Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Schuster
Poznámky o trojúhelníku. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 5, R99--R107

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121724

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1932

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

dosazeno do (7) dá po zkrácení a uspořádání podle mocnin x:

$$e^4\xi^2x^4 - 2a^2e^4\xi x^3 + a^4 . (e^4 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2) . x^2 + 2a^8\xi x - a^{10} = 0. \quad (25)$$

Užijme nyní podmínky (22)! V našem případě jest:

$$A = e^4\xi^2,\ B = -2a^2e^4\xi,\ C = a^4 . (e^4 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2),$$
$$D = 2a^8\xi,\ E = -a^{10}.$$

Tím se změní (22) na:

$$2a^{12} . (e^4 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2)^3 + 108\, a^{16}e^4\xi^4 + 36a^{14}e^4\xi^2 (e^4 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2) - 108\, a^{14}e^8\xi^2 + 72a^{14}e^4\xi^2 . (e^4 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2) = 0;$$

krátíme-li $2 . a^{12}$ a sloučíme-li pokud možno, obdržíme výsledný tvar rovnice křivky Σ:

$$(a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 - e^4)^3 \pm 54a^2b^2e^4\xi^2\eta^2 = 0. \quad (26)$$

Rovnice (26) se velmi podobá rovnici evoluty středové kuželosečky, jež má tvar:

$$(a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 - e^4)^3 \pm 27a^2b^2e^4\xi^2\eta^2 = 0. \quad (27)[4]$$

Odtud lze dokázati, že naše křivka Σ pro středovou kuželosečku leží celá uvnitř příslušné evoluty, považujeme-li střed elipsy (hyperboly) za vnitřní (vnější) bod evoluty.

Poznámky o trojúhelníku.

Dr. *Jan Schuster.*

1. Sestrojování obecných bodů v trojúhelníku prováděno jednak dělícími poměry nebo specielními konstrukcemi, jež pak dají řadu význačných bodů charakteristických.

V následujících řádcích podám jednoduchý způsob, který se hodí stejně pro určení obecných bodů jako bodů význačných.

Princip metody je vektorové sčítání. Představme si totiž, že v jedné straně, třeba BC, naneseme od vrcholů B a C protivně, buď ven nebo dovnitř dva stejné, protivné vektory $+m$ a $-m$. Když je pojímáme jako síly, zruší se navzájem. Když pak stejně ve straně CA naneseme $+n$, $-n$ a ve straně AB zase $+p$ a $-p$, je celý systém 6 sil v rovnováze. Ale mysleme si nyní vždy dva vektory v témž vrcholu sečteny. Tím vzniknou tři síly, jejichž přímky se musí protnout v témž bodě, a které musí zase dát touž nulovou výslednici.

---

[4]) Viz *Bydžovský* — tamtéž, str. 215—220.

Vyměníme-li některý pár stejných a protivných sil ven namířených se silami dovnitř mířícími neb naopak, obdržíme další tři body algebraicky přidružené.

Nejprve půjde o určení trojúhelníkových souřadnic vzniklého bodu. Věta sinová dá pro úhly γ_1, γ_2, jednak v trojúhelníku ABC, jednak v rovnoběžníku o stranách m, $-n$ rovnice

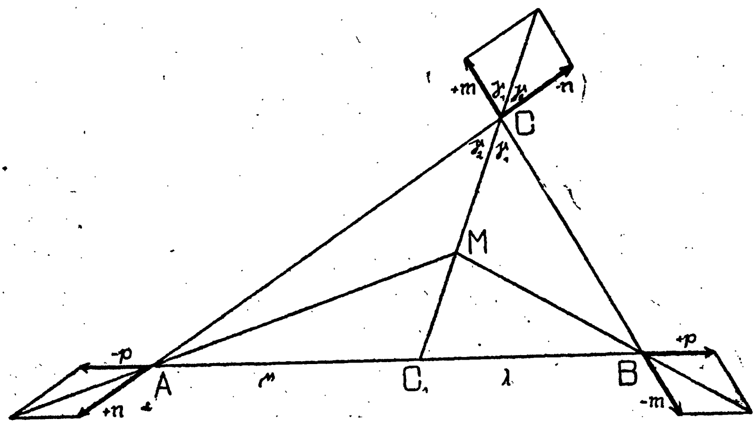
$$\sin \gamma_2 = \sin \gamma_1 = \frac{\mu}{b} : \frac{\lambda}{a} = m : n.$$

Odtud

$$\lambda : \mu = \frac{a}{m} : \frac{b}{n},$$

takže barycentrické souřadnice bodu M jsou

$$x : y : z = \frac{a}{m} : \frac{b}{n} : \frac{c}{p}.$$



Obr. 1.

Nyní můžeme vektory m, n, p volit buď obecně, nebo odvodit je z prvků trojúhelníka. V tomto posledním případě vzniknou význačné body základního trojúhelníka.

Na př. pro $m = a$, $n = b$, $p = c$ obdržíme těžiště. Kdybychom vektory pošinuli tak, aby bylo $m = c$, $n = a$, $p = b$, nebo $m = b$, $n = c$, $p = a$, vzniknou body o souřadnicích barycentrických $\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$ resp. $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$.

Když $m = v_a = 2p/a$, $n = v_c$, $p = v_b$, vznikne bod $x : y : z = a^2 : b^2 : c^2$, tedy bod Lemoineův. Cyklickou substitucí výše vytčenou vzniknou body $x : y : z := ac : ab : bc = \frac{1}{b} : \frac{1}{c} : \frac{1}{a}$ resp. $x : y : z = \frac{1}{c} : \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$.

Kdybychom nanesli na výšku v_a (v_b, v_c) délku a (b, c), od vrcholu příslušného a vedeme-li jejím koncovým bodem rovnoběžku ke straně, bude její délka $a_1 = \frac{a^2}{v_a} = \frac{a^3}{2p}\left(\frac{b^3}{2p}, \frac{c^3}{2p}\right)$. Zvolíme-li tyto délky za vektory m, n, p, bude mít vzniklý bod souřadnice $x : y : z = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}$, tedy je reciproký k Lemoineovu. Kdybychom tento úkon opakovali na trojúhelníku o základně a_1, přeneseme zase a_1 na výšku v_a, bylo by $a_2 = \frac{a_1 a}{v_a} = \frac{a^3}{v_a{}^2} = \frac{a^5}{(2p)^2}$, atd., z čehož $x : y : z = \frac{1}{a^4} : \frac{1}{b^4} : \frac{1}{c^4}$. Ale stejně bychom obdrželi zpětně, určíce výšku v'_a, jež patří k základně v_a homoteticky položené k a, $v'_a = \frac{v_a{}^2}{a} = \frac{4p^2}{a^3}$, $x : y : z = a^4 : b^4 : c^4$ nebo $v''_a = \frac{v'_a\, v_a}{a} = \frac{v_a{}^3}{a^2} = \frac{8p^3}{a^5}$, což by dalo $x : y : z = a^6 : b^6 : c^6$. Stejné opakování by vedlo na body se souřadnicemi úměrnými sudým mocninám stran.

Kdybychom však na všecky výšky nanesli od vrcholů stejné úseky ϱ a koncovými body vedli rovnoběžky ke stranám, obdrželi bychom

$$a'_1 = \varrho \frac{a}{v_a} = \varrho \frac{a^2}{2p} \text{ atd., což by dalo } x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

a opakováním

$$a'_2 = a'_1 \frac{a}{v_a} = \varrho \frac{a^4}{4p^2} \text{ atd., z čehož } x : y : z = \frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3} : \frac{1}{c^3}.$$

Naproti tomu výšky odpovídající stejně dlouhým základnám τ by měly hodnoty $h_a = \tau \frac{v_a}{a} = \frac{2p\tau}{a^2}$ atd., což dá

$$x : y : z = a^3 : b^3 : c^3,$$

opakovaný úkon by vedl na $h'_a = h_a \frac{v_a}{a} = \frac{4p^2\tau}{a^4}$ atd., z čehož

$$x : y : z = a^5 : b^5 : c^5.$$

Takovým způsobem se vytvoří body, jejichž souřadnice jsou úměrné stejným lichým, kladným nebo záporným mocninám stran trojúhelníka.

Podobně úseky výšek od vrcholů k ortickému středu, pro které platí

$$\bar{v}_a : \bar{v}_b : \bar{v}_c = \frac{b \cos \alpha}{\sin \beta} : \frac{c \cos \beta}{\sin \gamma} : \frac{a \cos \gamma}{\sin \alpha} = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma,$$

by daly

$$x : y : z = \frac{a}{\cos \alpha} : \frac{b}{\cos \beta} : \frac{c}{\cos \gamma} = \frac{1}{bc \cos \alpha} : \frac{1}{ca \cos \beta} : \frac{1}{ab \cos \gamma},$$

což není než ortický střed.

Doplňky předchozích úseků do celých výšek jsou v poměrech

$$\bar{\bar{v}}_a : \bar{\bar{v}}_b : \bar{\bar{v}}_c = c \cos \beta \operatorname{cotg} \gamma : a \cos \gamma \operatorname{cotg} \alpha : b \cos \alpha \operatorname{cotg} \beta =$$

$$= \cos \beta \cos \gamma : \cos \gamma \cos \alpha : \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{\cos \alpha} : \frac{1}{\cos \beta} : \frac{1}{\cos \gamma},$$

tedy dají bod $x : y : z = a \cos \alpha : b \cos \beta : c \cos \gamma$.

Průměty stran $a \cos \beta$, $b \cos \gamma$, $c \cos \alpha$ dají

$$x : y : z = \frac{1}{\cos \beta} : \frac{1}{\cos \gamma} : \frac{1}{\cos \alpha}.$$

2. Mezi body Brocardovými a Lemoineovým stanoveny četné vztahy, na př. vepíšeme-li trojúhelníku elipsu s ohnisky v bodech Brocardových, protnou se spojnice vrcholů a dotykových bodů na stranách trojúhelníka v bodě Lemoineově.

Udáme nyní jiný vztah, při čemž popíšeme konstrukci bodů Brocardových pouze pravítkem a pravoúhlým trojúhelníkem, s vyloučením kružítka.

Vepsati trojúhelník, jehož strany jsou kolmé ke stranám základního trojúhelníka, jest úkol dvojznačný, neboť spouštět kolmice možná ve směrech dvou protivných. Konstrukce se dá provést na základě homotetie, tedy stačí pouze pravítko a pravoúhlý trojúhelník (obr. 2).

Vzniklé trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou středově souměrné a podobné danému.

Nejprve určíme poměr podobnosti ξ, vyjdouce od identity $AB_2 + B_2B = c$, při čemž z podrobnosti plyne $AB_2 = c\xi$, $B_2C_2 = a\xi$, takže

$$\xi\,[c \operatorname{cotg} \alpha + a \operatorname{cosec} \beta] = c$$

nebo dělíme-li číslem c a užijeme-li věty sinové, bude

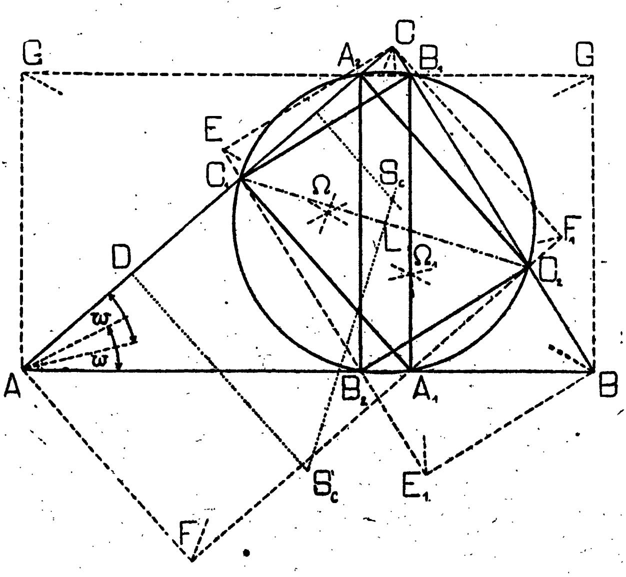
$$\xi \left[\operatorname{cotg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}\right] = 1.$$

Hledíme-li k tomu, že sin $\alpha = \sin(\beta + \gamma)$, bude

$$\frac{1}{\xi} = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\omega,$$

když ω jest úhel Brocardův. Je tedy poměr podobnosti $\xi = \operatorname{tg}\omega$.

Když tedy pošineme stranu A_2B_2 do vrcholu A nebo B, a spojíme-li polohu F_1 resp. F, jež odpovídají bodu B_2, s vrcholem B resp. C, vznikne přímka odchýlená o úhel ω od strany AB. Když tento úkon opakujeme pro všecky strany, protnou se vzniklé



Obr. 2.

spojnice po třech v obou bodech Brocardových, čímž připověděná konstrukce dovršena.

Oba trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ určují šestiúhelník, v němž jsou protější strany rovnoběžné a stejné, a jejich délka se určí snadno. Na př.

$$\overline{A_1B_2} = c - \overline{A_1B_1}\operatorname{cotg}\beta - \overline{A_2B_2}\operatorname{cotg}\alpha =$$
$$= c\xi\left[\frac{1}{\xi} - \operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\gamma\right] = c\xi\operatorname{cotg}\gamma = 2r\,\xi\cos\gamma,$$

je-li r poloměr kružnice opsané základnímu trojúhelníku.

V obdélníku $A_1B_2A_2B_1$ jest úhlopříčka A_1A_2 rovna

$$\sqrt{c^2\xi^2\operatorname{cotg}^2\gamma + c^2\xi^2} = c\xi\operatorname{cosec}\gamma = 2r\,\xi.$$

Ježto jest úhlopříčka $\overline{A_1A_2}$ společná předchozímu obdélníku a obdélníku $C_1A_1C_2A_2$, jsou úhlopříčky všech tří obdélníků stejné, mají společný průsečík, jenž je středem kružnice opsané šestiúhelníku $A_1B_2C_2A_2B_1C_1$, a její poloměr je $r\xi$.

Vzdálenosti středu šestiúhelníka od stran jsou $\frac{1}{2}a\xi$. $\frac{1}{2}b\xi$, $\frac{1}{2}c\xi$, takže jeho barycentrické souřadnice dány úměrami

$$x : y : z = a^2 : b^2 : c^2$$

a bod se ukazuje Lemoineovým bodem L.

Dále platí $CC_1 : CC_2 = \dfrac{B_1C_1}{\sin\gamma} : \dfrac{A_2C_2}{\sin\gamma} = a\,\xi : b\xi = a : b$. Ale z toho hned plyne, že trojúhelník CC_1C_2 se podobá trojúhelníku ABC, tedy jsou strany C_1C_2 a AB antiparalelní, což platí obdobně o dalších úhlopříčkách.

Opíšeme-li trojúhelníku CC_1C_2 a tětivovému čtyřúhelníku ABC_2C_1 kružnice, jde jejich centrála jakožto osa společné tětivy bodem L. Střed S_c onoho se určí z délky $LS_c = r\xi \operatorname{cotg}\gamma$ a poloměr $r_c = \dfrac{C_1C_2}{2\sin\gamma} = r\xi \operatorname{cosec}\gamma$.

K určení kruhu opsaného čtyřúhelníku ABC_2C_1 užijeme čtyřúhelníku $DC_1LS'_c$, kde D je střed úsečky AC_1, S'_c střed kruhu. Ježto má čtyřúhelník při D a L pravé úhly, platí

$$LS'_c \sin\beta = \tfrac{1}{2}b\xi \operatorname{cotg}\alpha + r\xi\cos\beta,$$

nebo

$$LS'_c = r\xi\,(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta).$$

Poloměr kruhu je dán rovnicí

$$r'^2_c = \overline{S'_cC_1}^2 = \overline{S'_cL^2} + L^2C_1^2 = r^2\xi^2\,[1 + (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)^2].$$

Odtud hned

$$LS'_c = LS_a + LS_b,$$

a proto

$$SS'_a + LS'_b + LS'_c = 2(LS_a + LS_b + LS_c).$$

Pro vzdálenost obou středů máme

$$S_cS'_c = S_cL + LS'_c = r\xi \operatorname{cotg}\gamma + r\xi\,(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta = r.$$

To platí pro každou antiparalelu, neboť středy kruhů jsou na průmětech středů úseků téže strany na přímky téhož směru, tedy jsou stejné.

Jsou tedy vzájemné vzdálenosti všech tří párů středů stejné, rovné poloměru kruhu opsaného základnímu trojúhelníku ABC.

$$L_aS'_a = S_bS'_b = S_cS'_c = r.$$

Pro poloměry odvodíme dále vztahy

$$\begin{aligned} r'^2_c - r_c^2 &= r^2\xi^2 [1 + (\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta)^2 - \mathrm{cosec}^2\,\gamma] \\ &= r^2\xi^2 [(\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta)^2 - \mathrm{cotg}^2\,\gamma] \\ &= r^2\xi^2 (\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta + \mathrm{cotg}\,\gamma)(\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta \\ &\qquad - \mathrm{cotg}\,\gamma) \\ &= r^2\xi (\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta - \mathrm{cotg}\,\gamma). \end{aligned}$$

Sečteme-li rovnice takto tvořené pro indexy a, b, c, obdržíme

$$r'^2_a + r'^2_b + r'^2_c - r_a^2 - r_b^2 - r_c^2 = r^2.$$

Další vztah mezi těmito veličinami dají součiny úseků

$$LS_c \,.\, LS'_c = r^2\xi^2 \,\mathrm{cotg}\,\gamma\, (\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta) = r^2\xi^2 \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha \sin\beta} =$$
$$= r^2\xi^2 (1 - \mathrm{citg}\,\alpha\, \mathrm{cotg}\,\beta).$$

Odtud tedy, ježto

$$\mathrm{cotg}\,\beta\, \mathrm{cotg}\,\gamma + \mathrm{cotg}\,\gamma\, \mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha\, \mathrm{cotg}\,\beta = 1,$$

platí

$$LS_a \,.\, LS'_a + LS_b \,.\, LS'_b + LS_c \,.\, LS'_c = 2r^2\xi^2.$$

Součet součinů vzdáleností středů S_h a S'_h od bodu L ($h = a$, b, c) se rovná dvojmoci strany čtverce vepsaného do kružnice kolem šestiúhelníka $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ opsané.

Prodloužíme-li úhlopříčku C_1C_2 až protne stranu AB v bodě C_3, můžeme určit jeho dělicí poměr z věty Menelaovy. Ježto platí

$$-\frac{C_1C}{C_1A} = \frac{b - A_1C_1 \,\mathrm{cotg}\,\alpha}{A_1C_1 \,\mathrm{cotg}\,\alpha} = \frac{\mathrm{cotg}\,\beta + \mathrm{cotg}\,\gamma}{\mathrm{cotg}\,\alpha},$$

$$-\frac{C_2B}{C_2C} = \frac{C_2B_2 \,\mathrm{cotg}\,\beta}{a - C_2B_2 \,\mathrm{cotg}\,\beta} = \frac{\mathrm{cotg}\,\beta}{\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\gamma}.$$

Hledaný dělicí poměr

$$\lambda_3 = \frac{\mathrm{cotg}\,\alpha\, (\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\gamma)}{(\mathrm{cotg}\,\beta + \mathrm{cotg}\,\gamma)\, \mathrm{cotg}\,\beta} = \frac{\sin^3\beta \cos\alpha}{\sin^3\alpha \cos\beta}.$$

Provedeme-li tento úkon cyklicky, vidíme, že součin všech tří dělicích poměrů $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

Odtud věta: Antiparalelní přímky vedené bodem Lemoineovým protínají přidružené strany základního trojúhelníka v bodech kolineárních.

Rovnice této přímky jest

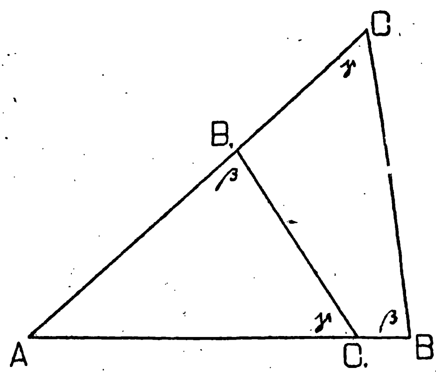
$$\frac{x\cos\alpha}{a^3} + \frac{y\cos\beta}{b^3} + \frac{z\cos\gamma}{c^3} = 0.$$

Když ji znásobíme číslem $2abc$ a když čitatele po zkrácení nahradíme trojčleny tvaru $b^2 + c^2 - a^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a^2$, můžeme ji psát takto

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2}\right) - 2(x + y + z) = 0,$$

tedy ji brát jako příslušnou svazku určenému přímkou v nekonečnu a přímkou Lemoineovou. Odtud plyne:

Uvažovaná přímka je rovnoběžná s harmonikálou bodu Lemoineova. Naopak: Těžiště, Lemoineův a třilineární pól uvažované přímky jsou kolineární.



Obr. 3.

3. Poslední vlastnost Lemoineova bodu nyní zobecníme. Hledejme všecky body $M(m, n, p)$, jimiž vedené antiparalely ke stranám základního trojúhelníka protnou přidružené přímky v bodech kolineárních.

Souřadnice bodů C_1 resp. C_2 dány poměry

$$(c - q \sin \beta) : q \sin \beta : 0 \quad \text{resp.} \quad (b - q \sin \gamma) : 0 : q \sin \gamma.$$

Kolineárnost bodů M, C_1, C_2 vede na rovnici

$$\begin{vmatrix} c - q \sin \beta, & q \sin \beta, & 0 \\ b - q \sin \gamma, & 0, & q \sin \gamma \\ m, & n, & p \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud se má určit veličina q, zatím neznámá, což dá přičtením druhého a třetího sloupce k prvnímu, znásobením posledního řádku číslem q a zkrácením druhého a třetího sloupce týmž číslem, ježto $m + n + p = 1$,

$$\begin{vmatrix} c, & \sin \beta, & 0 \\ b, & 0, & \sin \gamma \\ q, & n, & p \end{vmatrix} = 0$$

a tedy

$$q \sin\beta \sin\gamma - nc \sin\gamma - pb \sin\beta = 0,$$

neboli

$$q = \frac{nc \sin\gamma + pb \sin\beta}{\sin\beta \sin\gamma} = \frac{nc^2 + pb^2}{bc} 2r.$$

Přímka C_1C_2 má tedy rovnici

$$\begin{vmatrix} c - \dfrac{nc^2 + pb^2}{c}, & \dfrac{nc^2 + pb^2}{c}, & 0 \\ b - \dfrac{nc^2 + pb^2}{b}, & 0, & \dfrac{nc^2 + pb^2}{b} \\ x, & y, & z \end{vmatrix} = 0.$$

Průsek se stranou AB vyžaduje $x = 0$, takže pak pro průsečík platí

$$y\left(c - \frac{nc^2 + pb^2}{c}\right) \cdot \frac{1}{b} + z\left(b - \frac{nc^2 + pb^2}{b}\right) \cdot \frac{1}{c} = 0$$

nebo

$$[c^2 (m + p) - b^2 p]\, y + [b^2 (m + n) - nc^2]\, z = 0.$$

(Dokončení příště.)

PŘEHLED.

Přenos klavírní hudby bez použití mikrofonu; elektroakustický klavír. V loňském říjnovém čísle časopisu Öster. Radioamateur popisuje Dr. F. Noak nový elektroakustický klavír, který představuje podle jeho názoru značné obohacení instrumentální techniky; toto pojednání vyvolalo v letošním lednovém čísle téhož časopisu nočlánek od Fr. Kirama o autorství myšlenky přenosu klavírní hudby bez použití mikrofonu.

Obyčejný klavír reprodukuje vysoké tóny slabě, poněvadž resonanční deska je naladěna na střední polohu; chceme-li míti tóny dosti syté, musí se voliti dlouhé struny. Velmi často pak ruší u obyčejného klavíru okolnost, že je slyšeti úhoz kladívka, chceme-li, aby tón byl hlasitější. Poněvadž pak basové struny reprodukují základní tón poměrně slabě a svrchní tóny silně, nemají hluboké tóny stejnou „barvu“ jako tóny vysoké.

V moderní době pak je velmi často nutno reprodukovati klavírní hudbu rozhlasem nebo gramofonem; a tu nastává další