Václav Jeřábek
O osách kuželosečky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 5, 351--355

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121656`

$$O_{xt} = -\frac{R}{6}(R^2-r^2)\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{R^2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{R^4}+\ldots\right]$$
$$+\frac{R}{6}(R^2+r^2)\pi\left[1-\left(\frac{r}{2R}\right)^2-3\left(\frac{1.r^2}{2.4.R^2}\right)^2-5\left(\frac{1.3.r^3}{2.4.6R^3}\right)^2-\ldots\right].$$

Obsah celého tělesa, vzniklého translací kruhu, bude tedy, viz (57) a (58),

$$O = 4\pi Rr^2 - 8\,O_{tu} = 2\pi Rr^2 + 8\,O_{xt}$$

$$= \frac{2}{3}\pi R\left\{\begin{array}{l}3r^2+2(R^2+r^2)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{R^2}-3\left(\frac{1}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{R^4}-\ldots\right]\\ -2(R^2-r^2)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{R^2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{R^4}+\ldots\right]\end{array}\right\}.$$

V Paříži, 6. prosince 1898.

O osách kuželosečky.

Napsal

V. Jeřábek,
professor v Brně.

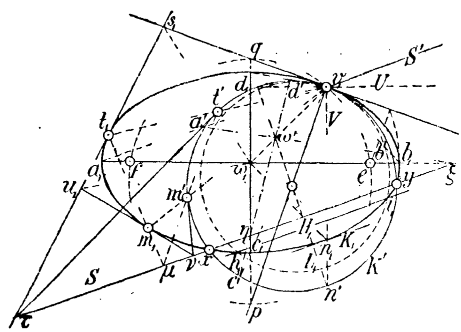
1. Kružnice K′, ležící v průmětně π, buďiž stopou a její bod v_1 průmětem vrcholu v plochy kuželové vK′. Danou přímkou S, která má s kružnicí K′ společné dva body x, y, položená rovina ϱ nechť protíná plochu vK′ v kuželosečce K. Bod m' kružnice K′ budiž stopou jedné povrchové přímky vm' kužele vK′, která seče rovinu ϱ v bodě m, jehož průmět m_1 jest obsažen v průmětu v_1m' přímky vm'. Průmět K_1 kuželového řezu K prochází body m_1, x, y a dotýká se kruhové stopy K′ v bodě v_1. K_1 a K′ jsou v centr. kollineaci dle středu v_1 a osy S_1.

Kterákoliv rovina s průmětnou π rovnoběžná protíná plochu kuželovou vK′ v kružnici L a rovinu ϱ v přímce H rovnoběžné s osou kollineace S. Body h, i, v nichž H a L se protínají, přináležejí kuželovému řezu K, pročež seče průmět H_1

přímky H, který jest s přímkou H i s osou S rovnoběžný, průmět L_1 kružnice L v bodech h_1, i_1 kuželosečky K_1. Tím jsme dokázali známou větu:

Každá kružnice roviny π, která dotýká se kuželosečky K_1 v bodě v_1, má s ní ještě dva body společné h_1, i_1 (realné, imaginárné nebo splývající), jejichž spojnice jest stálého směru S.

Splynou-li body h_1, i_1 v jediný bod n_1, stane se H_1 společnou tečnou kružnice L_1 a kuželosečky K_1, přímka $v_1 n_1$ jest s jednou osou kuželosečky K_1 rovnoběžna a tečny kuželosečky K_1 v bodech v_1 a n_1 svírají s tetivou $v_1 n_1$ a proto i s osami kuželosečky stejné úhly. Pročež:



Osy kuželosečky K_1 jsou rovnoběžny se symetrálami U, V úhlů, které tvoří směr S' osy kollineace S s tečnou kuželosečky K_1 ve středu kollineace v_1 *).

2. *Kružnice K' dotýká se kuželosečky K_1 v bodě v_1; sestrojiti body x, y, v nichž K_1 a K' se protínají.*

a) Kuželosečka K_1 budiž dána dvěma tečnami $s_1 v_1$, $s_1 t_1$, body dotyčnými v_1, t_1 a bodem m_1.

---

*) K témuž výsledku centr. kollineací přichází Wiener (viz Wiener Lehrbuch der darstellenden Geometrie, erster Band pag. 263.). Věta tato jest zvláštním případem známé věty, jejíž analytický důkaz podávám v poznámce ku článku tomuto.

Považujme v_1 za střed kollineace křivek K_1, K' a hledejme osu kollineace S, která kružnici K' v hledaných bodech x, y protíná.

Za tím účelem sestrojme k bodům t_1, m_1 stejnolehlé body t', m' v kružnici K' dle středu v_1. Tečna kružnice K' v bodu t' protíná stejnolehlou tečnu s_1t_1 kuželosečky K_1 v bodě τ, a sestrojíme-li průsečík μ stejnolehlých tetiv t_1m_1, $t'm'$, jest $\mu\tau$ osou kollineace S.

b) Kuželosečka jest dána tečnou s_1v_1, bodem dotyčným v_1 a třemi body m, n, p.

Budiž opět v_1 středem kollineace křivek K_1 a K', sestrojme k bodům m_1, n_1, p_1 stejnolehlé body m', n', p' v kružnici K' dle středu v_1, pak jest osa kollineace trojúhelníků $m_1n_1p_1$ a $m'n'p'$ hledanou osou S.

3. *Sestrojiti osy kuželosečky K_1, která určena jest bodem m_1, dvěma tečnami s_1t_1, s_1v_1 a jejími body dotyčnými t_1, v_1.*

Úlohu tuto, která v desk. geometrii často se vyskytuje, lze přímo řešiti takto:

Narýsujme kteroukoliv kružnici K', dotýkající se kuželosečky K_1 v bodu v_1 a sestrojme dle úlohy (2., *a*) osu kollineace S. Symetrály U, V úhlů, které $S' \| S$ tvoří s tečnou s_1v_1, stanoví, jak již dříve bylo ukázáno, směry os kuželosečky K_1. Budiž u_1 průsečíkem tečen m_1v a s_1t_1 kuželosečky K_1; těžnice $s_1\omega_1$ a $u_1\omega_1$ trojúhelníků $s_1t_1v_1$ a $u_1t_1m_1$ protínají se ve středu ω_1 kuželosečky K_1. Vedeme-li tedy středem ω_1 rovnoběžky se symetrálami U, V, obdržíme osy a_1b_1, c_1d_1 co do polohy. Sestrojme ku středu ω_1 stejnolehlý bod ω' v kruhu K' dle středu v_1 a osy S a buďtež ξ a η body, v nichž S protíná osy kuželosečky K_1. Sestrojíme-li v kruhu K' tetivy $a'\omega'b'\xi$ a $c'\eta\omega'd'$ stejnolehlé s osami $a_1\omega_1b_1\xi$, $c_1\eta\omega_1d_1$ dle středu v_1 a osy S, lze k bodům a', b', c', d' sestrojiti dle téhož středu a téže osy stejnolehlé vrcholy a_1, b_1, c_1, d_1.

Je známo, že kružnice opsaná trojúhelníku pqv_1, který omezen jest pobočnou osou, tečnou a příslušnou normálou bodu v_1, prochází ohnisky e, f kuželosečky K_1 a na tom se zakládá sestrojení těchto ohnisek. Promítneme-li ohnisko e na jednu tečnu $s_1 v_1$, jest vzdálenost průmětu ohniska od středu ω_1 rovna polovině $\omega_1 a_1$ fokální osy kuželosečky a na základě tom lze sestrojiti napřed vrcholy a_1, b_1 a potom c_1, d_1.

Podobně, jako v úloze předešlé, lze sestrojiti osy kuželosečky ještě v jiných případech, na př. je-li kuželosečka dána tečnou, bodem dotyčným a třemi body*); průměrem, směrem průměru sdruženého a bodem nebo tečnou atd.**)

Poznámka. Protější strany čtyřúhelníka, jehož vrcholy na kuželosečce určuje kterákoliv kružnice, tvoří s osami kuželosečky stejné úhly.

Větu tuto lze analyticky snadno dokázati takto:

Ellipsa a dvě protilehlé strany vepsaného čtyřúhelníka mějtež rovnice:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \tag{1}$$

$$y + mx + u = 0, \tag{2}$$

$$y + m_1x + u_1 = 0. \tag{3}$$

Rovnice kuželosečky, jdoucí body, v nichž přímky (2) a (3) ellipsu (1) protínají, jest

$$\lambda\,(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + (y + mx + u)\,(y + m_1x + u_1) = 0.$$

Uvedeme-li rovnici tuto na tvar

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0, \tag{4}$$

shledáme především, že

$$\mathrm{B} = m + m_1.$$

Aby rovnice (4) příslušela kruhu, musí

---

*) Viz Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, erster Band, pag. 294.

**) Jiným způsobem jednoduše a též přímo řeší uvedené a jiné úlohy prof. Karel Pelz ve článku „Über die Axenbestimmung der Kegelschnitte", uveřejněném ve zprávách Vídeňské akademie věd v r. 1876.

$$A = C \quad \text{a} \quad B = m + m_1 = 0$$

čili

$$m = -m_1,$$

pročež tvoří různoběžky (2) a (3) s osou fokální ellipsy stejné úhly.

Podobně lze vésti důkaz o hyperbole a parabole.

Věstník literární.

Arithmetika pro II. třídu škol realných. *Sepsal František Tůma*, prof. c. k. gymnasia v Č. Budějovicích. Cena váz. 85 kr. V Praze, 1899. Nakladatel I. L. *Kobr*, knihkupectví.

Tato učebnice tvoří další část Arithmetiky pro nižší třídy realné, kterou upravuje prof. Tůma dle své učebnice gymnasijní. O prvé části přinesli jsme zprávu v tomto roč. Čas. str. 46. Učebnice vyznačuje se důsledným šetřením *jednotného postupu* při výkladu operací početních. Učivo třídy druhé, jmenovitě počet závěrkový a nauka o úměrách s upotřebením k řešení úloh počtu trojčlenného, procentového, úrokového a diskontového, poskytuje ovšem mnohostrannou příležitost zachovávati jednotu v postupu. Ve škole docílí se tím jistoty a hotovosti v počítání a zabezpečí se úspěch. Učebnice Tůmova podává pevný základ; pokud dále učení rozšířiti a prohloubiti potřebným býti se jeví, zůstaveno jest náhledu učitele. Úzkostlivé šetření jednotnosti návodu nelze schvalovati tam, kde duch úlohy jí se příčí. Máme tu na mysli úlohy počtu procentového, úrokového atd., o jichž řešení již předešle měli jsme příležitost vysloviti se (str. 46.). Nemůže nám zamlouvati se řešení na př. úl. 1. § 28: „Vypočítati základ, jehož výnos činí po 5% 48 jednotek“, jež podáno takto:

K 5 jednotkám výnosu jest základem 100 jednotek

„ 1 „ „ „ „ $\frac{100}{5}$ „

„ 48 „ „ „ „ $\frac{100 \cdot 48}{5}$ jednotek.

Proč nepočítati raději 100% základu, známe-li 5% jeho? V připojených úkolech jest k podobnému řešení sice přihlíženo, bylo by si však přáti, aby tímto návodem byl na vzor příklad