

Zdeněk Pírko

Balistická křivka. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 7, R108--R118

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121651>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1935

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

látek, u nás vyráběných. V tomto směru možno u nás vyráběti hlavně alkoholu značná množství jak v lihovarech průmyslových tak hospodářských. To byl také jeden z důležitých důvodů, proč byla u nás uzákoněna směs benzinu s alkoholem, neboť zvětšením spotřeby lihu z lihovarů hospodářských, které vyrábějí lih z brambor, se povznosou hospodářsky nejhudší kraje. Jako vedlejší výrobek získávají se v hospodářských lihovarech výpalky, které jsou dobrým krmivem, čímž se zlepšuje živočišná produkce. Průmyslové lihovary, jejichž surovinou je melasa, zbývající při výrobě cukru, vyrábějí také značná množství lihu, a to vzhledem k lepší organizaci výroby laciněji než lihovary zemědělské. Jako vedlejší výrobek dostává se potaš, důležitá pro průmysl sklářský. Benzen se vyrábí z kamenouhelného dehtu, což jest produkt suché destilace uhlí. Čím tedy bude větší spotřeba koku, což záleží hlavně na výrobě železa, tím větší budou zásoby benzenu. I v tomto směru by na tom nebyl náš stát nijak zle, na což nutno pamatovati hlavně v dobách mimořádných, v dobách válečných zápletek, kdy není možno počítati s normálním dovozem benzinu.

## Balistická křivka.

Zdeněk Pírko.

(Dokončení.)

V obecném bodě  $(x, y)$  má střela okamžitou rychlost  $v$ , danou rovnicí (13') a úhel sklonu, daný rovnicí (4). Posuneme-li počátek do tohoto bodu, je rovnice paraboly (v souřadnicích  $\xi, \eta$ )

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \vartheta - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \vartheta} x^2,$$

tedy poloměr křivosti v obecném bodě  $(x, y)$  je dán rovnicí

$$\rho(x, y) = - \frac{v^2}{g \cos \vartheta}. \quad (17)$$

Rovnicemi (9), druhou z rovnic (3) a (11) jsou dány závislosti horizontálního dostřelu, výšky vrcholu a doby letu na úhlu výstřelu  $\varphi$ ; v souřadnicích pravoúhlých tyto závislosti jsou velmi jednoduché, jsouce v podstatě dány sinusoidou. Rovněž velmi názorné je zobrazení těchto závislostí v souřadnicích polárních; v prvním případě obdržíme čtyřlístou růžici, v druhém křivku Műngerovu,<sup>2)</sup> v třetím kružnici. Čtenář snadno rozhodne sám, které části zmíněných křivek mají význam.

Abychom zjistili, jak se mění vzdálenost s dobou letu, vyloučíme z rovnic (9) a (11) úhel výstřelu  $\varphi$ , obdržíme

<sup>2)</sup> Viz na př. Loria, Spezielle ebene Kurven, I, 1910, str. 373.

$$X = T \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{2} g^2 T^2},$$

v pravoúhlých souřadnicích  $X, T$  t. zv. zobecněnou lemniskatu Geronovu.<sup>3)</sup>

Jak se mění rychlost podél dráhy, ukážeme si na dráze o maximálním horizontálním dostřelu. Z první z rovnic (1) a z rovnice (13) vyloučíme čas  $t$  a do výsledku dosadíme  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ; nalezneme tak v pravoúhlých souřadnicích  $x, v$  hyperbolu o středu  $(0, h)$  a poloosách  $\frac{1}{2}v_0\sqrt{2}, h$ .

2. Podrobnější studium šikmého vrhu. Rovnice (2) obsahující dva parametry  $\varphi, v_0$  představuje sít parabol; z této sítě můžeme vybrati dva svazky takto: při stálé počáteční rychlosti  $v_0$  uvažujeme svazek parabol s proměnným úhlem výstřelu  $\varphi$  nebo při tomže úhlu výstřelu  $\varphi$  studujeme svazek o různých počátečních rychlostech  $v_0$ . V praxi má studium obou svazků základní důležitost v teorii střelby při konstrukci t. zv. grafických tabulek střelby.<sup>4)</sup>

V následujícím stručně ukážeme, jak příslušné úvahy lze velmi jednoduše provést ve vakuu.

Svazek parabol o téže počáteční rychlosti. Rovnice jedné z parabol tohoto svazku má tvar

$$f(x, y, \varphi) \equiv y - x \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{4h \cos^2 \varphi} x^2 = 0. \quad (1)$$

Vyloučíme-li z této rovnice a z rovnice  $\frac{\partial}{\partial \varphi} f(x, y, \varphi) = 0$  parametr  $\varphi$ , nalezneme jako obálku našeho svazku t. zv. ochrannou parabolu

$$x^2 + 4hy - 4h^2 = 0 \text{ čili } x^2 = -4h(y - h) \quad (2)$$

s vrcholem  $(0, h)$  s parametrem  $2p = 4h$ , jejíž osa má směr os parabol svazku (1), ohnisko jest v ústí děla a vrcholová tečna je společnou řídicí přímkou parabol svazku (1).

Rovnice (1) je kvadratická pro  $\operatorname{tg} \varphi$ , z ní plyne

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h}{x} \pm \sqrt{\frac{4h^2}{x^2} - \left(1 + \frac{4hy}{x^2}\right)}.$$

Označme její diskriminant

$$\Delta(x, y) \equiv \frac{4h^2}{x^2} - \left(1 + \frac{4hy}{x^2}\right); \quad (3)$$

pokud tedy  $\Delta > 0$ , lze cíl zasáhnouti dvěma různými úhly (viz odst. 1), je-li  $\Delta < 0$ , nelze cíl zasáhnouti vůbec. Příklad  $\Delta = 0$  udává tedy cíle, které můžeme zasáhnouti pouze s jediným úhlem výstřelu, a zároveň udává rozhraní mezi cíli zasazitelnými a nezasažitelnými. Rovnice  $\Delta(x, y) = 0$  není však nic jiného než rovnice (2); tím jsme našli význam ochranné paraboly.

Vzhledem k rovnici 1, (4) máme

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2h \cos^2 \varphi} x;$$

<sup>3)</sup> Viz na př. Teixeira, *Traité des courbes remarquables*, I, 1908, str. 273.

<sup>4)</sup> Podrobně v Gebauer, *Výpočet grafických tabulek střelby*, Voj. techn. zprávy, III, 1926, str. 17 a násl., 81 a násl., 160 a násl.

hledáme-li v našem svazku geometrické místo bodů stálého sklonu  $\vartheta$ , vyloučíme z rovnice této a z rovnice (1) parametr  $\varphi$  a obdržíme

$$\frac{x^2}{\cos^2 \vartheta} - 4xy \operatorname{tg} \vartheta + 4y^2 + 4hx \operatorname{tg} \vartheta - 4hy = 0.$$

Rozborem této rovnice docházíme k výsledku, že křivkami stejného sklonu jsou elipsy o středu  $[-h \operatorname{tg} \vartheta, \frac{1}{2}h(1 - \operatorname{tg}^2 \vartheta)]$  a jdoucí ústím děla; speciálně pro  $\vartheta = 0$  obdržíme elipsu vrcholů

$$x^2 + 4y^2 - 4hy = 0$$

se středem v bodě  $(0, \frac{1}{2}h)$ , poloos  $h, \frac{1}{2}h$ ; tutěž rovnici přirozeně obdržíme, vyloučíme-li z rovnice 1, (3) úhel  $\varphi$ .

Geometrické místo bodů, k nimž střely doletí za stejnou dobu  $t$ , obdržíme, vyloučíme-li parametr  $\varphi$  z rovnic 1, (1). Obdržíme tak kružnici se středem  $(0, -\frac{1}{2}gt^2)$  a s poloměrem  $vt_0$ . Střely jsou tedy v každém následujícím okamžiku na obvodu kružnice, jejíž poloměr se rovnoměrně zvětšuje rychlostí  $v_0$  a jejíž střed padá volným pádem ve směru záporné osy pořadnic. Čtenář si dokáže snadno, že obálkou této soustavy kružnic je opět ochranná parabola.

Hledáme-li posléze geometrické místo bodů, v nichž střely mají stejnou rychlost tangenciální  $v$ , nalezneme ihned z rovnice 1, (13') přímkou rovnoběžnou k úrovni ústí ve vzdálenosti  $\frac{v_0^2 - v^2}{2g}$ .

Svazek parabol téhož úhlu výstřelu. Studium tohoto svazku již není tak zajímavé a nemá také toho významu jako studium svazku předcházejícího. Snadno nahlédneme, že svazek

$$f(x, y, v_0) \equiv y - x \operatorname{tg} \varphi + \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2 = 0 \quad (4)$$

nemá obálky. Křivky stejného sklonu  $\vartheta$  nalezneme vyloučením  $v_0$  z rovnice (4) a z její derivace podle  $x$ ; jsou to přímky

$$y = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \vartheta)x;$$

speciálně pro  $\vartheta = 0$  obdržíme přímkou vrcholů

$$y = \frac{1}{2}x \operatorname{tg} \varphi.$$

Jako křivky stejné doby  $t$  nalezneme vyloučením  $v_0$  z rovnic 1, (1) přímky

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2}gt^2,$$

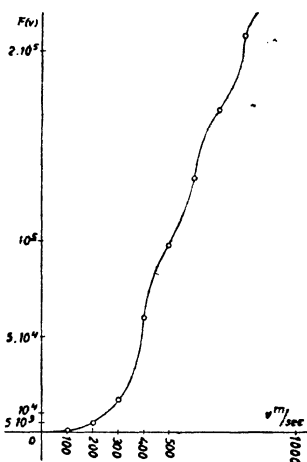
rovnoběžné se společnou tečnou drah svazku v počátku. Představíme-li si tedy, že z děla bylo současně vystřeleno velké množství ran pod týmž úhlem výstřelu, ale s různou počáteční rychlostí, pak v každém následujícím okamžiku leží tyto střely na přímce rovnoběžné ke zmíněné tečně, která padá volným pádem ve směru záporné osy pořadnic. Jako křivky stejné rychlosti tangenciální nalezneme vyloučením  $v_0$  z rovnic 1, (13') a z rovnice (4) elipsy

$$\frac{g}{\cos^2 \varphi} x^2 - 4gxy \operatorname{tg} \varphi + 4gy^2 - 2v^2 x \operatorname{tg} \varphi + 2v^2 y = 0$$

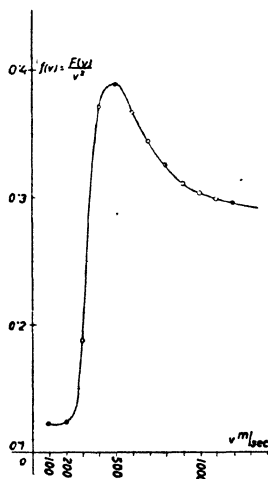
se středem  $\left(\frac{v^2}{2g} \operatorname{tg} \varphi, \frac{v^2}{4g}(\operatorname{tg}^2 \varphi - 1)\right)$  a jdoucí počátkem.

3. Odporující prostředí. Při dosavadních úvahách o šikmém vrhu brali jsme ohled pouze na zemskou tíži, která dráhu

střely odchyluje dolů. V praxi však přistupují v podstatě ještě dva činitelé ohromného významu: odpor prostředí (vzduchu), který musí střela překonávat a tím ztrácí na rychlosti, a otáčení střely kolem podélné osy, které způsobuje stranovou úchylku střely ze svislé roviny, t. zv. deviaci (nebo derivaci\*) střely. Deviaci lze snadno vyrovnati tím, že zaměřujeme poněkud stranou než přímo na cíl; střelné zbraně mívají již zaměřovací zařízení upravené příslušným způsobem.



Obr. 1.



Obr. 2.

Naproti tomu problém odporu vzduchu vůči pohybující se střele je tak neobyčejně složitý, že sotva kdy se podaří ze zákonů aeromechaniky odvoditi vztah všeobecného významu; vnější balistika je odkázána na řadu empirických vzorců více méně výstižných, jejichž společnou vadou je, že se vztahují jen na určitý obor případů.

Závislost odporu vzduchu na rychlosti byla velikým počtem pokusů zjištěna velice přesně; graficky je znázorněna v obr. 1. Z něho je patrné, že pro menší rychlosti (do 200 m/sec) odpor vzduchu vzrůstá přibližně se čtvercem rychlosti pohybující se střely, přiblíží-li se však rychlost střely rychlosti zvuku, odpor vzroste téměř skokem a teprve od rychlosti 400 m/sec stoupá opět mírněji. Samozřejmě, že vznikla také snaha o matematické formulování této závislosti, kterou označíme v následujícím  $F(v)$ . Počet pokusů o analytické vyjádření je veliký; snad nejdokonaleji by tato závislost byla vyjádřena tvarem

\*) Tento druhý název se vyskytuje soustavně v služebních předpisech naší branné moci; jedná se patrně o vžitý omyl.

$$F(v) = a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + \dots; \quad (1)$$

ovšem skutečné použití tohoto vzorce v praxi naráží na nesmírné početní obtíže.

Omezíme-li se v rozvoji (1) pouze na člen kvadratický, obdržíme klasický vzorec Newtonův, dosti dobře vyhovující pro menší rychlosti; omezíme-li se pouze na člen lineární, obdržíme vzorec Stokesův, platný pro velmi malé rychlosti.<sup>5)</sup> Omezíme-li se na první dva členy, obdržíme lineární závislost Chapelovu, vhodnou pro rychlosti od 450 do 900 m/sec, atd. Celkem je možno říci: čím širší platnost má míti analytické vyjádření, tím je složitější; jako příklad formule složité uveďme dosti vyhovující vzorec Siacciho, korekcemi členy doplněný to vztah Chapelův,

$$F(v) = 0,2002v - 48,05 + \sqrt{(0,1648v - 47,95)^2 + 9,6 + \frac{0,0442v(v - 300)}{371 + (\frac{1}{200}v)^{10}}}$$

Současně s funkcí  $F(v)$  byl studován průběh funkce  $f(v)$

$$f(v) = \frac{F(v)}{v^2}, \quad (2)$$

poněvadž podle Newtona měla býti konstantní. Graficky jest její průběh znázorněn v obr. 2; zobrazíme-li si také funkce plynoucí ze zákona Stokesova, Newtonova nebo Chapelova, vysvitne nám jasně přednost jednotlivých zobrazení pro určité intervaly rychlosti.

Vnější balistika pro odpor prostředí užívá vzorce vyjadřujícího retardaci  $r$ , působící na střelu, ve tvaru

$$|r| = cF(v), \quad (3)$$

kde  $c$  pro jisté normální poměry v prostředí je konstanta závislá na tvaru střely a nazývá se balistický koeficient střely.

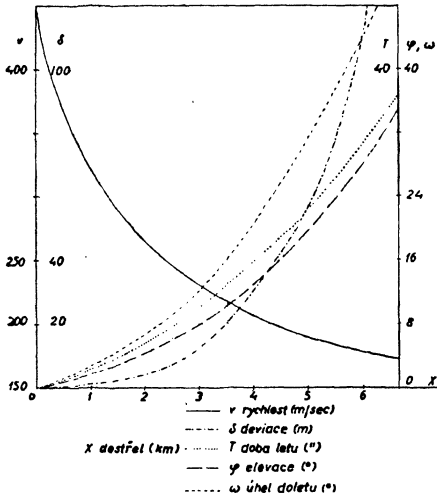
4. Balistická křivka. Odpor vzduchu tedy způsobuje, že nedosáhneme ani zdaleka těch horizontálních dostřelů ani výšek, jež plynuly z odvozených vzorců v odst. 1. Dráha střely rovněž není parabolou, nýbrž střela probíhá křivku nesymetrickou, t. zv. křivku balistickou, s mírným obloukem výstupným a strmým obloukem sestupným, blíživým se ke svislé asymptotě, takže úhel doletu  $\omega$  je větší než úhel výstřelu  $\varphi$ . Stoupající část dráhy až k vrcholu proběhne střela za dobu kratší než část klesající. Maximálního dostřelu dosáhneme při úhlu výstřelu menším než  $45^\circ$ .

Obr. 3 vyznačuje hlavní data těžkého německého děla vz. 73; z něho je viděti, jak značně s délkou ubývá rychlosti a přibývá deviace a doby letu. Obr. 4 vyznačuje hlavní data rakouské pušky vz. 98; na rozdíl od obr. 3

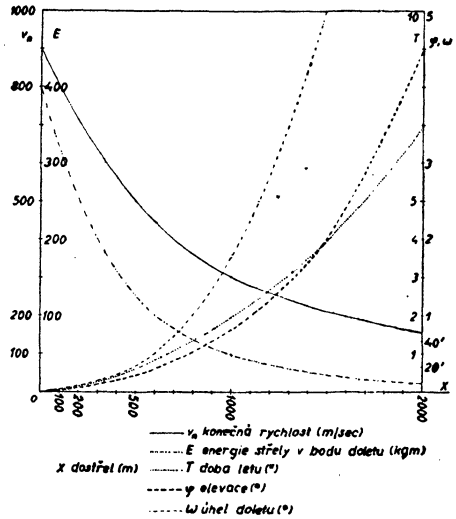
<sup>5)</sup> Nachtikal, Technická fysika, 1931, str. 154 a násl.

na místo průběhu rychlosti podél dráhy zakreslena zde závislost konečné rychlosti na dostřelu, vypuštěna závislost deviace, která u ručních zbraní nemá toho významu, a přidána křivka energie střely v bodu doletu.<sup>6)</sup>

Tak na př. u rakouské pušky Mannlicher vz. 95, jejíž počáteční rychlost je  $v_0 = 620$  m/sec, by teoretické maximum dostřelu ve vakuu obnášelo téměř 40 km při  $\varphi = 45^\circ$ . Ve skutečnosti největšího dostřelu (t. zv. do- nosnosti) docílíme při  $\varphi = 33^\circ$  a obnáší nejvýše 4,5 km.



Obr. 3.



Obr. 4.

5. Analytické vyjádření balistické křivky rozvojem a některá jiná vyjádření odtud plynoucí. Horizontální složka rychlosti je dána rovnicemi 1, (14), (15), z nichž plyne

$$\frac{dx}{dt} = u = v \cos \vartheta; \quad (1)$$

podle rovnice 3, (2) je horizontální složka retardace (i co do směru)

$$\frac{du}{dt} = \gamma_x = -r \cos \vartheta. \quad (2)$$

Posléze i pro pohyb ve skutečném prostředí používáme vztahu 1, (17)

$$q = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -\frac{v^2}{g \cos \vartheta}, \quad (3)$$

<sup>6)</sup> Obr. 3 je převzat z Kadlec, Fysika, I, 2. vyd.; obr. 4 zpracován podle dat uvedených v služebním předpise naší branné moci P-III-1.

nahrazující totiž v každém okamžiku infinitesimální oblouček dráhy střely parabolou, určenou bodem  $(x, y)$  a veličinami  $\vartheta, v$ .

Máme nyní podle rovnice 1, (4)

$$y' = \operatorname{tg} \vartheta; \quad (4)$$

z rovnice (3) vzhledem k předcházejícímu vztahu a vzhledem k rovnici (1)

$$y'' = -\frac{g}{v^2 \cos^2 \vartheta} = -gu^{-2}; \quad (5)$$

posléze vzhledem k rovnicím (1), (2)

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{2g}{u^3} \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = -2gr \frac{1}{v^4 \cos^3 \vartheta}. \quad (6)$$

Další derivace jsou již mnohem složitější, my však je pro následující nepotřebujeme.<sup>7)</sup>

Vztahy (4), (5), (6) dosadíme do Taylorova rozvoje pro funkci  $f(x)$

$$y = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots,$$

obdržíme tak vzhledem k počátečním podmínkám  $\vartheta = \varphi, v = v_0, r = r_0$ ,

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2 - \frac{gr_0}{3v_0^4 \cos^3 \varphi} + \dots; \quad (7)$$

čili v obecném bodě  $(x, y)$ , přeložíme-li počátek do tohoto bodu,

$$y = x \operatorname{tg} \vartheta - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \vartheta} x^2 - \frac{gr}{3v^4 \cos^3 \vartheta} + \dots \quad (8)$$

Rozvoj (7) může být východiskem pro přibližné vyjádření rovnice balistické křivky. Omezme se na první člen: v okolí počátku (před ústím děla) lze dráhu v prvním přiblížení vyjádřit její tečnou v počátku; po této přímce by letěla střela, kdyby nepůsobily ani tíže ani odpor vzduchu. Omezme se na dva členy: dráhu máme vyjádřenu přesněji kvadratickou parabolou 1, (2); po této parabole by letěla střela, kdyby podléhala pouze tíži, tedy ve vakuu. Třetího přiblížení bylo již prakticky použito, je to kubičká parabola Siacciho nebo Piton-Bressanova; čtvrtého přiblížení (paraboly bikvadratické) použil na př. Duchêne; atd.

K jinému přiblížení dospějeme formálně takto: Rozvoj (7) píšeme ve tvaru

<sup>7)</sup> Další členy nalezneme čtenář v Gebauer, Jak možno měřiti malé rychlosti dělových střel, Voj. techn. zprávy, V, 1928, str. 241 a násl.



$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) x^2.$$

Položme nyní na místo  $a_k$  výraz  $U^{-k}$ , kde  $U$  je veličina, o níž budeme pouze předpokládat, že je větší než každé „praktické“  $x$ , t. j. také  $U > X$ . Nekonečnou řadu v závorce na pravé straně můžeme pak sečísti, obdržíme tak jako přibližné vyjádření dráhy hyperbolu Petitcolovu

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2 \frac{U}{U - x}. \quad (9)$$

Položme v této rovnici  $\frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi = X_0$  a pišme ji ve tvaru

$$y = x \left[ 1 - \frac{x}{\frac{UX_0}{U + X_0}} \right] \frac{U \operatorname{tg} \varphi}{U - x},$$

dosadíme-li  $\frac{UX_0}{U + X_0} = X$ , obdržíme hyperbolu

$$y = x \left( 1 - \frac{x}{X} \right) \frac{U \operatorname{tg} \varphi}{U - x}, \quad (10)$$

kteří k vyjádření dráhy střely použil již Newton. Rozborem rovnic (9), (10) nalezneme, že zmíněné hyperboly procházejí počátkem a mají svislé asymptoty o rovnici  $x - U = 0$ ; hodí se tedy dosti dobře k vyjádření sestupného oblouku, zejména jeho části pod úrovní děla.<sup>8)</sup>

6. Hlavní rovnice vnější balistiky. Přesným studiem dráhy střely ve vzduchu se zabývá vnější balistika. Všechny její úvahy vycházejí ze soustavy základních rovnic, které v tomto odstavci odvodíme.

Uvažujme okolí bodu dráhy  $(x, y)$ ; pak platí známé vzorce z diferenciální geometrie v rovině ( $s$  oblouk)

$$\frac{dx}{ds} = \cos \vartheta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \vartheta, \quad \varrho = \frac{ds}{d\vartheta} = -\frac{v^2}{g \cos \vartheta},$$

z nichž ihned plyne

$$\frac{dx}{d\vartheta} = -\frac{v^2}{g}, \quad \frac{dy}{d\vartheta} = -\frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \vartheta. \quad (1)$$

Tím jsme našli závislost mezi  $x, y, v, \vartheta$ . Poněvadž je dále

<sup>8)</sup> Řadu dalších přibližných vyjádření nalezneme čtenář v prakticky cenné knize Gebauer, Aplikovaná matematika pro vojsko, I, 1927, II, 1931, zejména v jejím prvním díle.

$$\frac{ds}{dt} = v \text{ a } \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = \varrho \frac{d\vartheta}{dt},$$

máme pro závislost veličin  $t, v, \vartheta$  vztah

$$\frac{dt}{d\vartheta} = -\frac{v}{g \cos \vartheta}. \quad (2)$$

Zbývá ještě určití závislost veličin  $v, \vartheta$ . Z rovnice 5, (1) plyne

$$\frac{dv}{d\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{u}{\cos \vartheta} \right) = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \left( \frac{du}{d\vartheta} \cos \vartheta + u \sin \vartheta \right),$$

tedy vzhledem ke vztahu 5, (1) jednodušeji

$$\frac{dv}{d\vartheta} = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{du}{d\vartheta} + v \operatorname{tg} \vartheta. \quad (3)$$

Je dále vzhledem k rovnici 5, (2) a k rovnici (2)

$$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\vartheta} = r \cos \vartheta \frac{v}{g \cos \vartheta}, \quad (4)$$

můžeme tedy psátí rovnici (3) ve tvaru

$$\frac{dv}{d\vartheta} = \frac{rv}{g \cos \vartheta} + v \operatorname{tg} \vartheta. \quad (5)$$

Ukážeme, že tato rovnice není nic jiného než diferenciální rovnici pro hodograf; skutečně, zavedeme-li funkci  $F(v)$  podle rovnice 3, (3), můžeme předcházející rovnici psátí ve tvaru

$$\frac{d(v \cos \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{c}{g} v F(v). \quad (6)$$

Soustava diferenciálních rovnic (1), (2), (5), resp. (6) řeší v podstatě každý úkol vnější balistiky, tedy i úkol určití rovnici balistické křivky. Přesto, že řešení každé úlohy vnější balistiky musí vycházeti z těchto rovnic, dostáváme již v nejjednodušších případech výrazy velmi komplikované.

Ukážeme to na příkladě. Měli bychom na př. určití hodograf pohybu, pro který platí zákon Newtonův  $F(v) = \beta v^2$ . V tomto případě má rovnice (6) tvar, položíme-li  $c\beta = b$ ,

$$\frac{d(v \cos \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{b}{g} v^2,$$

což lze psátí, použijeme-li vztahu  $u = v \cos \vartheta$ ,

$$\frac{d(v \cos \vartheta)}{(v \cos \vartheta)^2} = \frac{b}{g} \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{du}{u^2}.$$

Integraci této rovnice v mezích od  $u_0, \varphi$  do  $u, \vartheta$  nalezneme

$$\left( \frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{v^2 \cos^2 \vartheta} \right) = \frac{c\beta}{g} \left[ \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} + \log \operatorname{tg} \left( \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\vartheta \right) \right]_{\varphi}^{\vartheta};$$

tedy závislost velmi složitou, ale mající dalekosáhlé použití v praxi.

Druhý nejjednodušší předpoklad pro funkci  $F(v)$  dává zákon Chapelův  $F(v) = F(v_0) + b(v - v_0)$ . Řešení příslušné rovnice obdržel Dufrénois ve tvaru

$$\begin{aligned} \lambda^{-m} \left[ \frac{1}{u} - \frac{bc}{2g} \left( \frac{1}{\lambda(1+m)} + \frac{\lambda}{m-1} \right) \right] = \\ = \lambda_0^{-m} \left[ \frac{1}{u_0} - \frac{bc}{2g} \left( \frac{1}{\lambda_0(1+m)} + \frac{\lambda_0}{m-1} \right) \right], \end{aligned}$$

kde

$$m = -\frac{c}{g} [F(v_0) - bv_0], \quad u = v \cos \vartheta, \quad \lambda = \operatorname{tg} \left( \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\vartheta \right),$$

tedy

$$u_0 = v_0 \cos \varphi, \quad \lambda_0 = \operatorname{tg} \left( \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi \right).$$

7. Diferenciální rovnice balistické křivky. Zmínili jsme se v předcházejícím odstavci, že řešení každé úlohy vnější balistiky vychází ze soustavy diferenciálních rovnic tam odvozených. Naším posledním úkolem je nalézt rovnici balistické křivky. Tu odvodíme takto: Je nejprve podle rovnice 5, (5)

$$y'' = -\frac{g}{v^2 \cos^2 \vartheta}, \quad \text{a poněvadž } \frac{1}{\cos^2 \vartheta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta = 1 + y'^2, \quad (1)$$

máme

$$y'' = -\frac{g}{v^2} (1 + y'^2), \quad \text{t. j. } v = \sqrt{-g \frac{1 + y'^2}{y''}}. \quad (2)$$

Z rovnice 5, (5) však plyne dále vzhledem k rovnici 5, (1)

$$(v \cos \vartheta)^2 = -\frac{g}{y''} = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Derivujeme na obou stranách podle  $t$ , nalezneme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gy'''}{2y''^2}.$$

Poněvadž ale je

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (v \cos \vartheta) = \frac{d(v \cos \vartheta)}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt},$$

máme ve spojení rovnice této s předcházející, uijeme-li diferenciální rovnice pro hodograf 6, (6),

$$\frac{gy'''}{2y''^2} = \frac{c}{g} v F(v) \frac{d\vartheta}{dt};$$

dosadíme-li za  $\frac{d\vartheta}{dt}$  podle rovnice 6, (2), obdržíme posléze

$$\frac{gy'''}{2y''^2} + c F(v) \cos \vartheta = 0.$$

Do této rovnice zavedeme ještě hodnotu pro  $\cos \vartheta$ , která plyne z druhé z rovnic (1), a hodnotu za  $v$ , která plyne z druhé z rovnic (2); obdržíme posléze jako diferenciální rovnici balistické křivky

$$\frac{gy'''}{2y''^2} + c F \left( \sqrt{-g \frac{1 + y'^2}{y''}} \right) \sqrt{\frac{1}{1 + y'^2}} = 0. \quad (3)$$

Rovnice (3), jsou diferenciální rovnici třetího řádu, určuje nekonečně mnoho křivek, které opisuje střela o balistickém koeficientu  $c$ , letící ve

vzduchu konstantní specifické váhy (t. j.  $c = \text{konst.}$ ). Rovnici naší dráhy obdržíme z této soustavy volbou počátečních podmínek naší úloze příslušejících.

Rovnici (3) obecně řešit nedovedeme. I za značně omezujících předpokladů, které by byly na újmu skutečných poměrů, obdržíme výrazy nesmírně komplikované, takže rovnice (3) má význam pouze teoretický. Ve skutečnosti vnější balistika neuvažuje dráhu střely jako celek, nýbrž nahrazuje ji po úsecích oblouky křivek jednodušších (viz odst. 6).

Rovnici (3) můžeme kontrolovati na př. takto: není-li odporu vzduchu, redukuje se rovnice (3) na

$$y''' = 0 \text{ čili } y = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

což je rovnice známé paraboly, s dosud neurčenými počátečními podmínkami (t. j. ústí děla, počáteční rychlost, úhel výstřelu).

## Mosaika.

Prof. Dr. Vlad. Novák (Brno).

*M. J. Pupin* †. Dne 12. března t. r. zemřel v New Yorku vynikající elektrotechnik a teoretický fysik Michael Idvorský Pupin ve věku 76 let. Pocházel z Idvoru (v uherském Banátě) z rodiny selské; ani jeho otec ani matka neuměli čísti a psát. V šestnácti letech přijel v mezipalubí, kde neměl ani polštáře pod hlavu ani přikrývky, s pěti centy v kapse do New Yorku. Neznaje slova anglicky živil se s počátku nošením uhlí do sklepů a zame­táním sněhu s chodníků. Konečně se dostal do továrny na sušenky a když postoupil za příručího, „měl prý pocit jako Angličan, který se stal peerem!“ V továrně seznámil se Pupin se zaměstnancem, který klasicky vzdělán dělil se poctivě s Pupinem o své vědomosti a chápavý a pilný mladík připravil se tak k přijímací zkoušce do Columbijské kolejie v New Yorku. Statný srbský jinoch, jehož svaly ztvrdly v přístavech a dílnách, snadno vynikl v studentském sportu, kde získal i několik významných cen. V r. 1883 Pupin absolvoval Columbijskou kolej s výborným prospěchem a stal se americkým občanem. Touha po dalším vzdělání vedla ho do Anglie, kde chtěl poznati zakladatele elektromagnetické teorie světla prof. Clerka Maxwella, nemaje tušení, že Maxwell již před čtyřmi roky zemřel. To přimělo Pupina, ačkoliv přijel do Anglie studovati fysiku, aby se věnoval matematice. Půldruhého roku studií u Routha znamenalo pro Pupina získati velmi dobrou přípravu pro příští teoretické práce. Z Cambridge navštívil Pupin své rodiště a svoje rodiče po delší době. Jeho matka prý mu vylíčila svoje představy o Cambridgi slovy: „Cambridge je velký chrám zasvěcený věčné pravdě, je vyplněn ikonami velkých svatých vědy“!