Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

O troj- a čtyrúhelnících

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 5, 269--273

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121690

Vlastnosti, které dokážeme o poloze průsečníků stran trojúhelníků abc a $a'b'c'$, budou platiti i o trojúhelnících $a_3b_3c_3$ a $a_3'b_3'c_3'$, poněvadž tyto jsou obrazy oněch a jestli bod na přímce, jest i obraz průmětu toho bodu na obrazu průmětu té přímky.

Zobrazme si v obr. 3. dva trojúhelníky abc a $a'b'c'$, které mají strany stejnoměrné. O těch dvou trojúhelnících snadno dokážeme druhou větu nadepsanou a bude tím tedy dokázána i o dvou trojúhelnících, jejichž vrcholy určují tři přímky jediným bodem procházející. Stranu ab protíná nesouhlasná strana $a'c'$ v α a strana $a'b'$ stranu ac v α', jsou pak α a α' ty průsečníky, které jsme ve větě druhé nazvali k sobě přináležejícími; taktéž sestrojí se i $\beta\beta'$ a $\gamma\gamma'$. Snadno dokážeme nyní, že $\beta\beta'$ a $\gamma\gamma'$ se protínají na aa' $\alpha\alpha'$ a $\gamma\gamma'$ na bb' a $\alpha\alpha'$ a $\beta\beta'$ na cc'. Hledíme-li na př. k trojúhelníkům $\gamma\beta'\alpha'$ a $\alpha\beta\gamma'$, jsou strany jejich stejnosměrné a dle známé věty, která jest zvláštním případem věty první, musejí přímky určené k sobě příslušnými vrcholy jejich procházeti bodem jediným, to jsou však přímky $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ a aa', t. j. $\beta\beta'$ a $\gamma\gamma'$ protínají se na aa'. Totéž dokáže se o druhých dvou párech těch přímek, hledí-li se 1. k $\triangle\, ab\gamma$ a $\triangle\, \alpha'b'\gamma'$ a 2. k $\triangle\, \alpha'\beta'c$ a $\alpha\beta c'$. Stanoví tedy tři přímky $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ a $\gamma\gamma'$ skutečně trojúhelník, jehož vrcholy jsou na třech přímkách A, B a C, čímž zároveň dokázána i věta druhá.

O troj- a čtyrúhelnících.

Od

A. Strnada.

1. Předpokládáme-li v stranách trojúhelníka ABC tři body, v straně $\overline{BC}$ bod A', v straně $\overline{CA}$ bod B' a C' v straně $\overline{AB}$, stanoví tyto trojúhelník nový $A'B'C'$, původnímu vepsaný. Jest úlohou poznámky této vyjádřiti poměr mezi obsahem trojúhelníka opsaného a vepsaného. — Aby úvahy naše zcela všeobecnými byly, nutno při označení ploch ohled míti ku vztahu kladnému neb zápornému. Ustanovme se tedy na př. na tom, považovati plochu trojúhelníka za kladnou, byl-li obvod jeho vy-

tvořen pohybem od levé strany k pravé, za zápornou v případu opačném. Označíme-li obsahy trojúhelníků $ABC = O$, $A'B'C' = O'$, $AB'C' = O_1$, $A'BC' = O_2$, $A'B'C = O_3$, jest pak pro všechny případy, ať vrcholy $A'B'C'$ jsou na vnějších neb vnitřních částích stran trojúhelníka ABC,

$$O' = O + O_1 + O_2 + O_3 \qquad (1)$$

Mějme dále na zřeteli poměr dělící bodu C' vzhledem k bodům A a B, t. j. poměr $\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = \gamma$, považujíce tento po spůsobu nové geometrie za záporný, jestli bod C' uvnitř délky $\overline{AB}$, za kladný pak, jestli vně této délky čili v prodloužení strany $\overline{AB}$.

Přejdouce od strany $\overline{AB}$ ku $\overline{BC}$, znamenejme poměr $\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = \alpha$, dále pak v straně $\overline{CA}$ poměr $\frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}} = \beta$; délky stran označme kratčeji $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ a ustanovme hodnoty úseček v těchto stranách obsažených. Pro kteroukoliv polohu bodu C' v straně $\overline{AB}$ jest na př.

$$\overline{AC'} + \overline{C'B} = \overline{AB}$$

a tedy

$$\gamma . \overline{BC'} - \overline{BC'} = c,$$

z čehož

$$\overline{BC'} = \frac{c}{\gamma - 1}, \quad \overline{AC'} = \frac{\gamma c}{\gamma - 1}.$$

Podobně obdržíme dále

$$\overline{CA'} = \frac{a}{\alpha - 1}, \quad \overline{BA'} = \frac{\alpha a}{\alpha - 1}$$

$$\overline{AB'} = \frac{b}{\beta - 1}, \quad \overline{CB'} = \frac{\beta b}{\beta - 1}. \qquad (2)$$

Vyjádřme obsahy trojúhelníků svrchu vytknutých spůsobem známým, ku znaménku stran zřetel majíce; i bude

$$2O = \overline{AB} . \overline{BC} . \sin B = \overline{BC} . \overline{CA} . \sin C = \overline{CA} . \overline{AB} . \sin A$$

$$2O_1 = \overline{AC'} . \overline{B'A} . \sin A$$

$$2O_2 = \overline{BA'} . \overline{C'B} . \sin B$$

$$2O_3 = \overline{CB'} . \overline{A'C} . \sin C \qquad (3)$$

Spojení rovnic (2) a (3) vede dále k výrazům

$$
\begin{aligned}
O_1 &= -\frac{\gamma\, bc \sin A}{2(\beta-1)(\gamma-1)} = -\frac{\gamma\, O}{(\beta-1)(\gamma-1)} \\
O_2 &= -\frac{\alpha\, ca \sin B}{2(\gamma-1)(\alpha-1)} = -\frac{\alpha\, O}{(\gamma-1)(\alpha-1)}\,, \qquad (4) \\
O_3 &= -\frac{\beta\, ab \sin C}{2(\alpha-1)(\beta-1)} = -\frac{\beta\, O}{(\alpha-1)(\beta-1)}
\end{aligned}
$$

kteréž do rovnice (1) vloženy dávají

$$O' = O\left[1 - \frac{\gamma}{(\beta-1)(\gamma-1)} - \frac{\alpha}{(\gamma-1)(\alpha-1)} - \frac{\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}\right]$$

čili

$$\frac{O'}{O} = \frac{\alpha\beta\gamma - 1}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}\,. \qquad (5)$$

Toť hledaný zákon souvislosti obsahů trojúhelníka opsaného a vepsaného.

Jestli na př.

$$\alpha = -1\,,\quad \beta = 2\,,\quad \gamma = \frac{5}{2}\,,$$

bude $O' = 2O$; pro $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = \frac{1}{2}$ jest $O' = -2O$.

V případě, že $\alpha = \beta = \gamma$, jest

$$\frac{O'}{O} = \frac{\alpha^3 - 1}{(\alpha-1)^3} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{(\alpha-1)^2}\,;$$

pro $\alpha = -1$ bude $O' = \frac{1}{4} O$, pro $\alpha = 2$ bude $O' = 7O$. Kterak lze tyto výsledky vysloviti ve formě poučky? Laskavý čtenář všimni sobě též případů, kde $\gamma = 1$ aneb $\gamma = 0$ a vysvětli je blíže. —

Pakliže $\alpha\beta\gamma = 1$, jest $O' = 0$, t. j. body $A'B'C'$ jsou v jediné přímce; tím vyjádřena známá *věta Menelaova.*

2. Uvažujme obdobně čtyrúhelník $ABCD$, v jehož stranách $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ dány jsou body A', B', C', D' co vrcholy čtyrúhelníka vepsaného $A'B'C'D'$. Při označení $ABCD = O$, $A'B'C'D' = O'$, $AA'D' = O_1$, $BB'A' = O_2$, $CC'B' = O_3$, $DD'C' = O_4$ jest s ohledem k principu znamének vždy

$$O' = O + O_1 + O_2 + O_3 + O_4\,. \qquad (6)$$

Určen-li bod A' v straně $\overline{AB} = a$ poměrem $\frac{\overline{AA'}}{\overline{BA'}} = \alpha$, bod B' v straně $\overline{BC} = b$ poměrem $\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{CB'}} = \beta$, bod C' v straně $\overline{CD} = c$ poměrem $\dfrac{\overline{CC'}}{\overline{DC'}} = \gamma$ a bod D' v straně $\overline{DA} = d$ poměrem $\dfrac{\overline{DD'}}{\overline{AD'}} = \delta$, vyjádřeny délky úseček v těchto stranách rovnicemi

$$\begin{aligned}
\overline{A'B} &= \frac{a}{\alpha - 1}, & \overline{AA'} &= \frac{\alpha a}{\alpha - 1} \\
\overline{B'C} &= \frac{b}{\beta - 1}, & \overline{BB'} &= \frac{\beta b}{\beta - 1} \\
\overline{C'D} &= \frac{c}{\gamma - 1}, & \overline{CC'} &= \frac{\gamma c}{\gamma - 1} \\
\overline{D'A} &= \frac{d}{\delta - 1}, & \overline{DD'} &= \frac{\delta d}{\delta - 1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Co se obsahů O, O_1, O_2, O_3, O_4 týče, jest

$$2O = ad \sin A + bc \sin C = ab \sin B + cd \sin D$$

a s ohledem k rovnicím (7)

$$\begin{aligned}
O_1 &= \frac{1}{2}\, \overline{D'A}\, .\, \overline{AA'}\, .\, \sin A = \frac{\alpha\, ad \sin A}{2(\alpha-1)(\delta-1)}, \\
O_2 &= \frac{1}{2}\, \overline{A'B}\, .\, \overline{BB'} \sin B = \frac{\beta\, ab \sin B}{2(\alpha-1)(\beta-1)}, \\
O_3 &= \frac{1}{2}\, \overline{B'C}\, .\, \overline{CC'} \sin C = \frac{\gamma\, bc \sin C}{2(\beta-1)(\gamma-1)}, \\
O_4 &= \frac{1}{2}\, \overline{C'D}\, .\, \overline{DD'} \sin D = \frac{\delta\, cd \sin D}{2(\gamma-1)(\delta-1)},
\end{aligned} \tag{8}$$

Jak z toho poznati lze, nemožno při čtyrúhelníku vyjádřiti obecně poměr obsahů O' a O co funkci poměrů α, β, γ, δ; jest-li však splněny podmínky

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{(\alpha-1)(\delta-1)} &= \frac{\gamma}{(\beta-1)(\gamma-1)}, \\
\frac{\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)} &= \frac{\delta}{(\gamma-1)(\delta-1)},
\end{aligned} \tag{9}$$

pak jest

$$O_1 + O_3 = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)(\delta-1)}[ad \sin A + bc \sin C] = \frac{\alpha O}{(\alpha-1)(\delta-1)}$$

$$O_2 + O_4 = \frac{\delta}{2(\alpha-1)(\beta-1)}[ab \sin B + cd \sin D] = \frac{\beta O}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

a tudíž

$$O' = O\left[1 + \frac{\alpha}{(\alpha-1)(\delta-1)} + \frac{\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}\right]. \qquad (10)$$

Řešíme-li rovnice (9) dle γ a δ, obdržíme dvé řešení a sice

$$\gamma = \alpha, \quad \gamma' = \frac{\alpha\beta - \alpha + 1}{\alpha\beta}, \quad \delta = \beta, \quad \delta' = \frac{1}{\alpha\beta - \alpha + 1}; \qquad (11)$$

řešení prvé $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$ značí, že poměry dělící v protějších stranách čtyrúhelníka daného jsou stejné a v případu tom obdržíme ze vzorce (10) rovnici

$$\frac{O'}{O} = 1 + \frac{\alpha + \beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}. \qquad (12)$$

Ku př. pro $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ jest $O' = \frac{1}{2}O$; pro $\alpha = \gamma = 2$, $\beta = \delta = 3$ jest $O' = \frac{7}{2}O$ atd.

Pro řešení druhé bude

$$\frac{O'}{O} = 1 - \frac{\alpha\beta - \alpha + 1}{(\alpha-1)(\beta-1)} + \frac{\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)} = 0,$$

čili $O' = 0$. Význam výsledku tohoto jest, že v případu tomto povstává čtyrúhelník $A'B'C'D'$, jehož dvě strany protější se křižují; tím rozpadá se čtyrúhelník onen ve *dva trojúhelníky stejného obsahu, však protivného vztahu,* takže součet obou rovná se nulle. Budiž ještě poznamenáno, že jest tu

$$\alpha\beta\gamma'\delta' = 1, \qquad (13)$$

kteráž relace tvoří zajímavé analogon k větě Menelaově. Jakožto příklad nechť slouží $\alpha = 2$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\gamma' = \frac{2}{3}$, $\delta' = \frac{1}{2}$, jejž spolu s příklady ostatními laskavý čtenář snadno obrazcem znázorniti a jednoduchým výpočtem stvrditi dovede.