Vilém Baudys

O středu optickém a hlavních bodech čoček. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 4, 157--168

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121716`

$$d_{01}{}^2 d_{23}{}^2 + d_{02}{}^2 d_{13}{}^2 + d_{03}{}^2 d_{12}{}^2 - 2d_{01}\,d_{23}\,d_{02}\,d_{13} - 2d_{02}\,d_{13}\,d_{03}\,d_{12} - 2d_{03}\,d_{12}\,d_{01}\,d_{23} = 0,$$

oneb rozložíme-li součet na levé straně v součin

$$(d_{01}\,d_{23} + d_{02}\,d_{13} + d_{03}\,d_{12})(-d_{01}\,d_{23} + d_{02}\,d_{13} + d_{03}\,d_{12}) \times \times (d_{01}\,d_{23} - d_{02}\,d_{13} + d_{03}\,d_{12})(d_{01}\,d_{23} + d_{02}\,d_{13} - d_{03}\,d_{12}) = 0. \quad (6)$$

Porovnáme-li rovnici tuto s výsledkem čl. 27, shledáváme, že rovnice (6) zahrnuje již rovnici (7) článku předcházejícího co svého činitele a tedy větu Ptolemaeovu podává. Podmínku, by čtyři body ležely na kruhu, můžeme tudíž různě vyjádřiti, buď plochami (čl. 26) neb délkami (čl. 27, 28), jež určeny jsou těmi čtyřmi body aneb i relací mezi úhly čtyřúhelníku *ABCD*, kteráž z planimetrie známá, totiž, že součet úhlů na úhlopříčce ve čtyrúhelníku rovná se 180 stupňům.

(Pokračování.)

O středu optickém a hlavních bodech čoček.

Sepsal

prof. **V. Baudys** v Písku.

(Dokončení.)

Někdy však není dovoleno tloušťku čočky zanedbati a pak musíme užiti úplných formulí, jak byly vyvinuty v rov. (III) a γ (recte V). Tyto jsou ovšem složitější, nicméně dají se vhodnou transformací přivésti na jednodušší, podobně oněm, jež jsme s opominutím tloušťky čočky vyvinuli v rov. (IV) a (17), při čemž dlužno počítati vzdálenosti místo od vrcholů čočky ode dvou jiných bodů, které se hlavními body čočky nazývají. Jsou pak hlavní body takové dva body na ose, že jeden jest obrazem druhého.

Jejich poloha tím jest určena, že nějaký předmět, který se nachází v rovině v jednom hlavním bodě kolmo na osu postavené, (nazýváme ji první hlavní rovinu), dává obraz v druhé hlavní rovině, který jest mu rovný a vzpřímený (geometrický).

Podmínkou k tomu jest, $\frac{y'}{Y} = -1$.

Tehdy z rovnice (V) následuje:

$$-\varphi\psi' = a(\varphi' + \psi' - d) + d\varphi - \varphi\psi'.$$

z kteréžto rovnice určíme-li a, bude ono vzdáleností prvního hlavního bodu od vrcholu prvního, a jmenujme ji $= h$.

$$a = \frac{-d\varphi}{\varphi' + \psi' - d} = h \qquad (19)$$

nebo

$$h(\varphi' + \psi' - d) = -d\varphi.$$

Dosadíme-li do rovnice (III) místo a, dostaneme příslušné $\varkappa = h'$

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{a(\varphi' + \psi' - d) + d\varphi - \varphi'\psi)}{\psi(a\varphi' - ad + d\varphi)} = \frac{-\varphi'\psi}{\psi(a\varphi' - ad + d\varphi)}$$

nebo

$$a\varphi' - ad + d\varphi = -\varkappa\varphi'$$

$$a\varphi' - ad - a(\varphi' + \psi' - d) = -\varkappa\varphi'$$

$$a\psi' = \varkappa\varphi' \text{ čili } a\psi = \varkappa\varphi$$

z toho

$$\varkappa = h' = \frac{-d\psi}{\psi' + \varphi' - d} \qquad (20)$$

Z rovnice (18) a (20) jde:

$$h : h' = \varphi : \psi = \varphi' : \psi' = r : \varrho.$$

Dosadíme-li do rovnice (18) a (20)

$$\varphi = \frac{r}{n-1} \text{ atd.}$$

dostaneme upravivše:

$$h = -\frac{dr}{n(r + \varrho - d) + d} \qquad (21)$$

$$h' = -\frac{d\varrho}{n(r + \varrho - d) + d} \qquad (22)$$

Z toho je patrno, že poloha hlavních bodů jest závislá vedle tvaru čočky také na exponentu lomu, kdežto střed optický pouze na tvaru čočky závisí.

Při čočce dvojvypuklé jest r i ϱ kladné, h i h' záporné, tudíž leží první hlavní bod v pravo od vrcholu prvního, druhý v levo od vrcholu druhého a oba bodové leží uvnitř čočky, neboť píšeme-li

$$h = \frac{-d}{n\frac{r+\varrho}{r} - (n-1)\frac{d}{r}},$$

a pomníme-li, že jest

$$\frac{d}{r} < \frac{r+\varrho}{r},$$

jest patrně jmenovatel > 1 a tedy absolutně $h < d$; tak také bude $h' < d$,
na př.

$$r = \varrho \quad d = 0{\cdot}1r, \quad n = 1{\cdot}5$$

$$h = -\frac{d}{2n - 0{\cdot}1\,(n-1)} = -\frac{d}{2{\cdot}95} \text{ asi } d.$$

$$h = h' = \tfrac{1}{3}\,d,$$

vzdálenost obou tedy $\frac{1}{3}\,d$.

Při ploskovypouklé jest $\varrho = \infty$, tedy:

$$h = 0, \qquad h' = -\frac{d}{n};$$

první hlavní bod nalezá se ve vrcholu křivé plochy, druhý uvnitř čočky; nebo pro

$$n > 1 \qquad h' < d.$$

na př.:

$$n = \tfrac{3}{2} \qquad h' = \tfrac{2}{3}\,d.$$

Při dutovypouklé jest $\varrho > r$ a jest negativní, tedy

$$h = \frac{dr}{n\,(\varrho - r + d) - d}$$

$$h' = -\frac{d\varrho}{n\,(\varrho - r + d) - d},$$

h jest zde kladné, h' záporné; první hlavní bod nalézá se tedy mimo čočku na straně většího zakřivení, a co se vzdáleností jejich týče, bude tu rozhodovat, oč jest $n\,(\varrho - r + d) > d$; na př.

$$\varrho = 2r, \quad d = 0{\cdot}1r \quad n = 1{\cdot}5$$

$$h = \frac{d}{1{\cdot}5 \times 1{\cdot}1 - 0{\cdot}1} = \frac{d}{1{\cdot}55} = \tfrac{16}{25}\,d, \quad h' = -2h = -1\tfrac{7}{25}\,d.$$

Z toho jest viděti, že i druhý hlavní bod nalézá se na straně většího zakřivení, jak také již z toho patrno, že předmět před čočkou ve vzdálenosti h, dává obraz geometrický taktéž na té straně před čočkou.

Při dvojduté čočce máme r i ϱ záporné, tedy

$$h = -\frac{dr}{n(r+\varrho+d)-d}, \quad h' = -\frac{d\varrho}{n(r+\varrho+d)-d}$$

opět oba uvnitř čočky.

Při ploskoduté jest $\varrho = \infty$ a r záporné; tedy

$$h = 0 \qquad h' = -\frac{d}{n},$$

první hlavní bod nalézá se opět ve vrcholu zakřivené plochy, druhý do vnitř.

Při vypukloduté jest $\varrho < r$ a ϱ záporné:

$$h = -\frac{dr}{n(r-\varrho-d)+d}, \quad h' = \frac{d\varrho}{n(r-\varrho-d)+d},$$

oba hlavní body padnou v tu stranu většího zakřivení.

Tyto hlavní body dají se sestrojiti podle návodu novější geometrie (o čemž viz časopis českých math. I. 2, 3, 4). Avšak můžeme též sestrojovati spůsobem obyčejným, a sice vzdálenost optického středu

$$m = \frac{dr}{r+\varrho}$$

podle uměry

$$m : d = r : r + \varrho;$$

ohniska při $d = 0$ z

$$\frac{1}{f} = \frac{\varphi' + \psi'}{\varphi' \psi} = \frac{\varphi + \psi}{\varphi \psi}$$

čili f je střed harmonický veličin φ, ψ, a dá se sestrojiti snadno; první bod hlavní

$$h = \frac{d\varphi}{\varphi' + \psi' - d}$$

podle úměry

$$h : d = \varphi : \varphi' + \psi' - d,$$

nebo

$$h : d = h + \varphi : \varphi' + \psi',$$

druhý hlavní bod

$$h' : d = h' + \psi : \varphi' + \psi'.$$

Počítáme-li vzdálenosti předmětu a obrazu od těchto bodů hlavních znamenajíce je a' a x', musíme klásti

$$a = a' + h, \qquad x = x' + h';$$

to dosadíce do rovnice (III) obdržíme:

$$\frac{1}{\varkappa' + h'} = \frac{a'(\varphi' + \psi' - d) + h(\varphi' + \psi' - d) + d\varphi - \varphi'\psi}{\psi(a'\varphi' - a'd + h\varphi' - hd + d\varphi)}$$

anebo zjednodušíme-li, poněvadž

$$h(\varphi' + \psi' - d) = -d\varphi,$$

a vezmeme-li reciprokou hodnotu:

$$\varkappa' + h' = \frac{\psi(a'\varphi' - a'd + h\varphi' - hd + d\varphi)}{a'(\varphi' + \psi' - d) - \varphi'\psi}$$

tedy

$$\varkappa' = \frac{\psi(a'\varphi' - a'd + h\varphi' - hd + d\varphi) - a'h'(\varphi' + \psi' - d) + h'\varphi'\psi}{a'(\varphi' + \psi' - d) - \varphi'\psi}.$$

Zjednodušíme-li pomníce, že

$$h'(\varphi' + \psi' - d) = -d\psi \text{ a } h'\varphi = h\psi$$

bude

$$\varkappa' = \frac{a'\varphi'\psi}{a'(\varphi' + \psi' - d) - \varphi'\psi}$$

čili

$$\frac{1}{\varkappa'} = \frac{\varphi' + \psi' - d}{\varphi'\psi} - \frac{1}{a'}, \tag{VI}$$

kladouce pak veličinu konstantní

$$\frac{\varphi' + \psi' - d}{\varphi'\psi} = \frac{1}{f'}$$

bude

$$\frac{1}{\varkappa'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{a'} \tag{VI a}$$

Dálka ohniska f' dá se ze známých již veličin φ, ψ, d určiti, neboť jest

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\varphi} - \frac{d}{n\varphi\psi} \tag{23}$$

a také snadno se dá sestrojiti podle úměry:

$$\frac{\varphi' + \psi' - d}{\varphi'\psi} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi'\psi} = \frac{h}{f'};$$

nebo

$$\frac{d}{\psi'} = \frac{h}{f'}; \tag{24}$$

pro $d = o$ měli bychom jako prvé;

$$f' = \frac{\varphi\psi}{\varphi + \psi};$$

dosadíme-li pak do rovnice (23) příslušné veličiny za φ a ψ, obdržíme také:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{n r \varrho} d\right]. \qquad (25)$$

Co se pak poměrné velikosti obrazu a předmětu týče, měli jsme rov. γ (recte V), do které když dosadíme $a = a' + h$, bude

$$\frac{y'}{Y} = \frac{\varphi\psi'}{a'(\varphi'+\psi'-d) + h(\varphi'+\psi'-d) + d\varphi - \varphi\psi'}$$

čili

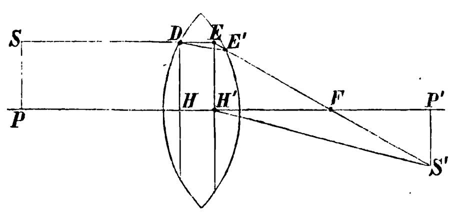
$$\frac{y'}{Y} = \frac{\varphi\psi'}{a'(\varphi'+\psi'-d) - \varphi\psi'} = \frac{k'}{a'} \qquad \text{(VII)}$$

nebo

$$\frac{y'}{Y} = \frac{f'}{a'-f'};$$

z toho dá se odvoditi jednoduché pravidlo, jak k danému předmětu jeho obraz sestrojiti lze. Vedeme-li si přímku z bodu S

Obr. 10.



do prvního hlavního bodu H a spojíme-li druhý hlavní bod H' s S', jehož pata na ose jest P' (obr. 10.), tedy jest $PH = a'$ $H'P' = k'$, a podle rovnice

$$\frac{y'}{Y} = \frac{k'}{a'}$$

bude $SH \parallel S'H'$, t. j. paprslek, který do prvního hlavního bodu směřuje, tak se láme, že z čočky vychází rovnoběžně s paprskem dopadlým, a sice tak jakoby z druhého hlavního bodu vycházel. Na tomto paprsku bude tedy ležeti bod S'; známe-li pak bod P', obraz bodu P, můžeme v něm vztýčiti kolmici, která paprslek v bodu S' protne.

Avšak není ani zapotřebí znáti bod P'; místo toho můžeme si vésti ještě jeden paprslek, k čemuž se hodí ten, jenž jde rovnoběžně s osou. Poněvadž víme, že každý bod v první hlavní rovině má vzhledem osy právě tak položený obraz v druhé hlavní rovině, zřiďme si tedy v bodech H a H' obě hlavní roviny. Každý paprslek, který před svým vstoupením do čočky do určitého bodu první hlavní roviny směřuje, tak se v čočce láme, jako by ze stejnolehlého bodu druhé hlavní roviny vycházel. Proto také paprslek rovnoběžný s osou, který do bodu D směřuje, půjde z čočky, jakoby z bodu E vycházel, při čemž $H'E = HD$. Dále víme, že paprsky dopadající rovnoběžně s osou procházejí ohniskem čočky F. A proto znajíce polohu bodu F, můžeme jen vésti přímku EF, která se s předešlou setká v bodu S a bude $S' P'$ obraz přímky SP.

Tento spůsob odvozování dá se také při soustavě více čoček upotřebiti, když příslušné veličiny pro jednotlivé čočky známy jsou. Neboť značí-li nám f_1, f_2 dálky ohniskové dvou čoček vzhledem k bodům hlavním, S pak vzdálenost obou čoček počítajíce ji od druhého hlavního bodu první čočky až do prvního hlavního bodu druhé čočky, máme při známém již označení pro první čočhu:

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{a'} \tag{α}$$

pro druhou ale

$$\frac{1}{k''} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{a''}. \tag{β}$$

Pak bude v soustavě těchto dvou čoček $a'' = k' - S$ vzdáleností svítícího bodu vzhledem čočky druhé, která se ale musí bráti záporně, tudíž

$$\frac{1}{k''} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{k'-S};$$

z (α) následuje

$$k' = \frac{a' f_1}{a'-f_1}, \quad k' - S = \frac{a' (f_1-S) + S f_1}{a'-f_1};$$

tím se stane druhá rovnice

$$\frac{1}{k''} = \frac{1}{f_2} + \frac{a_1-f_1}{a' (f_1-S) + S f_1}$$

a stejným jako v rovnici (III) spůsobem:

$$\frac{1}{k''} = \frac{a'(f_1+f_2-S)+Sf_1-f_1f_2}{f_2(a'f_1-a'S+Sf_1)}. \quad \text{(III } a\text{)}$$

Jak patrno, obdrželi jsme podobnou rovnici jako tam (III), jenom s tím rozdílem, že nastupuje f_1 místo φ neb φ'
f_2 „ ψ „ ψ',
kterážto různost zde proto mizí, že obě ohniska každé čočky jsou si rovny.

A proto taky docela analogicky obdržíme (V a)

$$\frac{y'}{Y} = \frac{f_1f_2}{a'(f_1+f_2-S)+Sf_1-f_1f_2};$$

kdybychom pak při dvou bezprostředně se dotýkajících čočkách kladli $S=0$, bylo by

$$\frac{1}{k''} = \frac{f_1+f_2}{f_1f_2} - \frac{1}{a'}; \quad \text{(IV. } a\text{)}$$

tak žeby spojené čočky působily jako jedna čočka, jejíž ohnisková dálka by byla

$$F = \frac{f_1f_2}{f_1+f_2} \text{ čili } \frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2};$$

a

$$\frac{1}{k''} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a'}. \quad \text{(IV. } b\text{)}$$

Podobně také

$$\frac{y'}{Y} = \frac{f_1f_2}{a'(f_1+f_2)-f_1f_2} = \frac{k''}{a'} = \frac{F}{a'-F}. \quad (18\ a)$$

Nemůže-li se ale S zanedbati, můžeme opět stanoviti dva body hlavní pro tuto soustavu a tu dostaneme pro vzdálenost H prvního hlavního bodu soustavy od prvního hlavního bodu čočky f_1

$$H = -\frac{Sf_1}{f_1+f_2-S}, \quad (19\ a)$$

a pro vzdálenost druhého hlavního bodu H' od druhého hlavního bodu čočky f_2

$$H' = -\frac{Sf_2}{f_1+f_2-S}. \quad (20\ a)$$

Vzdálenosti středu optického M a M' dají se podobně vyjadřiti

$$M = \frac{Sf_1}{f_1+f_2} \quad (19\,b), \qquad M' = \frac{Sf_2}{f_1+f_2}. \quad (20\,b)$$

Z těchto rovnic vyplývá

$$M : M' = H : H' = f_1 : f_2 \qquad (26)$$

Zavedeme-li vzdálenosti od hlavních bodů píšíce

$$k'' = K + H', \quad a' = A + H,$$

když K a A týž význam mají vzhledem H a H' jako k' a a' měly vzhledem h a h', dostaneme obdobně

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{F} - \frac{1}{A}, \qquad (27)$$

kde

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - S}$$

nebo

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{S}{f_1 f_2};$$

a

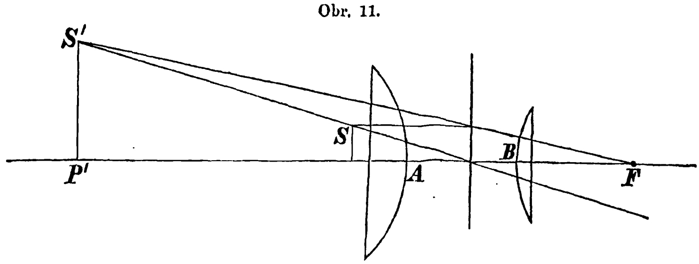
$$\frac{y'}{Y} = \frac{f_1 f_2}{A(f_1 + f_2 - S) - f_1 f_2} = \frac{K}{A} = \frac{F}{A - F}. \qquad (28)$$

Mějme na př. soustavu dvou čoček ploskovypuklých (jednoduchý drobnohled), a budiž při první čočce $r = 4$, $n = \frac{3}{2}$, tedy

$$\frac{1}{f_1} = (n-1)\frac{1}{r} = \frac{1}{8}, \quad f_1 = 8$$

pro druhou budiž podobně ... $f_2 = 4$; vzdálenost vrcholů AB,

Obr. 11.



jež se zde rovná vzdálenosti bodů hlavních $S = 2$; tedy bude

$$H = \frac{Sf_1}{f_1 + f_2 - S} = \frac{8}{5} = 1\tfrac{3}{5}, \quad M = \frac{Sf_1}{f_1 + f_2} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3},$$

$$H' = \frac{Sf_2}{f_1 + f_2} = \frac{4}{5}, \quad M' = \frac{Sf_2}{f_1 + f_2} = \frac{2}{3}, M + M' = S.$$

$$\frac{1}{F} = \frac{f_1 + f_2 - S}{f_1 f_2} = \frac{5}{16}, \quad F = 3\tfrac{1}{5}$$

$$\frac{y'}{Y} = \frac{K}{A} = \frac{F}{A - F} = \frac{K - F}{F};$$

pro $K = -20$

$$\frac{y'}{Y} = -\frac{23\frac{1}{5}}{3\frac{1}{5}} \doteq -7$$

poměr zvětšení obrazu.

Chtějíce obraz sestrojiti sestrojme napřed střed optický a hlavní roviny. Podlé

$$M : M' = f_1 : f_2 = 2 : 1$$

rozdělme přímku AB v tom poměru a vztyčme kolmici, pak podlé

$$\frac{H}{M} = \frac{f_1 + f_2}{f_1 + f_2 - S}$$

nebo

$$\frac{H}{H - M} = \frac{f_1 + f_2}{S} = \frac{6}{1},$$

z čehož také následuje:

$$\frac{H'}{H' - M'} = \frac{6}{1}.$$

můžeme zříditi roviny hlavní.

Při malém S, jako zde, lze postaviti $H = M$, $H' = M'$, neboť $\frac{H}{M}$, $\frac{H'}{M'}$ blíží se jedničce; a podlé známého již sestrojení jest $S'P'$ obrazem bodu SP, (viz obr. 11) kterýžto při drobnohledu se musí objeviti ve zřetelné dálce vidění; jest zde asi 7krát zvětšen a jak z výkonu patrno jest, pouze geometrický.

Tato úvaha dá se i na čoček více než dvě rozšířiti a formule budou předcházejícím podobny.

Přibereme-li ještě čočku třetí dálky ohniskové f_3, můžeme považovati soustavu dvou prvnějších za jedinou čočku dálky ohniskové F, při níž určeny již body hlavní rovnicemi (19 *a*), (20 *a*) a střed optický (19 *b*), (20 *b*). Určíme-li nyní společnou dálku ohniskovou F' a body hlavní, jakož i společný střed optický, a počítáme-li vzdálenost $D = S'' + H$, kde znamená S'' vzdálenost první a třetí čočky (hlavních bodů jejich), jako zase S' vzdálenost druhé a třetí, takže $S'' = S + S'$, budeme míti:

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{F} + \frac{1}{f_3} - \frac{D}{F f_3};$$

nebo dosazením

$$H = -\frac{Sf_1}{f_1+f_2-S}, \quad F = \frac{f_1 f_2}{f_1+f_2-S}$$

obdržíme:

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} - \frac{S}{f_1 f_2} - \frac{S''}{F f_3} - \frac{H}{F f_3}$$

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} - \frac{S}{f_1 f_2} - \frac{S''(f_1+f_2-S)}{f_1 f_2 f_3} + \frac{Sf_1}{f_1 f_2 f_3}$$

což když provedeme a náležitě upravíme, bude:

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} - \frac{S}{f_1 f_2} - \frac{S'}{f_2 f_3} - \frac{S''}{f_1 f_3} + \frac{S S''}{f_1 f_2 f_3}.$$

Pro hlavní body měli jsme při dvou čočkách:

$$H = -\frac{Sf_1}{f_1+f_2-S} = -\frac{SF}{f_2}, \quad H' = -\frac{Sf_2}{f_1+f_2-S} = -\frac{SF}{f_1};$$

při třech čočkách, dáme-li příslušné hodnoty, obdržíme

$$R = -\frac{DF'}{f_3}, \quad R' = -\frac{DF'}{F};$$

při čemž R a R' jsou vzdálenosti hlavních bodů vzhledem předešlých, anebo kdybychom poznačovali vzhledem druhé a třetí čočky D_1 a F_1, kteréžto veličiny z předešlých vycházejí tím, že zaměníme f_1 do f_2, f_2 do f_3, S do S', při čemž

$$D_1 = S'' + H_1' \text{ a } H_1 = -\frac{S'f_2}{f_2+f_3-S'}$$

$$H_1' = -\frac{S'f_3}{f_2+f_3-S'}$$

nabudeme

$$R'' = \frac{D_1 F'}{F_1},$$

kdežto R' a R'' jsou počítány od poslední a od první čočky. Dosazením obdržíme:

$$D : F = \frac{S''+H}{F} = \frac{S''(f_1+f_2-S) - Sf_1}{f_1 f_2} =$$

$$\frac{S'f_1 + S''f_2 - SS''}{f_1 f_2} = \frac{S'}{f_2} + \frac{S''}{f_1} - \frac{SS''}{f_1 f_2};$$

podobně

$$D_1 : F_1 = \frac{S'' + H_1'}{F} = \frac{S''(f_2 + f_3 - S') - S'f_2}{f_2 f_3} =$$

$$\frac{Sf_2 + S''f_3 - S'S''}{f_2 f_3} = \frac{S}{f_3} + \frac{S''}{f_2} - \frac{S'S''}{f_2 f_3}$$

proto bude

$$R'' = F' . \frac{Sf_2 + S''f_3 - S'S''}{f_2 f_3}$$

a

$$R' = F' . \frac{S'f_1 + S''f_2 - SS''}{f_1 f_2} .$$

Co se týče středu optického, tu již z předešlého známo jest, že bylo

$$M : M_1 = H : H' \text{ a } M + M' = S.$$

Použijíce toho, můžeme psáti, když N a N' vzdálenosti optického středu znamenají:

$$N : N' = R'' : R' = \frac{D_1}{F_1} : \frac{D}{F} ,$$

kterážto úměra dobře se hodí k sestrojení středu optického a tím také k sestrojení obrazu.

Počítajíce pak od hlavních bodů soustavy budeme míti podobně jako dříve pro vzdálenost předmětu A' a obrazu jeho K' rovnici:

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{F'} - \frac{1}{A'}$$

a pro poměr obrazu k předmětu:

$$\frac{y''}{Y} = \frac{F'}{A' - F'} .$$