Skutečně, hledáme-li obálku stop roviny (7) v souřadných rovinách $x = 0$, $y = 0$, dospíváme k parabolám

$$X = 0,\ Y^2 = \frac{16g^2}{a}(Z - a);\ Y = 0,\ X^2 = -\frac{16g^2}{a} . Z. \tag{21}$$

K tomuto výsledku lze dospěti také takto: Koeficienty rovnice (7) splňují podmínku

$$\frac{4g^2}{a^2}(u^2 + v^2) = w^2, \tag{22}$$

tečnová rovnice konoidu (1) jest

$$(u^2 + v^2)\,\pi + au^2w = 0. \tag{23}$$

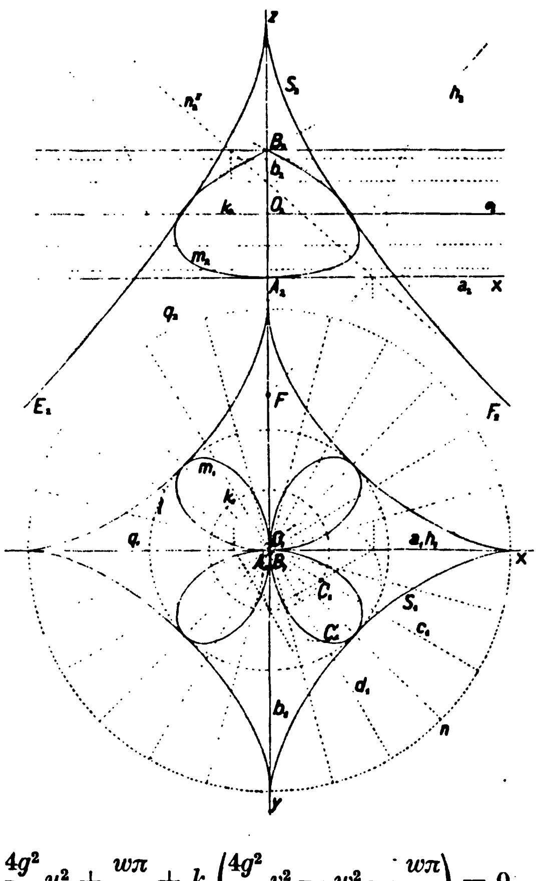
Vyloučením $u^2 + v^2$ dostaneme

$$\frac{4g^2}{a}u^2 + w\pi = 0, \tag{24}$$

z (22) a (24) dostáváme

$$\frac{4g^2}{a^2} v^2 = w^2 + \frac{w\pi}{a}. \tag{25}$$

Rovnice (22), (24), (25) představují dvojné kuželosečky uvažované obálky rovin. Prvá jest v rovině nevlastní, druhé a třetí odpovídají v bodových souřadnicích kuželosečky (21). Naší rozvinutelné ploše je tedy vepsána řada ploch



$$\frac{4g^2}{a^2} u^2 + \frac{w\pi}{a} + k\left(\frac{4g^2}{a^2} v^2 - w^2 - \frac{w\pi}{a}\right) = 0, \tag{26}$$

což lze v bodových souřadnicích napsati

$$\frac{a^2}{8g^2} x^2 + \frac{a^2}{8kg^2} y^2 + \frac{2a}{1-k} z + \frac{2ka^2}{(1-k)^2} = 0. \tag{26a}$$

Máme tedy řadu paraboloidů, jež mají společné roviny symetrie s konoidem. Mezi nimi je význačný rovnostranný paraboloid s vrcholem ve středu konoidu ($k = -1$):

$$\frac{ax^2}{8g^2} - \frac{ay^2}{8g^2} + z - \frac{a}{2} = 0. \tag{27}$$

Hledejme dotyčný bod této plochy s rovinou (7). Dostáváme

$$x = 2g \sin \varphi, \ y = 2g \cos \varphi, \ z = a \cos^2 \varphi. \tag{28}$$

Křivka dotyku je čtvrtého stupně, má za půdorys kružnici o poloměru $2g$ a nalézá se na konoidu (1). Nárys její jest parabola

$$x^2 = -\frac{4g^2}{a}(z - a).$$

Tato poslední vlastnost platí mnohem obecněji. Snadným výpočtem lze se přesvědčiti, že tečné roviny Plückerova konoidu v bodech křivky, jež má za průmět ve střední rovině kružnici, obalují rozvinutelnou plochu čtvrté třídy.

V připojeném obrazci jest O střed konoidu, a ($\equiv x$), b jsou torsální přímky, A, B jsou kuspidální body, k jest kružnice o poloměru g ve střední rovině σ. Kružnice l o poloměru $2g$ slouží k sestrojení křivky m_1 dané rovnicemi (16). Podle nich lze jednotlivé body takto sestrojiti: površka c_1 ať svírá s Ox úhel φ, d_1 úhel $R - \varphi$, kružnice o středu C_1 na k_1 seče d_1 v bodě C'_1 křivky m_1. m_2 odvozeno z m_1, B_2 je pro m_2 dvojný bod a tečny sestrojeny podle rov. (20). Šroubovice S daná rovnicemi (10) má za půdorys asteroidu S_1 s body vratu na kružnici n o poloměru $4g$. h_2 je meridián rotačního hyperboloidu, na němž se S nalézá a bylo ho použito k odvození S_2. S_2 a h_2 mají v bodech E_2, F_2 ($z = -a$) dotyk druhého stupně. Druhá šroubovice (12) není v obraze zanesena. V obraze je ještě zakreslena parabola q daná druhou z rovnic (21). Parabola daná první rovnicí je shodná, vzhůru otevřená a položená v průmětně třetí. V obraze není. Ohnisko F prvé je nalezeno užitím druhé stopy tečné roviny γ bodu C'_1.

*

Contribution à la géometrie descriptive du conoïde de Plücker.

(Extrait de l'article précédent.)

Le conoïde de Plücker soit défini par l'équation (1) ou par les équations (2). L'équation (6) définit une courbe située sur cette surface, g étant une longueur donnée. Les coordonnées cartésiennes d'un point de cette courbe sont données par les équations (16). Les points cuspidaux A, B du conoïde (voir la figure) sont les tacnodes de cette courbe gauche; sa projection horizontale est une rosace m_1, sa projection verticale est une cubique m_2, les projections du centre A ou B sur les plans horizontaux étant des courbes cappa. Les plans tangents du conoïde aux points de cette courbe forment un angle constant avec l'axe Oz et coupent le conoïde suivant des circonférences; ces circonférences ont leurs centres sur la circonférence k de rayon g située dans le plan σ. Les plans tangents en question engendrent une surface développable dont l'arrêt de rebroussement est une hélice (l'éq. 10); cette courbe du degré six est rationelle et se trouve située sur un cylindre droit dont la base est une asteroïde S_1 et sur un hyperboloïde de révolution (13). Cette hélice a d'ailleurs une propriété intéressante. Sa surface polaire a pour l'arrêt de rebroussement (lieu des centres des sphères osculatrices) une hélice située aussi sur un cylindre à base asteroïdale (12) et sur un hyperboloïde de révolution (14).

La surface d'égale pente engendrée par les plans tangents (7) aux points de la courbe (16) a pour ses traces sur les plans de symétrie du conoïde les paraboles (21). C'est donc une surface de la quatrième classe circonscrite à une famille de quadriques (26, 26a), ces quadriques étant des paraboloïdes. Un d'entre eux est donné par l'équation (27), la courbe de contact avec la développable considérée étant donnée par les équations (28). C'est une biquadratique située sur un cylindre de révolution et aussi sur le conoïde.