Chování vizmutu vysvětlil Teige[22]) takto:

Velikost poměru vodivosti vizmutu, jakož i malý temperaturní koefficient tohoto poměru, nasvědčují tomu, že se nejedná o čistý kov, nýbrž o slitinu dvou modifikací. První modifikace má větší počet elektronů a se stoupající teplotou přechází v modifikaci chudší na elektrony. Vskutku také Würschmidt a Moesveld[23]) zjistili dvě modifikace vizmutu. (Pokračování.)

VĚSTNÍK LITERÁRNÍ.

RECENSE KNIH.

Bohuslav Hostinský: **Einsteinovy přednášky o theorii relativity z r. 1921.** V květnu 1921 konal A. Einstein na princetonské universitě čtyři přednášky o theorii relativity, které pak vydal tiskem (Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie, Braunschweig, Vieweg, 1922; 70 stran).*)

Přes to, že tato nová knížka nepřináší, aspoň ve hlavních věcech, podstatně nových výsledků, je pozoruhodna tím, že důkazy některých vět, zde podané, dosti se liší od důkazů dříve užívaných a to tak, že se můžeme právě z nové jich úpravy dobře poučiti o rozmanitých zvláštnostech relativistických theorií.

Vzhledem k tomu pak, že zájem o tyto theorie je značně rozšířen, rozhodl jsem se referovati o knížce Einsteinově obšírněji než se obyčejně o nových spisech v tomto časopise referuje a vyložiti při té příležitosti svoje názory o principu relativity.

První přednáška pojednává o prostoru a o času v předrelativistické fysice (str. 1.—15.), druhá o specielní theorii relativity (str. 16.—35.), třetí (str. 36.—50.) a čtvrtá (str. 51.—70.) pak o obecné theorii relativity. V první části tohoto článku uvedu postupně obsah jednotlivých přednášek, při čemž budu se držeti pokud možno doslova Einsteinova textu, ve druhé části pak připojím svoje poznámky.

I.

Poněvadž theorie relativity nejúžeji souvisí s theorií času a prostoru, je vhodno začíti stručnou úvahou o původu našich představ o času a o prostoru. Zážitky (Erlebnisse), které nějaký člověk má, jeví se mu srovnány do řady. Bezprostředním názorem rozlišujeme to, co bylo dříve, od toho, co bylo později; k přesnějšímu rozlišení užíváme hodin. Hodinami nazýváme věc, která dává spočitatelné zážitky (abzählbare Ergebnisse liefert), která je tělesem nebo soustavou těles a k jejíž podstatě náleží, že řady zážitků nebo dílčích zjevů (Teilvorgänge) na ní čitané mohou býti považovány za stejné (str. 1.—2.). Fysikové musejí však snésti pojmy času a prostoru s apriorického Olympu (Olymp des Apriori), kam je filosofové zanesli, opraviti je a uvésti je do stavu takového, aby se jich k něčemu dalo užíti. Pokud se týče úsudků o prostoru, zdá se, že Poincaré ve své knize „La science et l'hypothèse" zvláště jasně pravdu zachytil. Základem geometrie jsou věty o shodnosti obrazců; těmito

---

[22]) Teige, Rozpravy č. Akad., *27*, čís. 26 (1919).

[23]) Würschmidt a Moesveld, Zeit. für phys. Chemie, *85*, 419 (1913).

*) Vzhledem k zásadní duležitosti věci věnováno výjimkou více místa, než obvyklo, recensi cizojazyčné knihy.

větami jsou ovládány rozmanité možnosti, jež se vyskytují, klademe-li tuhá tělesa jedno ke druhému (Lagerungsmöglichkeiten). Předrelativistická fysika předpokládá, že věty o řadění těles ideálně tuhých shodují se s euklidovskou geometrií. V euklidovské geometrii jsou zvláštní významné soustavy souřadnic, které se odvozují jedny ze druhých orthogonálními transformacemi. V takovýchto souřadnicích vyjadřuje se vzdálenost s dvou bodů, měřitelná měřítkem, zvlášť jednoduše (totiž podle Pythagorovy věty, jsou-li dány rozdíly souřadnic příslušných začátečnímu a koncovému bodu měřené délky). Celá geometrie dá se založiti na tomto pojmu vzdálenosti (str. 5.). Ryzí mathematik (Der reine Mathem.) může se spokojiti tím, že isoluje to, co je v geometrii ryze logické a nezávislé na zkušenosti. Otázka, je-li euklidovská geometrie pravdivá čili nic, nemá proň smyslu. Pro náš účel je však nutno přiřaditi základním pojmům (geometrickým) skutečné předměty (Naturobjekte); bez takového přiřadění je geometrie pro fysika bezpředmětná. Pro fysika má tedy smysl tázati se po pravdivosti geometrických vět (str. 5.). K základním orthogonálním transformacím obyčejných souřadnic připojují se transformace vektorů a tensorů. Tensor je název pro soustavu koefficientů, jež se transformují určitým způsobem, přejdeme-li od jedněch souřadnic ke druhým (na př. tensorem je souhrn koefficientů ve středové rovnici plochy 2. st., jejíž střed je v počátku souřadnic a pod. (str. 6.—15.).

Se stanoviska mechaniky zdá se, že existují stejně oprávněné soustavy souřadnic (gleichberechtigte Bezugsräume). Neboť experimentujíce na Zemi nepozorujeme, že Země pohybuje se rychlostí asi 30 *km/sec.* kolem Slunce. Zdá se však, že tato fysikální rovnocennost neplatí pro libovolně se pohybující soustavy souřadnic; neboť zdá se, že mechanické zjevy neprobíhají vzhledem ke kolísajícímu železničnímu vozu podle těchže zákonů jako vzhledem k vozu rovnoměrně jedoucímu; podobně projevuje se otáčení Země. Zdá se tedy, že jsou karteské soustavy souřadnic (t. zv. inerciální systémy), vzhledem k nimž zákony mechaniky (a zákony fysikální vůbec) nabývají nejjednoduššího tvaru. Můžeme tušiti (können vermuten) správnost věty: Je-li K inerciální systém, jest též inerciálním každý systém K', který se pohybuje vzhledem ke K rovnoměrně a bez otáčení; přírodní zákony souhlasí pro všechny inerciální systémy. Tuto větu nazýváme „specielním principem relativity“ (str. 16.).

Klademe si otázku: jsou-li dány obyčejné souřadnice x_ν a čas t nějaké události vzhledem ke K, jak se vypočtou příslušné souřadnice x'_ν a čas t' vzhledem k jiné inerciální soustavě K'? Předrelativistická fysika řešila tuto otázku na základě dvou předpokladů: 1. Čas jest absolutní; čas t' nějaké události vzhledem ke K' rovná se jejímu času t vzhledem ke K. 2. Usečka jest absolutní; je-li úsečka v klidu vzhledem k systému K, má vzhledem ke K stejnou délku jako vzhledem ku K'. Z těchto předpokladů plynou pro obyčejné souřadnice x_ν a pro čas t vzorce (Galileova transformace)

$$x'_\nu = x_\nu - a_\nu - b_\nu t, \qquad (21)^{*)}$$

udávající přechod od K ke K'. Pohybové rovnice Newtonovy jsou kovariantní vůči transformaci (21). Z toho následuje, že klassická mechanika odpovídá specielnímu principu relativity, ovšem za splnění dvou svrchu uvedených předpokladů o měření času a délek. Avšak snaha provésti úplně princip relativity vůči translacím tříští se o elektromagnetické zjevy. Rovnice Maxwell-Lorentzovy nejsou totiž kovariantní vůči (21). Poznamenejme, že světelný paprsek, jenž má vůči K rychlost c, měl by vůči K' rychlost jinou (str. 17.). Michelsonův pokus ukazuje však, že světlo šíří se vůči zemskému povrchu právě tak, jakoby Země neměla translačního pohybu; z toho plyne, že specielní princip relativity musí platiti také pro elektromagnetické zjevy (str. 17.—18.). Ukazuje se, že specielním principem relativity a požadavkem, že rychlost světla má býti vůči všem inerciálním systémům stejná, jsou jednoznačně

*) Užívám všude původního číslování Einsteinova. *B. H.*

určeny formule definující přechod od jednoho inerciálního systému K k jinému takovému systému (Lorentzova transformace). Čas není pak absolutní a rovnice (21) neplatí (str. 19.). Lorentzova transformace přiřaďuje každému bodu (x, y, z, t) čtyřrozměrného „časoprostoru" jistý bod téhož časoprostoru. Ani bod v prostoru, kde něco se děje, ani okamžik, kdy něco se děje, nemají fysikální skutečnosti (physikalische Realität), nýbrž toliko událost sama. Mezi dvěma událostmi není ani absolutního (nezávislého na soustavě souřadnic) vztahu prostorového ani absolutního vztahu časového, jest však mezi nimi absolutní (nezávislý na volbě souřadnic) vztah časoprostorový. Okolnost, že nelze rozštěpiti objektivně (objektiv-sinnvolle Zerspaltung) čtyřrozměrné kontinuum v trojrozměrné prostorové a jednorozměrné časové, způsobuje, že přírodní zákony teprve tehdy nabudou logicky nejuspokojivější formy, když je vyjádříme jakožto zákony v čtyřrozměrném časoprostoru (str. 20.). Řečená nerozštěpitelnost však nikterak nemá za důsledek rovnoprávnost (Gleichwertigkeit) prostorových souřadnic se souřadnicí časovou (str. 21.). Z Lorentzovy transformace plynou tyto důsledky: Položme $ct = l$, kde c značí rychlost světla. Měřítko o délce n položené v okamžiku $l = o$ v ose Ox systému K má vzhledem k systému K' pohybujícímu se ve směru Ox rovnoměrně rychlostí vc délku $n\sqrt{1-v^2}$. Hodiny, jež jsou v klidu v počátku soustavy K a jichž rázy jsou charakterisovány číslem $l = n$, jdou v tempu $l' = n(1-v^2)^{1/2}$, tedy pomaleji než by šly, kdyby vůči K' byly v klidu (str. 24.). Pohybové rovnice hmotného bodu upravují se na tvar (volím poněkud jiné označení,

$$X = \frac{d}{dl}\left(\frac{m}{\sqrt{1-q^2}} \cdot \frac{dx}{dl}\right), \tag{56}$$

kde X značí složku síly, q pak prostou velikost rychlosti okamžité, dělenou rychlostí světla. Tyto rovnice, odvozené pro pohyb elektronu od H. A. Lorentze, osvědčily se, jak ukázalo pozorování paprsků β (str. 31.).

Všechny dosavadní úvahy vycházejí z předpokladu, že inerciální systémy jsou stejně oprávněny při popisu zjevů, avšak lépe se hodí než jiné systémy. Tato přednost inerciálních systémů jest samostatnou, ničím nepodmíněnou vlastností časoprostorového kontinua. Zejména zákon setrvačnosti nutí nás, jak se zdá, připisovati tomuto kontinuu fysikální vlastnosti. Pokud spatřujeme v zákonu setrvačnosti poslední základ fysiky, je toto stanovisko oprávněno. Ale proti tomu jsou dvě závažné námitky. Předně odporuje vědeckému rozumu zaváděti věc (totiž časoprostorové kontinuum), která sice působí, na niž však nemůže býti působeno. To byl důvod, jenž přiměl E. Macha k pokusu, vyloučiti prostor jakožto působící příčinu z mechaniky. Podle něho pohybuje se isolovaný bod bez zrychlení vůči středu ostatních hmot (Mittel der übrigen Massen) světa, nikoli vůči prostoru; tím by se uzavřel příčinný řetěz (Kausalreihe) mechanického dění, kdežto v mechanice Newtonově a Galileiově uzavřen není (str. 36.). Za druhé pak je nutno numericky prokázanou totožnost hmoty setrvačné a hmoty těžké redukovati na stejnost podstaty (Gleichheit des Wesens). Budiž K inerciální systém a K' jiný systém, který má vůči K pohyb rovnoměrně zrychlený. Hmoty, jichž zrychlení vůči K rovná se nule, mají vůči K' zrychlení různé od nuly. Chovají se tedy vzhledem ke K' tak, jako kdyby zde bylo gravitační pole a kdyby systém K' žádného zrychlení (vůči K) neměl. Nehledíme-li prozatím k otázce po „příčině" takového gravitačního pole, nebrání nám nic považovati toto pole za skutečné v „klidném" systému K' a tato představa je stejně oprávněna s představou, že K je „oprávněný" systém a že není žádného gravitačního pole (princip ekvivalence) (str. 37.). Tak se dojde k ponětí o jednotnosti podstaty (Wesenseinheit) setrvačnosti a gravitace. Možnost převésti numerickou rovnost setrvačnosti a gravitace na jednotnost podstaty propůjčuje obecné theorii relativity takovou převahu nad klassickou mechanikou, že všechny obtíže musejí býti považovány za nepatrné vůči tomuto pokroku. Slabost zákona setrvačnosti záleží v tom, že obsahuje logický kruh (Zirkel): hmota pohybuje se beze zrychlení, je-li od ostatních těles dostatečně vzdálena; že však je dostatečně vzdálena, nepozná se dle ničeho jiného, leč dle toho, že se pohybuje nezrychleně. V oboru, kde je přibližná platnost zákona setrvačnosti prokázána, musíme (podle principu ekvivalence) připustiti také systémy, které nejsou inerciální, t. j. systémy, které vůči inerciálním mají zrychlený nebo otáčivý pohyb, jakožto stejně oprávněné. A když pak chceme se radikálně zbaviti tísnivé otázky po objektivním důvodu, proč mají určité systémy souřadnic přednost před jinými, jsme nuceni připustiti libovolně se pohybující systémy. Tu však ocitneme se v rozporu s těmi fysikálními interpretacemi času a prostoru, které nás vedly k cíli ve speciální theorii relativity (str. 38.). V gravitačním poli neplatí o řadění ideálních pevných těles (Lagerungsgesetze) euklidovská geometrie. Podobně jako Gauss zavedl křivočaré souřadnice do theorie ploch, zavedeme i zde čtyři souřadnice x_1, x_2, x_3, x_4, kterými se body časoprostoru jednoznačně očíslují a to tak, že dvěma událostem, které jsou si v časoprostoru blízky, přiřadí se rovněž navzájem blízké souřadnice; jinak mohou býti souřadnice voleny libovolně. Principu relativity vyhovíme v nejširším smyslu tím, že zákonům dáme takový tvar, aby platily vzhledem ke každému takovému (čtyřrozměrnému) systému souřadnic, t. j. aby rovnice je vyjadřující byly kovariantní vůči libovolným bodovým transformacím (str. 40.). V okolí bodu daného na ploše splývá plocha přibližně se svou tečnou rovinou; podobně bude v nekonečně malém oboru časoprostoru možno sestrojiti systém souřadnic, pro který platí specielní princip relativity (prostorové souřadnice X_1, X_2, X_3, časová X_4). Veličina

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \qquad (54)$$

je měřitelná měřítky a hodinami a je invariantní. Avšak pro rozsáhlejší obory časoprostoru (kde se gravitační pole nedá odstraniti zvláštní volbou souřadnic) nelze souřadnice voliti tak, aby platily metrické relace specielní relativity. Vždy však existuje pro dvě sousední bodové události invariant ds, který se dá vyjádřiti v libovolných souřadnicích. Lokální veličiny dX_ν dají se vyjádřiti lineárně užitím differenciálů souřadnic dx_ν a je pak

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \ldots. \qquad (55)$$

součtové znaménko (vzhledem k μ a k ν) se vynechává. Funkce $g_{\mu\nu}$ popisují vzhledem k volenému libovolnému systému souřadnic metrické poměry v časoprostoru a též gravitační pole (str. 41.). V obecné theorii relativity vyhledáváme rovnice, jež jsou kovariantní vzhledem k libovolným bodovým transformacím s kvadratickou differenciální formou (55). Rovnice geodetických čar které dávají minimum integrálu $\int ds$, zní

$$\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0, \qquad (90)$$

klademe-li

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \cdot \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right), \quad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

a $g^{\alpha\beta}$ značí subdeterminant příslušný prvku $g_{\alpha\beta}$ v determinantu formy ds^2. V obou posledních formulích sečítá se na pravo dle α a β od 1 do 4. Rovnice (90) je kovariantní vzhledem k libovolným bodovým transformacím.

Pohyb hmotného bodu, na který nepůsobí žádné síly, je přímočarý a rovnoměrný. Ve čtyřrozměrném kontinuu specielní relativistiky je to přímka. Nejjednodušší zobecnění přímky, které má význam pro theorii invariantů kvadratických differenciálních forem, je geodetická čára. Ve smyslu principu ekvivalence budeme tedy předpokládati, že bod, *jenž podléhá toliko setrvačnosti a gravitaci*, opisuje geodetickou čáru (90). Tato rovnice přechází v rovnici přímky, jsou-li všechny složky $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ gravitačního pole rovny nule. Volíme-li ds^2 ve tvaru

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2,$$

kde $x_4 = l$ značí c-násobný čas, budou rovnice geodetických čar zníti v prvém přiblížení

$$\frac{d^2 x_\mu}{dl^2} = o \text{ (str. 51)},$$

ve druhém přiblížení pak (připouštíme-li slabé gravitační pole) bude

$$\frac{d^2 x_\mu}{dl^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\gamma_{44}}{2}\right), \tag{90 a}$$

kterážto rovnice jest identická s pohybovou rovnicí bodu v gravitačním poli, identifikujeme-li $-\frac{1}{2}\gamma_{44}$ s potenciálem tíže (str. 52.) Pojem Newtonova potenciálu dá se generalisovati tensorem o 16 složkách, které se odvozují z koefficientů kvadratické formy ds^2. Pro shora napsaný specielní tvar výrazu ds^2 dostáváme srovnajíce s (90 a) pro γ_{44} určitou hodnotu a máme pak

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = \frac{Kc^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\int\frac{\sigma\, d V_0}{r}\right\}, \tag{90 b}$$

kde k souvisí s gravitační konstantou K podle rovnice

$$K = \frac{kc^2}{8\pi}.$$

I v prvním přiblížení liší se struktura gravitačního pole podstatně od pole Newtonova tím, že má charakter tensorový. — Vzhledem ke karteské soustavě souřadnic v nekonečně malém rozsahu, která volně padá a nemá rotačního pohybu, platí podle principu ekvivalence metrické vztahy euklidovské geometrie. To platí též pro lokální systémy souřadnic, které se vůči oné pohybují s malým zrychlením a tedy i pro ty, které vůči zvolené soustavě jsou v klidu. Pro takový lokální systém platí (pro dvě soumezné události)

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dT^2 = -dS^2 + dT^2, \tag{A}$$

kde dS se měří měřítkem a dT hodinami, jež vůči systému jsou v klidu („přirozeně měřené délky a doby“). Poněvadž pak ds^2 je dáno, užijeme-li souřadnic x_γ pro konečné části prostoru, výrazem

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

můžeme určiti vztah mezi přirozeně měřenými délkami nebo dobami a příslušnými rozdíly souřadnic. Ježto rozštěpení v prostor a čas je souhlasné při obou volbách souřadnic, rozštěpí se vztah, který obdržíme srovnáním obou výrazů pro ds^2, ve dva. Gravitační tensor specialisovaný pro lokální soustavu souřadnic a pro pomalé pohyby dává

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-\left(1+\frac{k}{4\pi}\int\frac{\sigma\, dV_0}{r}\right).\ g_{44}=1-\frac{k}{4\pi}\int\frac{\sigma\, d\,V_0}{r};$$

ostatní g_{ik} jsou $=o$. Integrace vztahuje se k prostoru vyplněnému hmotou (dV_0 element objemu, σ hustota hmoty a r vzdálenost elementu od potenciálového bodu). Je tedy

$$ds^2=-\left(1+\frac{k}{4\pi}\int\frac{\sigma\, d\,V_0}{r}\right)\left(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2\right)+$$

$$+\left(1-\frac{k}{4\pi}\int\frac{\sigma\, d\,V_0}{r}\right)dl^2 \qquad (B)$$

srovnajíce (A) s (B) máme přibližně

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{dX_1^2+dX_2^2+dX_3^2}&=\left(1+\frac{k}{8\pi}\int\frac{\sigma\, d\,V_0}{r}\right)\sqrt{dX_1^2+dX_2^2+dX_3^2}\\ dT&=1-\frac{k}{8\pi}\int\frac{\sigma\, d\,V_0}{r}\end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

Jednotlivé měřítko má tedy koordinatovou délku $1-\dfrac{k}{8\pi}\displaystyle\int\frac{\sigma\, d\,V_0}{r}$ (Koordinatenlänge) vzhledem k volené soustavě souřadnic. Druhá relace (106) praví, že intervalu mezi dvěma rázy hodin ($dT=1$) odpovídá v koordinatové míře „doba“ $1+\dfrac{k}{8\pi}\displaystyle\int\frac{\sigma\, d\,V_0}{r}$. Hodiny jdou tedy tím pomaleji, čím více važitelných hmot nalézá se v jejich blízkosti. Z toho dá se souditi, že spektrální čáry, které vznikají na povrchu Slunce, pošinují se (vůči čarám vznikajícím na zemi) asi o 2.10^{-6} své vlnové délky. Relativně k lokálnímu inerciálnímu systému je též dle obecné theorie relativity rychlost světla všude stejná ($=1$ při naší volbě jednotek). Zákon šíření světla je vyjádřen rovnicí $ds^2=o$, která dává — viz formuli (B) — pro rychlost světla přibližný výraz*)

$$\frac{\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}}{dl}=1-\frac{k}{4\pi}\int\frac{\sigma\, d\,V_0}{r} \qquad (107)\ (\text{str. } 59)$$

Z toho dá se vypočítati úchylka α světelného paprsku, který jde ve vzdálenosti Δ kolem hmoty M. Vychází

$$\alpha=\frac{k\,M}{2\pi\Delta}. \qquad (108)$$

Pro Δ = poloměru slunečnímu a M = hmotě Slunce vychází hodnota $\alpha=1{\cdot}7''$, což souhlasí s pozorováním. — Zobecněná theorie gravitace vede pro případ, že je dána pevná hmota vyvolávající středové souměrné gravitační pole,

*) Integrál ve formuli (B) považujeme za velmi malou veličinu.

k důsledku, že přitahovaný bod pohybuje se po ellipse, která se sama točí, ve smyslu pohybu úhlovou rychlostí

$$\frac{24\pi^3 a^2}{(1-e^2)c^2T^2};$$

a značí hlavní poloosu, e numerickou výstřednost a T dobu oběhu. Pro planetu Merkura dává tato formule asi 42", což odpovídá skutečně pozorovanému pohybu perihelu, jenž dosud theoretickou astronomií nebyl vysvětlen (str. 62.) — Nauka o relativitě přivádí do nového stadia otázku, je-li svět ve velkém neuklidovský (v malých oborech je velmi přibližně euklidovský). Nauka o relativitě činí pravděpodobným, že E. Mach byl na správné cestě, když vyslovil myšlenku, že setrvačnost záleží ve vzájemném účinku hmot. Thirring vypočítal z Einsteinových rovnic, že uvnitř duté rotující koule vznikají síly obdobné síle centrifugální a síle Coriolisově. Ačkoli jsou tyto síly tak malé, že nelze je experimentálně zkoumati, ukazuje therie relativity, že takové síly jistě jsou. V tom musíme spatřovati silnou oporu pro Machovu myšlenku o relativnosti všech účinků setrvačnosti (str. 66.).

II.

Výtah, který jsem uvedl v předešlém odstavci, podává, jak se domnívám, dosti dokladů k tomu, že Einsteinovy plány jsou dalekosáhlé. Tak již definice hodin (str. 1.—2.) ukazuje, že to, čemu obyčejně říkáme „hodiny," nejsou „hodinami" ve smyslu Einsteinově. Je možno považovati n. př. obyčejné kyvadlo za hodiny ve smyslu Einsteinově? Netroufám si vniknouti úplně do smyslu Einsteinovy definice; uvážím-li však, že na str. 59. se tvrdí, že všechny hodiny se v gravitačním poli zpožďují, myslím, že kyvadlo za hodiny považovati nelze, neboť kyvadlo tam, kde gravitačního pole není, vůbec nekývá, a zvětšuje-li se intensita gravitačního pole (mířící od závěsu ke konci kyvadla), zrychluje se tempo kyvadla. Einsteinův pojem hodin nekryje se tedy s obyčejným pojmem hodin.

Otázka o t. zv. „stejně oprávněných" soustavách souřadnic má v Einsteinových úvahách velkou úlohu. Systém, jehož těžiště je ve středu sluneční soustavy a jehož osy mají vůči stálicím neproměnné směry, jest inerciální; rovněž tak každý jiný, který se vůči onomu pohybuje přímočaře a rovnoměrně. Při tom se předpokládá, že sluneční soustava nepodléhá vnějším účinkům; máme na mysli toliko pohyby ve sluneční soustavě.

Je zvláště zajímavým důsledkem klassické mechaniky, že inerciální systém dá se konstruovati na základě pozorování (distancí, úhlů a hmot a p.) konaných uvnitř isolované hmotné soustavy. Inerciální soustavy je považovati za výsledek určité konstrukce. Nejsou v žádném vztahu k ryze filosofickému pojmu absolutního prostoru, který je k přesnému odůvodnění mechanických vět právě tak zbytečný jako pojem absolutního času. Newton píše sice na několika místech o absolutním čase a absolutním prostoru; vynecháme-li však prostě tyto jeho poznámky, jeho soustava mechanicky tím ani dost málo neutrpí, neboť v úlohách mechanických máme co činiti s délkami a intervaly časovými, které se měří obvyklým způsobem, nikoli však s absolutním prostorem ani s absolutním časem.

Výrok o nerozštěpitelnosti časoprostorového kontinua (str. 20) není dosti jasný. Zdá se mě, že je ve sporu s postupem, kterého Einstein užívá ve všech applikacích; na konec vždy vyjdou rovnice, ve kterých je čas od prostoru oddělen ve smyslu obyčejného názoru.

Víra v takřka hmotnou reálnost časoprostoru vede Einsteina k tomu, že označuje časoprostorové kontinuum jakožto věc, která způsobuje setrvačnost, hmot. To je názor, který, jak, myslím, nikterak ze základů mechaniky nevyplývá; snahy „vyloučiti prostor jakožto působící příčinu z mechaniky“ (str. 36.) považuji za zcela bezpředmětné.

Úprava mechanických rovnic na tvar invariantní vůči libovolným transformacím byla provedena dávno před Einsteinem. Lagrange ukázal, že pohyb jakékoli mechanické soustavy dá se vystihnoti rovnicemi

$$-\frac{\partial T}{\partial q_k}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=Q_k,\ k=1,\ 2,\ldots n.$$

Zde značí $q_1, q_2 \ldots q_n$ veličiny, kterými je definována okamžitá konfigurace soustavy, $\dot{q}_k$ jejich derivace podle času, T kinetickou energii soustavy a $Q_k \,.\, dq_k$ nekonečně malou práci vnějších sil, která se vykoná, vzroste-li q_k o dq_k a zůstávají-li současně ostatní veličiny q bez proměny. Lagrangeových rovnic je právě tolik, kolik má soustava stupňů volnosti a jsou invadiantní vzhledem k libovolné transformaci tvaru

$$q_k=f_k\,(q'_1,\ q'_2,\ldots q'_n, t),\ k=1,2,\ldots n.$$

Ve specielním případě, že běží o pohyb jediného bodu v daném silovém poli, neliší se vlastně rovnice Lagrangeovy od rovnic Einsteinových;*) ukáži to níže na problému rotujícího systému souřadnic. Einsteinovy pohybové rovnice nedají se však generalisovati pro pobyb soustavy bodů vzájemně na sebe působících ani pro pohyb tuhých těles. Uvažujme jen tuto okolnost: pohybuje-li se bod toliko pod vlivem gravitace a setrvačnosti, jsou podle Einsteina differenciální rovnice pohybové totožny s rovnicemi geodetických čar určité differenciální formy ds^2. Tyto rovnice (90) obsahují celkem 6 integračních konstant. Pohybuje-li se m bodů, musí míti patrně každý bod svoje zvláštní „ds^2,“ neboť nelze trajektorie všech bodů, které jsou závisly úhrnem na $6\,m$ integračních konstantách, vyjádřiti jakožto geodetické čáry jediné a též formy ds^2. Problém tří těles nebyl v Einsteinově theorii vůbec ani formulován (resp. byly nastíněny různé formulace na základě zcela libovolných nových předpokladů, takže výsledek v tomto směru je ještě zcela neurčitý). Poněvadž pak Einstein sám praví, že Newtonova theorie gravitace liší se i v prvním přiblížení podstatně od nové (neboť v této má gravitační pole tensorový charakter), nelze naprosto předvídati, jak dopadnou na př. výpočty perturbací na základě Einsteinovy theorie, budou-li vůbec jednou provedeny. Není přesného důvodu k tvrzení, že perturbace způsobené ostatními planetami v pohybu perihelu Merkurova vysvětlí se Einsteinovou theorií právě tak jako theorií Newtonovou. Ale zdá se, že Einstein považuje toto tvrzení za samozřejmé, neboť praví, že vysvětlil „zbytek“ (přibližně 40″ na 100 let) v pohybu perihelu; nic jsme však neslyšeli o tom, jak vysvětlil největší část tohoto pohybu (celý postup perihelu za 100 let činí asi 570″; z toho klasická mechanika vykládá perturbacemi asi 530″).**) Ostatně zakládá Einstein svůj výpočet zejména na tom, že koefficienty g_{14}, g_{24}, g_{34}, ve formě ds^2 jsou rovny nule, což však theorií nikterak není odůvodněno.***) Korrekční člen Einsteinem nalezený byl už dříve, bez theorie o relativitě, odvozen.†)

Důsledky o zkracování měřítek a zvolňování chodu hodin v gravitačním poli jsou odvozeny na základě nepřijatelného předpokladu. Formule A a B

*) Srv. též E. T. Whittaker: Analytical Dynamics, 2nd Edition, Cambridge, 1917, § 28.

**) Srv. Le Roux Comptes Rendus t. 172, p. 1407; t. 175, p. 809; J. Trousset, Comptes Rendus t. 174, p. 1160. H. Kienle Die Naturwissenschaften Bd. X. p. 217., 246.

***) Viz v. Gleich Annalen der Physik (4) Bd. 72., p. 221.

†) Gerber Annalen der Physik (4). 52, p. 415.

nemohou totiž, nechť mezi souřadnicemi X_1, X_2, X_3, T a x_1, x_2, x_3, x_4 jsou vztahy jakékoli, vyjadřovati tutéž differenciální formu ds^2; vždyť pravá strana formule (A) je forma, jejíž křivost (Riemannův tensor) rovná se nule, kdežto o pravé straně formule (B) to obecně naplatí. Proto jsou vzorce (106) nesprávné. Croze uveřejnil obšírnou práci, v níž srovnává různá pozorování o posunutí čar ve slunečním spektru, vzhledem k polohám, které mají příslušné čáry ve zdrojích pozemských. Výsledek je ten, že Einsteinem vypočtené posunutí nevystihuje to, co skutečně bylo pozorováno.*)

K posouzení vzorce (108) budiž uvedeno toto: R. 1801 uveřejnil německý mathematik Soldner**) pojednání, v němž předpokládá, že gravitace působí na světlo právě tak jako na hmotu; představuje si dráhu světelného paprsku, jenž probíhá blízko Slunce, jako hyperbolickou trajektorii bodu přitahovaného ke Slunci podle Newtonova zákona. Předpokládáme-li, že v určité vzdálenosti Δ od středu Slunce je rychlost paprsku $= c$, je tím dráha určena a snadný výpočet dává pro úhel asymptot příslušné hyperboly hodnotu

$$\alpha = \frac{2KM}{c^2 \Delta}, \tag{C}$$

kde K značí gravitační konstantu; α není nic jiného než úchylka paprsku majícího vzdálenost Δ od Slunce. Einsteinův vzorec (108) lze psáti ve tvaru

$$\alpha = \frac{4KM}{c^2 \Delta}. \tag{D}$$

(D) dává úchylku dvakráte větší než (C). Pozorování hvězd při zatmění Slunce ukázalo, že vyhovuje vzorec (D). Podle Einsteina je rychlost světla v blízkosti Slunce menší než v prostorech interstellárních; paprsek jde v okolí Slunce tak, jakoby se lámal (směrem ku středu Slunce) do prostředí s větším indexem lomu. Podle Soldnera jest ovšem rychlost světla u Slunce větší. Vzorec (C) dal by se přispůsobiti pozorování, kdybychom předpokládali, že síla, kterou je světlo (elektromagnetická energie) ke Slunci přitahováno, vypočte se podobně jako síla, kterou je přitahována hmota, s tím toliko rozdílem, že se v příslušné formuli píše $2K$ na místo gravitační konstanty K. K rozřešení problému bylo by třeba věděti, je-li v blízkosti Slunce rychlost světla větší či menši než v prostorech interstellárních.

Přistupme nyní k problému rotace a t. zv. sil centrifugálních. Pohybové rovnice bodu nepodléhajícího žádným silám mají v inerciální soustavě $Oxyz$ tvar

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0. \tag{I}$$

V soustavě $Ox'y'z'$, která se točí vůči $Oxyz$ konstantní úhlovou rychlostí ω kolem Oz, obdržíme rovnice pro pohyb téhož bodu provedouce transformaci

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, \quad y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, \quad z = z', \quad t = t'$$

Vynecháme-li akcenty v transformovaných rovnicích, vychází po snadné úpravě tyto rovnice:

$$\ddot{x} = x\omega^2 + 2\dot{y}\omega, \quad \ddot{y} = y\omega^2 - 2\dot{x}\omega, \quad \ddot{z} = 0, \tag{II}$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že hmota bodu $= 1$. Pravé strany prvních dvou rovnic (II) dají se interpretovati jakožto složky síly na bod působící (síla ta

*) Viz F. Croze: Annales de Physique (9) XIX. p. 53.

**) Viz Lenardovu práci v Annalen de Physik (4) 65. p. 593.

je složena ze síly centrifugální, závislé toliko na poloze bodu, a ze síly Coriolisovy, závislé toliko na jeho rychlosti vůči pohyblivé soustavě souřadnic). Avšak tato síla je zdánlivá; složky skutečné síly měří se součinem ze hmoty a ze zrychlení jen v systému inerciálním; jednoduchá mathematická transformace, vedoucí od formulí (I) k formulím (II) není doprovázena vznikem skutečné síly.

Upravme nyní rovnice tak, aby měly tvar invariantní vuči libovolným transformacím souřadnic. Podle Lagrangea položíme nejprve v systému inerciálním.

$$q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z,\ 2T = (\dot{q}^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2),\ Q_h = 0.$$

Lagrangeovy rovnice

$$-\frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{I a}$$

jsou totožné s rovnicemi (I). V systému rotujícím (vynecháváme akcenty) bude sice zase

$$q_1 = x,\ q_2 = y\ q_3 = z,$$

avšak kinetická energie bude dána formulí transformovanou

$$2\,T' = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\,(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)\,\omega + (q_1^2 + q_2^2)\,\omega^2;$$

Lagrangeovy rovnice

$$-\frac{\partial T'}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{II a}$$

budou totožny s rovnicemi (II). V inerciálním systému i ve druhém mají rovnice stejný tvar. Invariance je dokonalá a platila by i pro každou jinou transformaci (třeba pro přechod k souřadnicím křivočarým); zdánlivé síly, které vznikají vlivem otáčení, jeví se jen v tom, že výraz T' pro kinetickou energii je složitější než výraz T. Zvláštní dynamický význam inerciálního systému není však nikterak odstraněn: jsou to právě jen inerciální systémy, v nichž $2\,T$ redukuje se na součet čtverců prvních derivací veličin q_k, v každém jiném systému je výraz složitější a závisí na relativním pohybu vůči systému inerciálnímu.

Podle Einsteina formuluje se problém takto: V inerciálním systému máme formu

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2,$$

kde c značí rychlost světla. Utvořme determinant koefficientů g_{ik}, vyhledejme ke každému prvku minor, a dělme jej hodnotou determinantu. Pak najdeme veličiny g^{ik} a můžeme utvořiti rovnice (90). Za nezávisle proměnnou považujeme čas t a klademe

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = t.$$

Výpočet vede k rovnicím (I). Transformujme nyní formu ds^2 na systém rotující; vychází (vynecháváme akcenty)

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\,(x\,dy - y\,dx)\,\omega\,dt + \\ + (\omega^2 x^2 + \omega^2 y^2 - c^2)\,dt^2.$$

Veličiny $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ vyskytující se v rovnicích (90) jsou většinou rovny nulle; tak pro $\sigma = 1$ jsou všechny rovny nulle mimo dvou:

$$\Gamma^{1}_{24} = -\omega, \quad \Gamma^{1}_{44} = -x\,\omega^{2}.$$

Snadný výpočet ukazuje, že rovnice (90) příslušné formě ds'^{2} jsou totožny s rovnicemi (II).

Docházíme k tomuto výsledku: za předpokladu, že čtvrtá proměnná x_4 rovná se času t (a tento předpoklad je ve všech applikacích Einsteinovy theorie na mechanické problémy splněn), jsou rovnice (90), kovariantní s formou ds^2, totožny s rovnicemi Lagrangeovými. Mezi formou ds^2 a kinetickou energií T je patrně vztah

$$ds^2 = (2T - c^2)\,dt^2, \tag{III}$$

přechod od T k rovnicím (II) liší se jen formální úpravou od postupu, jímž se z ds^2 vyvozují rovnice „geodetických čar v časoprostoru“ (90). Einstein ovšem dává centrifugálním a Coriolisovým silám název „gravitačního pole“. Terminologie tato je podle mého názoru velice nevhodná, neboť vede snadno k nedorozumění; „gravitační pole,“ jež se dá odstraniti pouhou rotací soustavy souřadnic, nutno rozeznávati od toho, čemu se obyčejně gravitační pole říká. Jen přesně homogenní pole gravitační dalo by se (zdánlivě) odstraniti rovnoměrně zrychleným pohybem souřadného systému; jakmile však systém se pohybující přijde do míst, kde se nehomogennost pole znatelně projevuje, nelze ani o zdánlivém odstranění gravitačního pole mluviti.

Dynamický význam inerciálních systémů zůstává nezměněn: jen v nich má Einsteinova forma ds^2 jednoduchý tvar $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$, takže dráhy bodu nepodléhajícího žádným silám jsou přímky. Kdybychom použili tohoto jednoduchého tvaru pro souřadný systém rotující vůči inerciálnímu (jinými slovy: kdybychom chtěli odvoditi Lagrangeovy rovnice z formule pro kinetickou energii pohybu relativního vůči systému rotujícímu), došli bychom k pohybovým rovnicím nesprávným.

Rovnice (III), kde T značí kinetickou energii pohybu vztaženého k systému inerciálnímu, podává přesnou definici invariantu ds^2. Shrneme-li vše, co bylo řečeno, dostáváme tento výklad o t. zv. rovnoprávnosti různých soustav souřadných, který platí nejen pro rotační pohyb souřadné soustavy, nýbrž — pro pohyby jakékoliv a pro libovolnou transformaci souřadnic: Rovnice (90) pro pohyb volného bodu jsou invariantní při libovolném pohybu soustavy souřadnic a neliší se podstatně od obecných rovnic Lagrangeových. Kvadratickou formu ds^2, jejímiž kovarianty jsou levé strany oněch rovnic, nutno voliti tak, aby výraz

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + c^2$$

byl roven dvojnásobné kinetické energii bodu v relativním pohybu vůči systému inerciálnímu.

Zkrátka řečeno: pojem kinetické energie nedá se relativisovati. Rovněž rozdíl mezi skutečnými a zdánlivými silami nedá se odstraniti úvahami o tensorech, invariantech, rovnoprávných systémech souřadnic, světových čarách ve čtyřrozměrném časoprostoru atd. Přání Machovo a Einsteinovo pochopiti centrifugální síly jakožto účinek všech hmot světa zůstává jen přáním a fysikální význam inerciálních systémů zůstává invariantní vůči všem relativistickým snahám.

Předchozí úvahy týkaly se jen některých stránek nauky o relativitě; úplný rozbor této nauky, která často byla vyhlašována za revoluční a za dokonalejší mechaniku a fysiku, není prozatím nutný, poněvadž dosud nikdo neví, jak vypadají na př. relativistické pohybové rovnice pro nejjednodušší mechanickou úlohu o dvou nebo o více stupních volnosti. Mluví-li přes to Einstein o tom, že relativistické theorie mají převahu nad klasickou mechanikou, dává na jevo sebevědomí neobyčejně veliké.

Složité (a podle mého mínění zbytečně složité) mathematické pomůcky, kterých užívá Einstein k odvození t. zv. rovnic pro gravitační pole i k jiným účelům, zakrývají to, co je vlastní příčinou a hybnou silou relativistického hnutí: Machovu přírodní filosofii, která tvrdí, že pojem síly je „metafysický“ a že má býti proto z fysiky odstraněn. A přece není nic jednoduššího než přesvědčiti se o objektivním rozdílu mezi silami skutečnými a silami zdánlivými. Machův odpor proti pojmu síly jest fysikálně odůvodněn zrovna tak málo jako jeho odpor proti molekulám a atomům. Se stanoviska Machova „ryze fenomenologického popisu“ byl by na př. v mechanice systém pohybových rovnic všechno a otázky specificky dynamické (na př. otázka o rozdílu mezi silami skutečnými a zdánlivými) neměly by v takové theorii vůbec místa. V důsledcích této filosofie přeceňuje Einstein význam mathematických transformací a domnívá se, že úpravou mechanických rovnic na invariantní tvar lze překlenouti na př. rozdíl mezi silami centrifugálními a silami skutečnými.

Za největší vadu celé theorie považuji nepřesné užívání křivočarých souřadnic a invariantu ds^2. Ukázal jsem, že rovnice (106) jsou odvozeny způsobem naprosto nepřípustným; podobných příkladů dalo by se uvésti více (tak na př. používání polárních souřadnic v theorii Merkura je ve sporu s tvrzením o neplatnosti Euklidovy geometrie v okolí Slunce). Má-li se něco vůbec z Einsteinových theorií udržeti, bude nutno důkladně je přepracovati a to tak, aby více přišla k platnosti mathematická přesnost a méně Machova filosofie.

*

K předešlému článku prof. Hostinského. Čtyry Einsteinovy přednášky o teorii relativnosti uveřejněné v sedmdesátistránkové knížce podaly prof. Hostinskému podnět ke kritice Einsteinovy teorie, která zvláště ke konci vyznívá neobvykle ostře. Chci v dalším stručně ukázati, že námitky Hostinského proti Einsteinově teorii spočívají z převážné části — a to se týká právě těch nejdůležitějších — na omylech velmi vážných; nechávám při tom stranou otázku, pokud se knížka tak malého rozsahu, o níž sám autor v úvodu praví, že její obsah nečiní nároků na úplnost, a z níž H. posuzuje vlastně jen nepatrnou část, hodí ke kritice teorie, o které dnes již existuje celá literatura; soudím, že by asi H. mnoho ze svého posudku vynechal, kdyby byl lépe přihlédl k tomu, co bylo také jinde o teorii relativnosti napsáno.

H. si nejdříve klade otázku, možno-li pokládati obyčejné kyvadlo za hodiny v Einsteinově smyslu. Podle Einsteinovy teorie se totiž všechny hodiny v gravitačním poli zpožďují, naproti tomu kyvadlo tam, kde gravitačního pole není, vůbec nekývá a roste-li intensita gravitačního pole ve vhodném směru, tempo kyvadla se urychluje. Z toho soudí H., že kyvadlo za hodiny v Einsteinově smyslu pokládati nelze a že se Einsteinův pojem hodin s obyčejným pojmem hodin nekryje. Myslím, že kyvadlo samo o sobě není hodinami ani v Einsteinově, ani v obyčejném slova smyslu; za hodiny bylo by možno pokládati teprve systém kyvadlo-země, pokud se ovšem vzájemna poloha obou nemění. Ale v Einsteinově větě o vlivu gravitačního pole na chod hodin jde o t. zv. hodiny bodové, t. j. o hodiny, jež měří čas v určitém bodu; proto se hodiny, jež představuje systém kyvadlo-země, ke zkoumání její platnosti nehodí.

K tomu, co praví H. o inerciálních soustavách souřadných, bych podotkl toto. Podle klasické mechaniky možno skutečně inerciální soustavy souřadné stanoviti z pozorování konaných uvnitř sluneční soustavy. Ukazuje se, že systém, jehož počátek je ve středu slunce a jehož osy mají vůči stálicím neproměnné směry, je velmi přibližně inerciální, přesně to platiti nemůže, poněvadž stálice mají vlastní pohyb. To je fakt empiricky zjištěný; klasická mechanika sama sebou nikterak nevylučuje možnost, že by systémy inerciální konaly vůči stálicím jakýkoli sebe komplikovanější pohyb. Jsou-li ve skutečnosti inerciální soustavy souřadné v tak jednoduchém vztahu k stálicím, jak měřením nálezeno, možno v tom jistě viděti důkaz, že stálice, po případě velmi vzdálené hmoty ve vesmíru, mají nějaký vliv na mechanické děje v naší sluneční soustavě. Klasická mechanika tento vliv popírá pokládajíc sluneční soustavu za isolovaný systém. Zde, myslím, je v klasické mechanice mezera, kterou překlenula teprve Einsteinova teorie gravitační.

Einsteinův výrok o nerozštěpitelnosti prostoročasového kontinua (Einstein praví, že toto kontinuum nelze rozštěpiti objektivně) je docela jasný; prostoročasové kontinuum nedá se rozštěpiti v úvahách obecných, když užíváme obecných souřadnic, jakmile však přejdeme k souřadnicím speciálním, je rozštěpení možné.

H. praví dále, že mechanické rovnice byly upraveny na tvar invariantní vůči libovolným transformacím již dávno před Einsteinem a na důkaz tohoto tvrzení uvádí rovnice Lagrange-ovy, jež, mimochodem řečeno, v tom tvaru, v němž jsou uvedeny, neplatí pro pohyb jakékoli mechanické soustavy, jak H. tvrdí, nýbrž jen pro pohyb soustavy holonomní. K tomu tolik. Nejen mechanické rovnice, ale všechny rovnice vyjadřující zákony fysiky dají se uvésti na invariantní tvar, to plyne přímo z jejich významu a je to věc dávno známá.[1] Ale to není ta invariance, o kterou Einsteinovi jde. Einstein hledá totiž takové rovnice, ve kterých inerciální soustavy souřadné nemají zvláštního oprávnění před soustavami jinými, každá soustava souřadná má tedy stejný fysikální význam. Tomu rovnice Lagrange-ovy nevyhovují; transformujeme-li je totiž na libovolný systém souřadný, objeví se v nich urychlení tohoto systému vůči inerciálním soustavám souřadným. Je to viděti na příkladu, který H. počítá v dalším a v němž jde o transformaci Lagrange-ových rovnic na osy souřadné, které se vůči osám soustavy inerciální otáčí konstantní rychlostí. H. praví ostatně výslovně, že zvláštní dynamický význam inerciálních systémů není v Lagrange-ových rovnicích nikterak odstraněn. To vše tedy s teorií Einsteinovou nesouvisí.

Jako nedostatek Einsteinovy gravitační teorie uvádí H, dále, že se pohybové rovnice této teorie platící pro pohyb hmotného bodu v daném gravitačním poli (podle Einsteina pro pohyb volného bodu hmotného) nedají generalisovati na pohyb soustavy bodů na sebe vzájemně působících ani na pohyb tuhých těles. To, myslím, ani nepřekvapuje; Einsteinovy rovnice pro pohyb hmotného bodu v gravitačním poli platí totiž za předpokladu, že bod sám na pole nemá vlivu, nepůsobí tedy na venek, představuje jen jakési zkušební tělísko, jakého se na př. užívá v elektřině a magnetismu k definici elektrické a magnetické síly. Pohybové rovnice pro soustavu hmotných bodů na sebe působících musily by se odvoditi z diferenciálních rovnic pro gravitační pole; že to je úloha nesmírně obtížná a snad zatím neřešitelná, je možno, ale nedokazuje to nesprávnost teorie. Na pohyb tuhých těles nedají se Einsteinovy pohybové rovnice jediného bodu rozšířiti již proto, že Einsteinova teorie tuhých těles nezná. Nebyl-li problém tří těles v Einsteinově teorii dosud formulován, nedokazuje to zase nikterak nesprávnost teorie, nanejvýš jen její obtížnost. Pro účely astronomické vystačíme ostatně i podle Einsteina s výsledky teorie Newtonovy.

S tím souvisí i to, co praví H. o perturbacích pohybů planetárních. Nelze prý předvídati, jak dopadnou výpočty těchto perturbací na základě Einsteinovy teorie, budou-li vůbec jednou provedeny. Není prý přesného důvodu k tvrzení, že perturbace způsobené ostatními planetami v pohybu

[1]) A. Einstein, Ann. d. Phys. 55., 241. 1918.

perihelu Merkurova vysvětlí se Einsteinovou teorií právě tak jako teorií Newtonovou, ale zdá prý se, že Einstein považuje toto tvrzení za samozřejmé. Ve skutečnosti ovšem je to s těmi perturbacemi i v Einsteinově teorii docela v pořádku Jde totiž při nich o poměrně slabá gravitační pole vzbuzená tělesy, jejichž rychlost je velmi malá proti rychlosti světelné; v tom případě da se vždycky s tou přesností, které je pro výpočet perturbací třeba, teorie Einsteinova nahraditi Newtonovou. Nemluví-li Einstein výslovně o perturbacích v knížce, v níž celé jeho teorii gravitačni je věnováno něco přes 20 stránek, není snad ani divu, je to zato dobře vyloženo jinde, na př. ve známé knize Laue-ově.[2]) Také Mie[3]) dokázal zcela obecně, že za podmínek svrchu uvedených je Einsteinova gravitační teorie identická s teorií Newtonovou. Tím je také dokázáno, že Einsteinův počet pro pohyb hmotného bodu ve slabém gravitačním poli je docela správný. Volil-li při něm Einstein koeficienty g_{14}, g_{24}, g_{34} rovny nule, znamená to, že rozhodl určitým způsobem o volbě systému souřadného, k tomu má plné právo. Požadavek, aby perturbace pohybů planet byly vypočtěny přímo z Einsteinových rovnic, připadá mi tak, jako kdyby někdo chtěl řešiti oscilace Leydenských lahví z rovnic Maxwellových.

Po odečtení perturbací zbývá v pohybu perihelu Merkurova člen, který Newtonova teorie nemůže vyložiti a který Einstein odvodil ze své teorie jako druhé přiblížení. H. praví o něm, že byl odvozen už dříve bez nauky o relativitě; pod čarou cituje práci Gerberovu. Tento citát mne, upřímně řečeno, dosti překvapil; myslil jsem totiž, že záležitost s Gerberovou prací je již dávno odbyta. Tato práce byla uveřejněna poprvé r. 1898 v ZS f. Mathem. u. Phys., pak obšírněji r. 1902 v programu jisté střední školy v Prusku; autor v ní přichází k témuž vzorci pro zbytek pohybu Merkurova perihelu, jaký odvodil později Einstein ze své gravitační teorie. Práce Gerberova nevzbudila jak se zdá, mnoho ohlasu, až r. 1917, již po autorově smrti, otiskl ji Gehrcke v Ann. d. Phys., aby ukázal, že pohyb Merkurova perihelu byl kvantitativně vyložen již před Einsteinem. Ale hned po tom ukázal mnichovský astronom Seeliger,[4]) že celý počet Gerberův je založen na elementární chybě, kterou jak praví, je tak snadno nalézti, že ani nepokládal za nutno dříve na ni upozorniti. Gerber totiž vychází z nového vzorce pro gravitační potenciál, jímž má býti, jak tvrdí, vyjádřeno, že se gravitační účinek šíří rychlostí světelnou a z něho odvozuje pohybové rovnice hmotného bodu (planety) přitahovaného pevným centrem (sluncem) pomocí Lagrange-ových rovnic. S těmi však, jak ukazuje Seeliger, neumí zacházeti, takže chybným počtem dospívá ke správnému vzorci, kdežto správný počet vycházející z jeho výrazu pro potenciál dává pohyb Merkurova perihelu v opačném směru než se skutečně děje. Laue[5]) ukázal mimo to, že se Gerberův výraz pro potenciál nedá srovnati s předpokladem, že se gravitace šíří konečnou rychlostí, takže nemá toho významu, který Gerber v něm hledá. Nelze tedy říci, že Gerber vzorec pro zbytek pohybu Merkurova perihelu odvodil, poněvadž jistě nejmenší požadavek, který při odvození nějakého vzorce můžeme klásti, je ten, aby aspoň bylo správně počítáno. Na celé věci je zajímavé jen to, že Gerber správný vzorec uhodl; jak se to asi stalo, vykládá Laue jinde.[6]) Poplach s Gerberovou prací utichl tak rychle, jak vznikl; opakuje-li nyní H. Gehrcke-ovo tvrzení, že Gerber Einsteinův vzorec odvodil, má snad důvody, pro které jeho práci, kterou cituje, pokládá za správnou; ovšem neuvádí jich a je jisto, že ta práce správná není.

Pak přechází H. k Einsteinovým větám o zkracování měřítek a zvolňování chodu hodin v gravitačním poli. Praví o nich, že jsou odvozeny na

[2]) M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, 2. Bd, str. 221.
[3]) G. Mie, Ann d. Phys. 69, 37. 1922.
[4]) H. v. Seeliger, Ann. d. Phys 53, 31. 1917.
[5]) M. v. Laue, Ann d. Phys. 53, 214. 1917.
[6]) M. v. Laue, Naturwissenschaften, 8, 735 1920.

základě nepřijatelného předpokladu, neboť prý formule A a B (viz hořejší článek) nemohou, nechť jsou mezi souřadnicemi X_1, X_2, X_3, T a x_1, x_2, x_3, x_4 vztahy jakékoli, vyjadřovati touž diferenciální formu ds^2, poněvadž pravá strana formule A je forma, jejíž křivost (Riemannův tensor) se rovná nule, kdežto o pravé straně formule B to obecně neplatí. Proto jsou prý vzorce (106, viz opět předešlý článek), z nichž Einstein uzavírá, že se měřítka v gravitačním poli zkracují a chod hodin se zvolňuje, nesprávné. H se vrací k tomu ještě ke konci svého článku, kde praví, že dokázal, že rovnice (106) jsou odvozeny způsobem naprosto nepřípustným; na to také patrně naráží, praví-li, že za největší vadu celé teorie pokládá nepřesné užívání křivočarých souřadnic a invariantu ds^2.

Zde se přihodil H-ému omyl velmi vážný. Formule A udává totiž čtverec elementu obloukového světové čáry v lokálním systému souřadném a platí jen ve zvoleném bodě oné čáry a jeho okolí. S ní porovnává Einstein obecný výraz pro čtverec téhož elementu a oba výrazy klade si rovny; rozumí se samo sebou, že rovnice tak vzniklá platí zase jen ve zvoleném bodě světové čáry a jeho okolí. V čem je tu chyba a co tu má dělat křivost, není mi jasno; zdá se mi však, že H. přehlédl, že koefficienty v obecném výrazu pro ds^2 jsou nyní konstanty. Aby správnost Einsteinova postupu a nesprávnost tvrzení H-ého bylo lépe viděti, vyložím vše na příkladě, v němž je čtyřrozměrný prostorčas nahrazen dvojrozměrnou plochou. Na ní budiž dána křivka; poloha obecného bodu této křivky nechť je stanovena dvěma parametry (Gaussovými souřadnicemi) x_1 a x_2. Čtverec jejího elementu obloukového je pak dán výrazem

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2 g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2,$$

g_{11}, g_{12}, g_{22} jsou obecně funkce souřadnic x_1, x_2. Místo toho se psává

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

na pravé straně se má sčítati podle μ a ν, součtová znaménka se vynechávají. Zvolme si nyní na křivce bod M, který je regulárním bodem plochy. Pak můžeme nekonečně malou část plochy v okolí tohoto bodu pokládati za rovinnou a vždy se dají zavésti takové souřadnice X_1 a X_2, že čtverec elementu obloukového v bodě M má tvar

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2.$$

Dostaneme tyto souřadnice, když vedeme v M tečnou rovinu a jednotlivé body křivky do ní promítneme, X_1 a X_2 jsou pak kartézské souřadnice těchto průmětů. Poslední výraz pro ds platí ovšem jen v bodě M a jeho okolí; souřadnice X_1 a X_2 tvoří lokální system souřadný v tomto bodu. Einsteinův postup je nyní ten, že oba výrazy pro ds^2 porovná, klade tedy

$$dX_1^2 + dX_2^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2 g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2.$$

To je přece vždy možno; do výrazů pro koefficienty $g_{\mu\nu}$ nutno ovšem dosadit ty hodnoty souřadnic x_1 a x_2, jež přísluší bodu M. Námitka H.-ého proti tomu zní, že poslední rovnice je nesprávná, poněvadž na levé straně je forma, jejíž křivost se rovná nule, kdežto o pravé straně prý to neplatí. Ale koefficienty g_{11}, g_{12}, g_{22} jsou v této rovnici konstanty, neboť rovnice sama platí jen pro bod M a jeho okolí v tom rozsahu, v němž se dá plocha nahraditi tečnou rovinou, a mluviti o křivosti nemá tu smyslu, poněvadž při tomto přiblížení se křivost vůbec zanedbává. O správnosti těchto úvah, jež se dají beze všeho přenésti na čtyřrozměrný prostor čas, není patrně nejmenší pochybnosti. Ale podle H-ého je v nich hlavní vada celé teorie a to je jeden z důkazů, z nichž H. soudí, že v Einsteinově teorii musí přijíti k platnosti větší matematická přesnost! Podotýkám jen ještě, že tu jde o věci, jež jsou v Einsteinově knížce jasně vyloženy, (i příklad svrchu uvedený je odtud) a jež musí býti jasné každému, kdo chce rozuměti již základům Einsteinovy teorie, tím spíše ovšem tomu, kdo ji chce kritisovati.

Z vlivu gravitačního pole na chod hodin usoudil Einstein, že čáry ve spektru slunce jsou nepatrně posunuty k červenému kraji, srovnáme-li je se stejnými čarami ve spektrech pozorovaných na zemi. S bezpečností tento efekt dosud dokázán není; jde tu jistě o zjev nesmírně komplikovaný, neboť na polohu spektrálních čar má vliv tlak, anomální disperse v koroně sluneční, Dopplerův efekt atd.; je velmi nesnadné tyto vlivy odděliti od hledaného vlivu gravitačního pole. Existuje již o tom celá literatura; H. uvádí jen referát Croze-ův, ostatně pěkný, jehož výsledek je prý ten, že Einsteinem vypočtěné posunutí nevystihuje to, co skutečně bylo pozorováno. Mám dojem, že Croze formuluje svůj konečný soud poněkud opatrněji; praví totiž ke konci, že se pozorované posuvy spektrálních čar kvantitativně nedají dosud nijak vyložiti a radí vyčkati výsledků obsáhlých měření čar v celém slunečním spektru zahájených ve hvězdárně na Mount Wilson. Jak je tato opatrnost na místě, je viděti nejlépe z toho, že dva pozorovatelé, a to ti nejvážnější, St. John a Evershed, kteří dříve Einsteinův posuv hledali marně, nyní oznamují, že jej nalezli. Podrobněji je to vyloženo v článku prof. Nachtikala ve „Zprávách".

Druhý zjev Einsteinem předpověděný, ohyb paprsku světelného v gravitačním poli slunce, je již potvrzen. V souvislosti s ním upozorňuje H. na práci Soldnerovu z r. 1802, kterou otiskl r. 1921 v Ann. d. Phys. Lenard. Soldner totiž, jak praví H., předpokládá, že gravitace působí na světlo právě tak jako na hmotu; představuje si dráhu světelného paprsku, jenž probíhá blízko slunce, jako hyperbolickou trajektorii bodu přitahovaného ke slunci podle Newtonova zákona. Přichází tak k vzorci pro ohyb paprsku světelného v gravitačním poli slunce, který se od vzorce Einsteinova liší jen tím, že jeho konstanta má poloviční hodnotu; úhel, o který se paprsek při průchodu gravitačním polem slunce uchýlí od původního směru, činí tedy podle Soldnera právě polovici hodnoty předpověděné Einsteinem a měřením potvrzené. Myslím že by bylo jasnější a jednodušší říci přímo, že Soldner vychází z emanační teorie světla; paprsek světelný pokládá za dráhu hmotné částice vyslané zdrojem (stálicí) s rychlostí světelnou, na niž slunce působí gravitační silou podle Newtonova zákona tak jako na obyčejnou hmotu. Částice opisuje pak Keplerovu kuželosečku, která je v tomto případě hyperbolou; paprsek světelný se tedy prohne. Že z emissní teorie světla plyne také prohnutí světelného paprsku v gravitačním poli slunce, bylo dávno známo a uvádělo se to dříve, než Lenard Soldnerovu práci otiskl; jde tu konec konců o docela jednoduchou úlohu z problému dvou těles v podstatě dávno řešenou. Hlavní nedostatek Soldnerova výkladu záleží ovšem v tom, že dává poloviční hodnotu úchylky skutečně pozorované. Když Lenard r. 1921 uveřejnil Soldnerovo pojednání, byl ohyb paprsku světelného v gravitačním poli slunce měřen jen jednou, při úplném zatmění slunce 29. května 1919. Tato měření nevylučovala možnost, že hodnota Soldnerova je správná a to asi bylo hlavním důvodem, proč Lenard Soldnerovu práci otiskl. Ale při zatmění 21. září 1922 byl definitivně potvrzen vzorec Einsteinův a proto H. hledá útočiště v předpokladu, že síla, kterou je energie světelná (elektromagnetická) přitahována ke slunci, je sice dána tak jako síla, kterou je přitahována obyčejná hmota, gravitačním zákonem Newtonovým, jen že hodnotu gravitační konstanty nutno v něm zdvojnásobiti. Totéž ostatně navrhuje i Gehrcke. Je ovšem na pováženou hodnotu tak fundamentální konstanty jako je konstanta gravitační najednou měniti jen proto, aby se efekt Einsteinem předpověděný dal vyložiti jinak než jej vykládá Einstein sám, a o vědecké ceně tohoto výkladu nebude, myslím, sporu. Je také v nesouhlasu se všemi dnešními představami o podstatě hmoty, podle nichž hmota není vlastně nic jiného než energie původu převážně elektromagnetického. H. soudí, že by se spor obou teorií, Einsteinovy a Soldnerovy, dal rozřešiti tehdy, kdyby se rozhodlo, je-li rychlost světla blízko slunce větší nebo menší než v prostorech interstelárních; první má nastati podle Soldnera, ke druhému vede teorie Einsteinova. Počet ovšem ukazuje, že se v ne příznivějším případě, když se totiž částice světelná dostane až na samý kraj slunce, rychlost její zvýší o 4 milioniny té hodnoty, kterou má v prostorech interstelárních, zmenšení rychlosti světelné, jež má nastati podle Einsteina, je téhož řádu; myslím, že je velmi málo naděje, že se touto cestou podaří něco rozhodnouti. Ostatně je velmi těžko říci, jak by se ty změny měly měřiti, i kdyby byly několikráte větší; H. sám žádné metody neuvádí.

V dalším transformuje H. Lagrange-ovy rovnice na systém souřadný, který se otáčí vůči systému inerciálnímu stálou rychlostí kolem osy Oz, o tom byla již řeč, není v tom nic nového. Pak formuluje týž problém, jak praví, podle Einsteina; užívá ovšem při transformaci vzorců klasické mechaniky; to je v teorii Einsteinově možno jen pro velmi malé rychlosti a jen pro tyto platí jeho úvahy. Že pak rovnice Einsteinovy souhlasí s rovnicemi Lagrange-ovými, nikterak nepřekvapuje, vždyť je známo, že pro malé rychlosti přechází mechanika principu relativnosti v mechaniku klasickou. Spíše by překvapovalo, kdyby tomu tak nebylo.

A tak přicházíme ke konci kritiky H-ého. Že je jeho konečný soud o Einsteinově teorii odmítavý, nepřekvapuje; že nemá k takovému soudu práva, je, doufám, z předešlého jasné. Praví-li H., že Einstein chce odstraniti rozdíl mezi silami skutečnými a zdánlivými úvahami o tensorech, invariantech, oprávněných systémech souřadnic, světových čarách ve čtyřrozměrném časoprostoru atd., přehlíží princip ekvivalence a připisuje Einsteinovi názory tak naivní, že ne ní třeba je vyvraceti. Podle H-ého není nic jednoduššího než se přesvědčiti o objektivním rozdílu mezi silami skutečnými a zdánlivými; přiznávám se, že o onom *objektivním* rozdílu nic nevím. Že užívání polárních souřadnic — lépe řečeno t. zv. polárních souřadnic — v teorii pohybu Merkurova perihelu není ve sporu s tvrzením o neplatnosti Euklidovy geometrie v okolí slunce, jak H. prohlašuje — to je jeho druhý důkaz matematické nepřesnosti Einsteinovy teorie — je vyloženo v každé větší učebnici teorie relativnosti;*) není ostatně třeba znáti mnoho z Einsteinovy teorie, aby člověk na to přišel sám. Praví-li H., že dosud nikdo neukázal, jak vypadají relativistické pohybové rovnice pro nejjednodušší mechanickou úlohu o dvou nebo více stupních volnosti, je to pravda; také to asi nikdo neukáže, neboť relativistická mechanika nezná tuhých těles a tedy ani tuhých vazeb, jimiž v klasické mechanice jsou stupně volnosti definovány.

H. praví o Einsteinovi, že má příliš velké sebevědomí. Není mým úkolem Einsteina hájiti osobně, ale snad mi bude dovoleno říci toto: Při oceňování teorie Einsteinovy přesířelovalo se na obou stranách, jak u těch, kteří ji chválili, tak u těch, kteří ji odsuzovali; příliš veliké sebevědomí však jsem nalezl jen u těch, kteří teorii Einsteinovu zamítali, nedavše si ani tolik práce, aby porozuměli aspoň jejím základům. *Záviška.*

K. Petr: **Počet differenciální.** (Část analytická.) Sborník Jednoty čs. matematiků a fysiků č. 16.

Jednota čs. matematiků a fysiků vydala před 8 lety »Počet integrální« od prof. Petra jakožto pokračování »Differenciálního počtu« od Ed. Weyra. Když pak kniha Weyrova byla rozebrána, usnesl se výbor Jednoty, aby bylo vydáno nové vydání spisu Weyrova nebo vůbec nový p. d. (počet differenciální) a vyzval prof. Petra, aby se v jeden z těchto úkolů uvázal. Prof. Petr vyhověl tomuto vyzvání a rozhodl se napsati knihu novou s podmínkou, že aplikace geometrické napíše prof. Sobotka. Tak vyjde p. d. ve dvou svazcích. P. d. prof. Petra je první částí, analytickou.

*) Viz na př. citovanou knihu Laue-ovu, str. 209.

Za úkol svého p. d. (a stejně i počtu integrálního) pokládá prof. Petr podati úvod do analyse matematické, a to hlavně se zřetelem na studující matematiky na universitě. Ježto k přesné definici základních pojmů p. d. je třeba předpokládati pojem čísla reálného a pojem limity a ježto není knihy české o těchto pojmech pojednávající, bylo nutno o pojmech těchto pojednati, jak ostatně je zvykem ve většině knih podobného obsahu.

Část prvá zabývá se těmito pojmy. Při tom též podány základní pojmy z teorie množství. Část tato obsahuje též teorii nekonečných řad, kde obzvláště krásně vyloženy metody pro výpočet součtu numerických řad (Eulerova transformace, Kummerova metoda), teorie nekonečných součinů, dále zde podána teorie funkcí jedné proměnné, zvláště funkcí spojitých, a přehled o elementárních funkcích. Tyto definovány pokud možno pomocí funkčních rovnic.

Část druhá pojednává o počtu differenciálním pro funkce o jedné proměnné. Nejprve pojednáno o prvé derivaci, uvedena pravidla pro počítání prvé derivace a vlastnosti její. Zde uvedena v odst. 114. př. 3. (str. 163.) jako příklad funkce spojité v intervallu nemající derivaci v žádném bodě tohoto intervallu funkce, pocházející v podstatě od Bolzana. Dále následují různé příklady pro užití věty o střední hodnotě a konečně pojednáno o nekonečných řadách, jichž členové jsou funkce proměnné veličiny. Zde uvažována konvergence nekonečných řad v proměnné x a stejnoměrná a polostejnoměrná (v bodě x_0) a různé použití těchto pojmů. Nyní následuje definice derivací vyšších řádů a výklad o označení differenciálním, formule a řada Taylorova (Maclaurinova) s použitím této řady na numerický výpočet funkcí elementárních. Poté následuje obšírné pojednání o základních větách teorie řad potenčních. Zdůvodnění, proč tato teorie pojata do počtu differenciálního, jest na str. 214. Podána zde též věta Abelova a věty o Cesarových středech aritmetických, definována řada majorantní a uvedena různá její užití. Dále uvedeny některé příklady k užití obecných vět o řadách numerických. Zde pojednáno o číslech Bernoulliských a Eulerových, uvedena řada Lagrangeova s upotřebením na explicitní výpočet součinitelů pro inversi potenční řady. Toho užito pak na numerické řešení algebraických rovnic (zpřesnění metody Newtonovy). Dále pojednáno o pravých hodnotách výrazů neurčitých a konečně o maximech a minimech funkcí jedné proměnné.

Část třetí obsahuje počet differenciální pro funkce o několika proměnných. Nejprve vyloženy základní pojmy, které souvisí s funkcemi, speciálně pak s funkcemi spojitými dvou i více proměnných. Pak následuje výklad o parciálních derivacích a totálních differenciálech. Při tom užito Stolzovy definice totálního differenciálu, která poskytuje celou řadu výhod (Pozn. str. 318). Řada Taylorova pro funkce o n proměnných tvoří přechod k teorii řad mocninných o n proměnných. Zde zabývá se p. autor podobnými úkoly jako při potenčních řadách jedné proměnné. Nyní následuje pojednání o funkcích implicitních, výpočet jich derivací a differenciálů, o funkčním determinantu, o závislosti funkcí. Další oddíl zabývá se záměnou proměnných. Jako příklad uveden důkaz fundamentální věty algebry. Poslední oddíl obsahuje užití řad potenčních k vyšetřování funkcí implicitních. Jest zde věta Lagrangeova pro několik proměnných, věta Weierstrassova, Newtonův polygon, při čemž přihlíženo k případu reálných funkcí, a konečně užití této teorie na vyšetření případu semidefinitního při vyšetřování extrémů u funkcí dvou proměnných. Tento oddíl patří k nejoriginálněji zpracovaným z celého spisu.

Výklad je doplněn celou řadou krásných příkladů, které mají za úkol jednak zaváděné pojmy objasniti, jednak seznámiti čtenáře s větami z jiných oborů matematiky. Namátkou uvádím: O konstantě Eulerově pojednáno na str. 47, 175, 176; o větě Hadamardově z teorie determinantů pojednáno na str. 420; v oddíle X., XI. a XII. uvedena řada vět z teorie forem kvadratických. (Při tom ovšem čtenář dosti postrádá abecedního indexu.)

V odst. 94. str. 130 (funkce cyklometrické) trochu překvapuje, že p. autor vůbec z úvahy vyloučil funkce mnohoznačné; uvažuje pak u funkcí cyklometrických pouze jejich hlavní hodnoty.

V názvosloví bych s některými názvy nemohl souhlasiti. Tak třeba, že p. autor jedním a týmž názvem označuje i $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ (řada) i $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n +$ (řada, řada nekonečná). Tu by snad bylo přece jenom lépe ponechati pro první pojem $u_1, u_2, \ldots$ název ostatně již zavedený: posloupnost.

Stejně snad by bylo lépe říkati obor ohraničený, funkce ohraničená v intervalu (a, b) neb v oboru Ω (str. 97, 286, 289), místo obor, funkce konečná, když již se užívá názvu množství ohraničené (str. 20, 299); tím by se také docílilo shody s většinou učebnic cizojazyčných.

Ve všech uvedených případech jedná se ovšem pouze o různost mínční.

Proti učebnici Studničkově a konečně i Weyrově značí p. d. p. prof. Petra skutečný pokrok. Všem, kdož chtějí do základů vyšší analyse hlouběji proniknouti, možno ji co nejvřeleji odporučiti. *Rychlík.*

*

Ph. Dr. V. Láska a Dr. V. Hruška: **Počet grafický a graficko-mechanický.** Praha 1923. Nákladem Jednoty čs. matematiků a fysiků v Praze. X + 188 stran, 124 obrázky v textu a 3 tabulky. Cena v plátně váz. 34 Kč.

Dílo, jež vyšlo jakožto 9. svazek »Knihovny spisů matematických a fysikálních«, je první z učebnic praktického počtu, jejž hodlají autoři postupně doplniti ještě učebnicí numerického a mechanického počtu, jakož i knihou, zabývající se hledáním empirických formulí. Autoři vydáním této knihy sledují účel, učiniti metody grafického počítání pokud možno známými širokému kruhu interesované veřejnosti, která při svém zaměstnání je nucena zabývati se řešením číselných výpočtů a zvláště výpočtů jedné formy stále se opakujících, neboť způsob grafický má nesporné výhody všude tam, kde můžeme se spokojiti čtyřmi, případně třemi číslicemi výsledku. A málo je oborů užité matematiky, kde by tato přesnost nevystačovala ve veliké části případů, nebo kde by aspoň grafická metoda nevedla k rychlé orientaci, případně kontrole přesných výsledků. Vhodné grafické metody uspoří mnoho času počtáři a podají zhusta úplně dostačující výsledky a jsou pomíjeny doposud těmi, kteří neměli příležitosti se o jejich ekonomičnosti přesvědčiti. Lze proto jenom s povděkem vítati, že Jednota čs. matematiků a fysiků se odhodlala vynaložiti náklad na vydání tohoto prvního českého většího díla, pojednávajícího souborně o většině otázek metod grafických.

Autoři rozdělili svůj spis ve čtyři kapitolky, z nichž třetí, zabírající půl knihy, obírá se specielně nomografií, naukou to o sestrojování a užívání grafických tabulek, zvaných nomogramy, pro různé funkcionální závislosti, kdežto kapitola druhá a čtvrtá jsou věnovány grafickému počtu v užším slova smyslu. Podkladem grafického počtu jsou obyčejně dva specielní druhy souřadnic, a to známé Cartesiovy a pak nomografické, jejichž osy jsou mezi sebou rovnoběžné, a jest jim věnována část úvodu knihy, kdež proměnnými a vyjádřen vztah mezi systémem Cartesiovým a nomografickým. Při tom je zajímavo, že užíváno všude důsledně kosoúhlé soustavy souřadnicové, čímž řešené problémy získávají na obecnosti a pak, že veliká část látky je projednávána v souřadnicích nomografických, poskytujících namnoze elegantní formy řešení a zjednodušení konstruktivní. Sestrojování mnohých složitých stupnic se dá snadno provésti z docela jednoduchých stupnic vztahem projektivním a mnohé konstrukce, zvláště nomografické, při volbě vhodné transformace přemění se výhodně v jiné jednodušší a tudíž prakticky lépe upotřebitelné. Je proto o projektivitě řad bodových a transformacích dvou polí rovinných v úvodě pojednáno jakožto o věcech základních.

Druhá kapitola knihy týká se grafické aritmetiky a algebry a podávají se zde grafické metody čtyř základních operací početních, lineární celistvé funkce, jakož i řešení systému rovnic lineárních a algebraických rovnic vůbec. Jakožto příprava pro metody nomografické a další látku znázorněna funkce $y = f(x)$ křivkou, již autoři nazývají pro daný obor proměné x grafem. Sestrojeny grafy některých důležitých prakticky přicházejících funkcí.

Jestliže grafická aritmetika učí každou závislost znázorniti určitou konstrukcí, podává nomografie návod, jak pro libovolné funkcionální vztahy jedné formy lze sestrojiti jednou pro vždy grafickou tabulku, která pro všechny specielní případy uvažovanébo vztahu podává ihned řešení. A tím právě nomografie se stanoviska ekonomie času, jakož i nejmenší duševní únavy poskytuje značné výhody před jinými metodami grafickými a z tohoto hlediska docela správně věnuje vydaný spis právě této partii nejvíce místa.

Závislost mezi dvěma proměnnými se dá znázorniti nejen grafem, ale též stupnicí. Stupnice některých funkcí se vyskytují velice často, jsou základem většiny nomogramů prakticky použitelných a mají tudíž v nomografii zásadní důležitost. Z té příčiny čtenář se seznamuje zvláště se stupnicí projektivní a logaritmickou, pomocí nichž se dá sestrojiti veliká část stupnic funkcí složitějších. Grafickým papírům, zvláště pak logaritmickým, založeným na stupnici logaritmické, jimiž řeší se veliká část problémů různých disciplin applikované matematiky tak elegantně a jednoduše, je věnována náležitá pozornost, což přispěje snad k většímu jejich rozšíření u nás.

Pak následují partie o nomogramech vlastních, kde autoři zabývají se hlavně jednoduchými formami nomogramů průsečíkových, poskytujících řešení průsečíkem kotovaných křivek a nomogramy spojnicovými, kdež podává řešení rovnice nomografická přímka. Zvláště zajímavé jsou stati o tom, jak se dá sestrojiti spojnicový nomogram použitím přímkových souřadnic v Cartesiově soustavě a jak lze jej kolineárně transformovati na výhodnější, jakož i úprava funkce v determinant, schopný snadného nomografického zobrazení. Autoři ukazují též zajímavě, jak $F(x, y, z) = |f_i g_i h_i| = 0\ (i = 1, 2, 3)$ jež dá se zobraziti průsečíkovým nomogramem o třech soustavách přímkových, lze podrobiti obecné korrelaci, čímž se obdrží nomogram spojnicový obecně o třech křivých stupnicích. Tak přecházejí ke kvadratické transformaci a inversi, dokládajíce příslušné teorie řadou vhodných příkladů. Tyto stati usnadní konstruktérovi vhodné uspořádání nomogramů. Rozmanitost uspořádání nomogramů spojnicových pro určitý vztah mezi třemi proměnnými je velice pěkně ilustrována v § 48, kde různou volbou stupnic tutéž rovnici lze zobraziti rozmanitým způsobem. Všechny tyto úvahy jsou prováděny pro vztahy o třech proměnných.

Poslední část nomografie řeší vztahy o čtyřech a více proměnných. Vysvětluje se pojem binární stupnice a autoři přidržují se toliko jednodušších vztahů funkcionálních, které se dají zobraziti přidružením dvou nebo více jednoduchých spojnicových nomogramů pro tři proměnné. Jiné způsoby řešení poskytují kombinace hexagonálních nomogramů a nomogramy řešitelné dvěma indexy o stálém úhlu. Kapitola o nomografii je zakončena zajímavým námětem, jak by se dalo použíti metod deskriptivní geometrie, hlavně promítání kotovaného, k nomografickým metodám.

Poslední kapitola, nadepsaná grafická analysis, zabývá se grafickým derivováním a integrováním funkce jedné neodvisle proměnné a poukazuje na mechanické pomůcky, které zjednodušují práci. Popsán je integraf Abdank-Abakanowiczův. Dalším obsahem je grafické řešení dvojného integrálu, teorie a upotřebení planimetrů, grafické i mechanické stanovení koeficientů Fourierovy řady a v posledním oddíle knihy jsou probírány různé metody, jimiž se graficky řeší diferenciální rovnice.

Všechny úvahy vyznamenávají se přesností a doplněny jsou většinou názornými obrazy i po stránce reprodukční pěkně provedenými. Čtenáři, nezabývajícímu se specielně matematikou, oživuje se teoretická látka bohatou snůškou vhodných příkladů z různých oborů praxe a poskytuje se možnost na připojených úlohách ve cvičeních nabýti jisté schopnosti konstruktivní. Kniha obsahuje pro sestrojování konstrukcí množství praktických rad, čerpaných z bohaté zkušenosti. Autoři snažili se zavésti vhodnou terminologii českou, která byla do poslední doby nejednotná, jak ostatně i v cizích literaturách se vyskytuje, a můžeme říci, že po většině se jim to šťastně podařilo. Spis neobsahuje kromě několika malých nedopatření věcných chyb. Některé partie, zvláště nomografie a pak poslední kapitola, by měly býti náležitě prohloubeny, ale uvážíme-li jednak veliký náklad na knihu a pak snahu autorů, aby grafické metody pronikly co nejdále, je správné, že předkládá se veřejnosti ze začátku dílo, podávající základy a teprve, až znalost grafických metod se rozšíří, prohlubovati obsah jejich.

Povaha látky probírané v knize, jakož i vědecký způsob zpracování jejího, doporoučí knihu nejen těm, jimž mohou grafické metody zjednodušiti jejich únavnou práci počtářskou v povolání, nýbrž i matematikům pedagogům, kteří po přečtení spisu poznají veliké výhody grafického počtu a již na škole střední budou jej v mezích osnovy učebné propagovati.

* *Fr. Fiala.*

P. B o u t r o u x: **L'Idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes.** Paříž, Alcan, 1920, 274 str. cena 8 fr.

Jak rodí se vědecká myšlenka? To jest otázka, která se opět a opět naskytá modernímu historiku věd, na niž tak často narážíme v dnešní matematicko-historické literatuře a jejíž velký otazník na nás hledí i z řádek knihy loni zemřelého francouzského autora. Ve své předmluvě »Dějiny věd a velké proudy matematické myšlenky« praví Boutroux, že exaktní vědec, byť se i vyhýbal onomu »neklidu, který pěstujeme pod jménem filosofie«, musí míti své určité »vědecké c r e d o«, které mu jest podporou a pohnutkou. A v této předmluvě také Boutroux vyslovuje své matematicko-historické »credo«, jímž zaujímá určité, pevné a vyhraněné stanovisko ve stupnici matematických historiků, jejichž typy jsem svého času vylíčil. *) Sbírání a vydání historického materiálu jest mu předpokladem pro rekonstrukci fysiognomie vědy v minulosti a filiace ideí, výklad a objasnění starých doktrin a hypothés většinou dějinami lidských omylů, vyhledávání autorů vědeckých objevů oprávněným aktem vděčnosti ke starým badatelům a nutnou často obranou národa jednoho proti neoprávněným nárokům národa druhého. Našeho autora zajímá na prvém místě, jak určitý vědecký fakt vnikl do daného systému, který proud badání dovedl vědu k tomu, aby fakt ten byl považován za důležitý, kterému myšlenkovému hnutí sloužil za východisko, krátce vývoj vědeckých koncepcí. Od dějin vědy určitého národa žádá, neběží-li o výše uvedenou obranu, aby vylíčily vědeckou individualitu tohoto národa, metody práce u něj obvyklé, zvyky a tendence jeho inteligence, více či méně vyvinutou jeho schopnost vědecké divinace a její směr, konečně ideál, k němuž jeho badatelé spějí. Slova tato charakterisují také ráz Boutrouxovy knihy. Lze ji v určitém smyslu srovnati se známým spisem L. Brunschviega »Les étapes de la philosophie mathématique«, kterou Boutroux s uznáním cituje, a Spenglerovým »Untergang des Abendlandes«. Kdežto německý autor se ztrácí ve velmi hypothetických, nedostatečně doložených a i historicky nesprávných paralelách mezi dějinným vývojem matematiky a ostatní kultury lidstva, zabývají se autoři francouzští přesně doloženým vývojem matematických

*) Věst. »Král. Spol. nauk«, 1918.

myšlének. Linie matematické filosofie vylíčená Brunschviegem vine se četnými oklikami, ba vykazuje i ostré přelomy. Boutroux staví se naproti tomu na stanovisko muže čisté vědy a uvažuje vývojovou linii matematické myšlénky zbavené jakéhokoli filosofického zabarvení. Z tohoto hlediska jeví se tato linie velmi jednoduchá, se třemi velkými vlnami ve třech nejvýznačnějších obdobích dějin matematických věd, v období vědy hellénské, na konci XVII. století a v době současné. Svůj úkol si autor rozdělil do pěti kapitol. V »hellénské koncepci matematiky« vidí snahu po jednoduchém, krásném a harmonickém, odtud vztahy mezi matematikou a logikou, odtud ono oddělení abstraktní matematiky od praktické logistiky a geodésie. Kapitola druhá jest věnována »synthetické koncepci mathematických věd«, kdy řecké metody, vydavše své nejkrasší plody, staly se hlavně jen učebnou látkou a pohyb originelní myšlénky mohl býti podnícen jen novým faktem, totiž stvořením moderní algebry. Boutroux sleduje vývoj její od Mohameda Ben Musa-Al-Chovarismiho až po objev infinitesimálního počtu, v němž na rozdíl od obvyklých názorů nevidí revoluci v matematickém vývoji, nýbrž vyvrcholení uvedeného období. »Rozkvět a úpadek synthetické koncepce« shrnuje pod pojem algebraicko-logické synthesy ono bohatství idejí a směrů, vyrostších z velkých objevů XVII. stol. ve století následujícím, geometrii deskriptivní i synthetickou, jakož i omezení, jež matematické myšlénce kladou hranice logiky a hranice algebry, stanovené ve století XIX. Kapitola předposlední věnována »hledisku moderní analysy«, t. j. jejímu vývoji v XIX. stol., objektivitě matematických fakt a nauce intuicionistické. »Dnešním posláním matematikovým«, totiž poměrem mezi matematikou a fysikou, směrem matematického badání, a rázem matematického vyučování, končí zajímavá kniha Boutrouxova.

Q. Vetter.

*

Edouard Goursat: **Leçons sur le problème de Pfaff.** Paříž, J. Herrmann, 1922. Str. 386.

Vlastnímu problému Pfaffovu věnovány jsou právě dvě kapitoly. Četné starší metody, jimž ve starších knihách (Webrově a Forsythově) je věnováno mnoho místa, byly úplně vypuštěny. Za to důkladně vyložena velmi důležitá a elegantní metoda, užívající bilineárního kovariantu (Frobenius, Darboux). V další kapitole je podána Cartanova teorie symbolických diferenciálních forem,*) jež dává ve čtvrté kapitole nové řešení problému Pfaffova; jako druhá aplikace je v kapitole páté vyložena Poincaréova teorie integrálních invariantů diferenciálních rovnic. Poslední tři kapitoly (6.—8.) obírají se systémem Pfaffových rovnic. V nich je jádro knihy. Teorie zde vykládané nejsou nové: nejdůležitější výsledky uveřejnil Cartan již roku 1901 (Ann. Ec. Norm. (3) 18, p. 241—311) a v četných pozdějších článcích podal mnohé zajímavé a důležité aplikace. Přes to tato vyšetřování dosud byla přes svůj veliký význam jen málo známa a Goursat vyplnil svou knihou již velmi citelnou mezeru v matematické literatuře. Z tohoto důvodu, a také proto, že přes dosti značné obtíže látky je kniha psána velmi krásně, zajímavě a srozumitelně, doporučuji ji českým čtenářům co nejvřeleji.

Čech.

*

E. Cartan: **Leçons sur les invariants intégraux.** Paříž, J. Herrmann, 1922. Str. 210.

Doporučuji tuto knížku zejména také jako úvod k obtížnější knize Goursatově, o níž právě jsem referoval. Předmětem jsou symbolické diferenciální formy a jejich aplikace na integraci diferenciálních rovnic. Tato

*) t. j. diferenciální formy, vyskytující se za integračním znamením n násobných integrálů, leží-li integrační obor v m rozměrném prostoru ($m \geq n$).

teorie je ovšem v nejužší souvislosti se známou teorií Lieovou. Mám dojem, že stanovisko Cartanovo má některé formální výhody proti stanovisku Lieovu. Ostatně v knížce, o níž referuji, běží více o orientující výklady než o soustavnou teorii (vznikla z universitní přednášky). Mnoho stran věnováno je diferenciálním rovnicím matematické fysiky: Hamiltonův princip nejmenší akce, teorie vírů, problém tří těles, šíření světla. *Čech.*

*

L u d w i g B i e b e r b a c h: **Theorie der Differentialgleichungen.** Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen. Die Grundlehren der math. Wiss., Bd. 6. 1923. Stran 317.

Překvapuje, co látky podařilo se autorovi umístiti na poměrně nepatrném počtu stran: elementární metody, přibližná numerická řešení, tvar reálních integrálních křivek rovnice prvého řádu i stupně, aplikace variačního počtu na uzavřená řešení rovnic druhého řádu, Sturmovy teorémy o lin. rovnicích druhého řádu i s aplikací na rozvoje libovolných funkcí, singularity řešení rovnic prvého řádu a lineárních rovnic druhého řádu, parciální rovnice prvého řádu, charakteristiky parciální rovnice druhého řádu v komplexním oboru, lineární parciální rovnice druhého řádu v reálním oboru. Je zřejmé z tohoto výčtu obsahu a počtu stran knížky, že autor byl nucen mnoho uváděti bez důkazu. Ale právě ty stránky, jež podávají pouze prvou informaci, jsou psány tak svěže, že čtenář neodolá hledati bližšího poučení v pramenech autorem udaných. Knížku, psanou pro začátečníky v tomto oboru, lze vřele doporučiti. *Čech.*

*

P. L é v y: **Leçons d' analyse fonctionnelle. Avec une préface de M. J. Hadamard.** VI + 442 p. Paris, Gauthier-Villars, 1922. (Collection de monographies sur la Théorie des fonctions publiée sous la direction de M. E. Borel.)

Tato kniha může býti považována za pokračování spisů Volterrových, které před léty vyšly v Borelově kollekci monografií o theorii funkcí.*)

Základním pojmem je zde funkcionál (fonctionnelle dle Lévyho, fonction de ligne dle Volterry). Slovem tím označujeme veličinu, jejíž hodnota závisí na celém průběhu nějaké funkce v daném intervalu. Úlohou funkcionálního počtu je odvoditi z vět obyčejné analyse, jež se vztahují k proměnným veličinám a jich funkcím, věty o funkcích a funkcionálech. Pojem funkce má ve funkcionálním počtu obdobnou úlohu jako pojem čísla v obyčejné analysi. Lévy rozeznává důsledně funkcionální algebru (algèbre fonctionnelle) od funkcionální analyse (analyse f.); funkcionální algebra obsahuje úlohy, ve kterých neznámými jsou obyčejné funkce, kdežto funkcionální analyse obsahuje úlohy, kde jsou neznámými funkcionály.

Celý spis je rozdělen ve tři části: první jedná o základech funkcionálního počtu, druhá o rovnicích, jež obsahují funkcionální derivace prvního řádu a třetí o pojmu střední hodnoty v oboru funkcionálů a o zobecněné rovnici Laplaceově. Autor probírá veliké množství rozmanitých problémů, některé obšírně, jiné zcela stručně; zmíním se toliko o některých zvláště důležitých výsledcích, které pocházejí hlavně od francouzských matematiků (Hadamard, P. Lévy, Gateaux).

Úkol funkcionálního počtu: odvoditi z vět obyčejné analyse věty o funkcionálech řeší se zpravidla přechodem od případu, kdy je dán konečný počet proměnných veličin k případu, kdy je jich nekonečně mnoho. Funkce $x(t)$ proměnné t budiž definována v intervalu $(o, 1)$. Rozdělme tento interval dělícími body na n stejných dílů. Funkce $x(t)$ bude známa přibližně, známe-li její střední hodnotu v každém dílčím intervalu. Označme

*) Viz referáty v tomto »Časopise«, ročník XLIII., str. 73. a 428.

písmenem x_k střední hodnotu funkce $x(t)$ v $k$tém dílčím intervalu. Funkcionál, jenž závisí na $x(t)$, bude přibližně vyjádřen obyčejnou funkcí oněch středních hodnot: $f(x_1, x_2, \ldots x_k)$. Studium funkcionálů převádí se tak, ovšem jen aproximativně, na studiům obyčejných funkcí. Roste-li n do nekonečna, přechází problém obyčejné analyse v problém počtu funkcionálního. Arithmetický střed veličin $x_1, x_2, \ldots x_n$ shora uvažovaných přechází tak v integrál funkce $x(t)$ vzatý v mezích $(o, 1)$. Přírůstek funkce f, který, nehledíme-li k veličinám vyššího stupně v differenciálech dx_k, rovná se jejímu totálnímu differenciálu, přechází v limitě ve výraz

$$\delta U = \int_0^1 \varphi(t) \, . \, \delta x(t) \, . \, dt. \tag{1}$$

$\delta\, x(t)$ značí variaci funkce $x(t)$; proměnná t nastupuje na místo indexu k, jenž se vyskytuje v předešlém řádku.

Budiž U funkcionál, jenž závisí na funkci $x(t)$; změní-li se x o δx, změní se U o δU. Pro rozsáhlou třídu funkcionálů je variace δU dána právě hořejším výrazem, kde φ značí danou funkci. Obecnější tvar variace jest

$$\delta U = A_0 \delta x + A_1 \delta x' + \ldots + A_p \delta x^{(p)} + \int_0^1 \varphi(t, t_1) \, \delta x(t_1) \, dt_1 \tag{2}$$

Zde jsou $A_0, \ldots A_p$ funkcemi proměnné t, $x^{(k)}$ značí k-tou derivaci funkce $x(t)$. Napsaný tvar (2) variace nezávisí toliko na celém průběhu funkce $x(t)$ v intervalu $(o, 1)$, nýbrž také na zvláštní hodnotě t proměnné.

Funkce $\varphi(t)$ ve formuli (1) závisí obecně netoliko na t, nýbrž i na celém průběhu funkce $x(t)$ v intervalu $(o, 1)$. Nazýváme ji funkcionální derivací funkcionálu U; variace tohoto funkcionálu je právě dána vzorcem (1). Píšeme pak

$$\varphi(t) = U'_{x(t)}$$

Právě proto, že funkcionální derivace závisí na t i na průběhu funkce $x(t)$, očekáváme, že bude vyjádřena formulí tvaru (2), kde je ovšem psáti U'_x na místo U.

Výraz $\delta^2 U = \int_0^1 f(t) (\delta x)^2 \, dt + \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t, t_1) \, \delta x(t) \, . \, \delta x(t_1) \, . \, dt \, dt_1$

jest druhá variace funkcionálu určitého U; tato formule plyne zvláštním limitním přechodem ($\lim . \, n = \infty$) z výrazu pro druhý diferenciál.

Veličiny

$$U''_{x^2} = f(t), \quad U''_{xx_1} = \varphi(t, t_1)$$

nazývají se druhými funkcionálními derivacemi funkcionálu U. Laplaceova rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 .$$

přechází pro $\lim . \, n = \infty$ v

$$\int_0^1 f(t) \, dt = 0.$$

Zvláště zajímavého výsledku došel P. Lévy tím, že zobecnil pojem úplného differenciálu, jehož integrál vzatý podél libovolné čáry spojující dva pevné body nezávisí na tvaru čáry. Nechť funkce $x(t)$, která se vyskytuje ve formuli (1), závisí na parametru λ. Funkce φ pak závisí též na λ a (1) přechází v differenciální rovnici, ze které lze určiti U, známe-li hodnotu U pro $\lambda = o$. Jsou-li dány dvě funkce: $x_0(t)$ a $x_1(t)$, jež odpovídají hodnotám $\lambda = 0$ a $\lambda = 1$ parametru λ, můžeme přejíti od prvé ke druhé různými spojitými způsoby a jest otázka, vedou-li příslušné integrace vždy k téže hodnotě funkcionálu U. V případě, že tomu tak jest, pravíme, že podmínky integrability pro rovnici (1) jsou splněny. Budiž $E(x)$ výraz

$$E(x) = Ax + A_1 x' + \ldots + A_p x^{(p)} + \int_0^1 \varphi(t, t_1)\, x(t_1)\, dt_1,$$

lineární v x a jeho derivacích, $F(y)$ pak podobný výraz adjungovaný k $E(x)$, t. j. vyhovující podmínce

$$\int_0^1 y(t)\, E(x)\, dt = \int_0^1 x(t)\, F(y)\, dt$$

a $U'x = \varphi$ první funkcionální derivace daného funkcionálu U, definovaná rovnicí (1); má-li její variace $\delta U'x$ tvar (2), znějí podmínky integrability pro rovnici (1) takto: $\varphi(t, t_1)$ musí býti symetrickou funkcí proměnných t a t_1, a výraz, stojící před integrálem na pravé straně formule (2) musí býti identický s výrazem adjungovaným.

Budiž $g(A, B)$ obyčejná Greenova funkce Dirichletova problému pro uzavřenou rovinnou křivku C. Označme písmenem M bod na C, ds element oblouku na C v bodě M, a δn nekonečně malou délku; nanesenou na normálu v bodě M. Koncové body těchto malých délek vytvoří variovanou křivku; jsou-li pak body A a B uvnitř C, a je-li $\delta g(A, B)$ variace Greenovy funkce, odpovídající řečené změně křivky C, platí Hadamardova rovnice

$$\delta g(A, B) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dg(M, A)}{dn} \frac{dg(B, M)}{dn}\, \delta n\, ds.$$

Lévy, užívaje pojmu integrability, vyšetřuje funkce g, které vyhovují této rovnici; příslušné odstavce obsahují pozoruhodné příspěvky k teorii Greenovy funkce.

Budiž nějaká funkce $x(t)$ přibližně určena hodnotami $x_1, x_2, \ldots x_n$, kterých nabývá v n dělících bodech intervalu $(o, 1)$. Různé funkce takto určené odpovídají bodům v n-rozměrném prostoru. Roste-li počet n rozměrů do nekonečna, můžeme říci, že obdržíme v limitě prostor »funkcionální«, jehož každý bod zobrazuje určitou funkci. Pojem vzdálenosti dvou bodů, jakož i jiné pojmy geometrické dají se přenésti i do tohoto prostoru a mají svůj význam ve funkcionálním počtu. Zvláštní okolnost naskytuje se při výpočtu objemu. Srovnáváme-li totiž na př. objem koule o poloměru R v prostoru o n rozměrech s objemem koule o poloměru $R(1-\alpha)$, kde α je číslo mezi 0 a 1, shledáváme, že poměr obou objemů je : $(1-\alpha)^n$. Nechť je tedy číslo α sebe menší, má první koule pro nekonečně veliké n nekonečněkráte větší objem než druhá. Můžeme říci, že objem koule je, pro n velmi veliké, soustředěn u jejího povrchu.*) Tato okolnost má význam při výpočtu středních hodnot funkcionálů. Teorie potenciálu dá se přenésti do funkcionálního prostoru; některé vlastnosti zobecněné Laplaceovy rovnice (3) jsou dokonce i jednodušší než obdobné vlastnosti obyčejné Laplaceovy rovnice o dvou nebo třech nezávisle proměnných.

Funkcionální počet je dosud v začátcích; rozsáhlé problémy, jež se v tomto novém oboru analyse vyskytují (zejména studium různých typů s funkcionálními derivacemi), vyžádají si ještě mnoho práce, má-li býti funkcionální počet vypracován tak jako obyčejná analyse. Zásluha autorova, jenž poutavým způsobem vyložil dosud dosažené výsledky, není malá, a myslím, že každý matematik, jenž sleduje pokroky nauky o funkcích, nalezne v jeho knize mnoho kapitol, které si přečte rád a se zájmem.

Bohuslav Hostinský.

*) Srov. též zajímavý spis E. Borel: Introduction géométrique à quelques théories physiques, Paris 1913.

Wilhelm Blaschke: **Vorlesungen über Differentialgeometrie.** II. 1923. Str. 259.

Současně s tímto druhým dílem vychází již druhé vydání prvního dílu, o němž jsem referoval v tomto Časopise roč. 52. str. 293.; důkaz, jak příznivě bylo toto dílko přijato v matematickém světě. Obsahem je diferenciální geometrie grupy unimodulárních afinit. Zajímavostí výkladu nestojí tento druhý díl za prvým; třeba zde, na rozdíl od prvého dílu, běží o věci po prvé knižně zpracované, nalézáme s potěšením touž svěžest mluvy a pestrost příkladů jako v díle prvém. Špatný dojem na čtenáře učiní nejvýš předmluva.*)

Čech.

*

Luigi Bianchi: **Lezioni di geometria differenziale,** třetí vydání, vol. 2, část I. N. Zanichelli, Bologna, 1923. Cena 35 lir. Str. 411.

O prvém svazku třetího vydání známé Bianchiovy knihy jsem referoval v tomto Časopise roč. 52., str. 291. Pro orientaci uvádím názvy kapitol nyní vyšlého svazku: 17. Infinitesimální deformace ploch. 18. Kongruence W. 19. Deformace kongruencí koulí a valení plochy po ploše s ní isometrické. 20. Guichardovy věty o deformaci rotačních kvadrik a Ribaucourovy transformace. 21. Systémy cyklické a Weingartenova nová metoda v problému deformace. 22. Transformace B_k kongruencemi W deformovaných ploch hyperbolického paraboloidu. 23. Transformace B_k deformovaných ploch zborceného hyperboloidu. 24. Transformace B_k ostatních kvadrik. Další (poslední) svazek bude obsahovati teorii obecných Riemannových prostorů.

Čech.

*

Osvald Veblen: **Analysis situs.** Vydala Amer. Math. Soc., 1922. The Cambridge Colloquium 1916, Part. II. Stran 150.

Aplikace analysy na geometrii jsou četné a známé; mnohem méně známé — a lze snad také říci méně oblíbené — jsou aplikace geometrie na analysu. Analysis situs je zajisté ta větev geometrie, jejíž význam pro analysu s pokrokem vědy stále poroste. Proto je vřele vítati knížku Veblenovu, jíž věru nelze vytýkati, že by stavěla do popředí tak zvaný názor, který u analytika je pouze pramenem pochybností. Knížka obírá se hlavně elementární částí předmětu, to jest těmi teorémy, jež mají podstatně kombinatorický ráz. Mnohem obtížnější teorémy, ve kterých vystupuje do popředí složitá kontinuitní struktura simplexu, byly v zásadě ponechány stranou (až na Alexandrův důkaz invariance, o němž dále) — tak o rozdělení roviny Jordanovou křivkou ve dvě části učiněna pouhá zmínka. Pouze závěrečná kapitola pátá věnována jest některým z těchto obtížných, a systematickému výkladu dosud málo přístupných otázek. V prvých čtyřech kapitolách studovány jsou po řadě útvary o jedné, dvou a n dimensích. Za definici n rozměrné plochy užito bylo jejího rozkladu v simplexy, jichž spojení charakterisováno je jistými maticemi čísel celých, zavedenými Poincarém, a to v případě, kdy přihlíží se k orientaci. Neorientované plochy byly charakterisovány týmiž maticemi redukovanými modulo 2 a zavedenými Veblenem. Studium těchto matic vede k jistým číslům (souvislostem a číslům Bettiovým), a běží o důkaz jejich invariance při homeomorfisonech, t. j. spojitých transformacích (1—1). Tento důkaz invariance podán dle Alexandra (Trans. Amer. Soc. 16, 1915); je zcela obecný a platí pro jakoukoli spojitou transformaci. Aplikace vůbec ponechány stranou, a

*) K této recensi poznamenává redakce, že v knize Blaschke-ově na několika místech jsou citovány výsledky prací prof. Čecha, tak zvláště na str. 174., kde je jednak uveden mezi těmi, kteří publikují o projektivní theorii ploch, jednak je věnován zvláštní odstavec jeho odvození základních rovnic afinní theorie ploch.

to činí knížku obtížnou; do aplikací řadí autor i uvažování ploch definovaných soustavou rovnic a nerovnin mezi souřadnicemi. Škoda je také, že v knížce nenalezly místa Riemannovy plochy. Elementární teorémy o pořádku a kontinuitě, bez nichž zejména zmíněný Alexandrův důkaz se neobejde, naleznou se v 19. kapitole druhého svazku Veblenovy Projective Geometry, kteroužto kapitolu lze jako dobrý úvod ke knížce, o níž referuji, doporučiti. Uvádím ještě názvy kapitol: 1. Linear graphs, 2. Two-dimensional complexes and manifolds, 3. Complexes and manifolds of N dimensions, 4. Orientable manifolds, 5. The fundamental group and certain unsolved problems. *E. Čech.*

*

G. Juvet: **Introduction au calcul tensoriel.** (Paris, Blanchard, 1922.)

Práce tato určena je pro úplné začátečníky a psána je formou snadno přístupnou. Aby mohla býti zvána učebnicí, bylo by nutno doplniti ji některými problemy v Ricciho počtu běžnými. Celkem obsahuje základy počtu tensorového, počínaje algebrou a konče Riemann-Christoffelovým affinorem. Není však psána ve smyslu »reine Infinitesimalgeometrie« Weylovy, ačkoliv má upraviti cestu k »Raum-Zeit-Materie«. Postrádám zde hlavně geometrický výklad jednoduchého zúžení (kontrakce, Verjüngung), dvojvektoru Wirtingerova (incidence!) poukazu na rozdíl geometrie Riemannovy a Weylovy a konečně poučku o geodetickém diferenciálu veličiny v geodeticky posunovatelném systému, jejíž znalost podmiňuje hlubší pochopení základů theorie relativity. Se stanoviska formálního je kniha poněkud neurovnaná, nikoliv však vinou autorovou, neboť v označování je posud velká libovůle. Tak kovariantní derivaci značí třemi způsoby: Ricciho, Hessenberga a Bacha. Způsob Ricciho svedl autora asi k poučce na str. 50, jež je geometricky nepřípustná, ačkoliv v tomto způsobu psaní formálně bezvadná. Celkem však jest to dosud nejlepší psaná kniha pro ty, kteří bez velikých znalostí předběžných chtěli by vniknouti do počtu Ricciho. *Hlavatý.*

*

D. J. Struik: **»Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung«.** (Springer, 1922.)

Geniální úprava prof. Schoutena Ricciho počtu na methodu direktní affinoranalyse nalézá zde plného ocenění. Kniha je specialisována pro geometrii Riemannovu (invariantní vůči jednoduché kontrakci a incidenci, kovariantně symmetrická a $\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\pi}} = 0$) V této specialisaci je však přísně obecná, což jí se stanoviska moderní vědecké kritiky dodává neobvyklé ceny. Vzhledem k důležitosti této knihy, která je prvým souborným dílem o stavu současné dif. geom. Riemannovy podám zde krátký přehled kapitol: Kapitola I. rozvíjí affinorovou algebru a zavádí rozklad affinorů v ideální vektory. Zvláštní odstavec věnován je významu fundamentálního tensoru. Kapitola II. stanoví základní pojmy affinoranalysy. Za nejdůležitější pokládám partii o (absolutním) Riemannově affinoru křivosti. Elegantním způsobem podány jsou zde čtyři známé jeho identity. Kapitola III. pojednává o vlastnostech neodvislých od affinoru Riemannova. Obsahuje Frenetovy formule pro V_1 v V_n, studuje vlastnosti V_1 v V_{n-1} v V_n zavádí pojem směrů hlavních křivostí a konjugovaných na V_m pojem vyšších čar assymptotických, studuje pomocí (relativního) affinoru křivosti vlastnosti V_m v V_n, i pro »m« a »n« jako čísla zvláštní. Kapitola IV. dokazuje zobecněnou větu Gaussovu pro V_m ve V_n a dochází k obecným rovnicím Codazziho, jež zde nalézají množství aplikací. Identita Bianchiho a rovnice Killingova dovolují elegantní řešení různých obecných problémů, jež nemožno z důvodů úspory místa vyjmenovati.

Kniha tato bude jistě úhelným kamenem každému geometru, jenž se chce vážně moderními problémy diferenciální geometrie zabývati. Způsobem svého podání vyvrací pak sama o sobě známou výtku »o orgiích formalismu« direktní affinoranalyse činěnou Weylem. Zvláště nutno ji doporučiti geometrům, kteří jsou zvyklí počítati přímo s veličinami, což počet neobyčejně usnadňuje.*) Předpokládá však znalost tensorového počtu.

Hlavatý.

*

Georges de Manteyer: **Les origines égyptienne et akkadienne de la numération indo-européenne** (2160—1680 av. J.-C.), Grenoble, 1922, 17 str.

Autor dokazuje filologicky hypothésu, že indoevropské číslovky 1, 2, 3, 4, 5 byly přeneseny za největšího egyptského rozkvětu pod XII. dynastií (2000—1788 př. Kr.) do Evropy. Tam prý vznikly číslovky od 1 do 5 ze jmén měst Nu-Amon (Théby), Tuan, krajiny To-Res, Pa-To-Ur a města Pa-Uat, ležících uprostřed, na východě, na jihu, na západě a na severu. Číslovky 6, 7, 10 a 100 jsou prý pak původu semitsko-akkadského. Prostředníky prý byli indoevropští Chetitové a foiničtí obchodníci. Je otázkou, mohou-li vývody Manteyerovy obstáti s hlediska filologického. Příčí se jim však i úvahy matematicko-historické. Již na prvním počátku egyptských dějin, dvě tisíciletí před přenesením střediska země do Théb, nalézáme v památkách provedenou vyvinutou dekadickou soustavu a není přirozeno, aby slova tak vžitá a stále ve všech vrstvách po několik tisíciletí užívaná byla najednou nahražena jinými. Autor sám nepřipouští možnost, že by národové indoevropští před převzetím oněch číslovek nedovedli ani na svých prstech do 5 počítati, a pomáhá si tvrzením, že své původní názvy zapomněli. Oč přirozenější jest výklad z příbuznosti číslovky 5 a pěsti nebo prstů, byť i rovněž nebyl filologicky zcela zaručen, o kterém se autor vůbec nezmiňuje. Také obsažného spisu Setheova »Von altägyptischen Zahlen und Zahlwörten« autor ve svých úvahách nedbal.

Q. Vetter.

*

W. Birkenmeier: **Über den Bildungswert der Mathematik**, XXV. sv. z »Wissenschaft und Hypothese«, IV., 191 str., Teubner, Lipsko, 1923.

Kniha vychází od názorů E. Sprangera, které tvoří filosofický podklad jejích vývodů. Tomuto filosofickému a psychologickému podkladu věnuje autor velmi mnoho místa, probíraje dosti podrobně pojmy vzdělání, jeho ceny a možnosti vzdělávání. Pojednav o podstatě matematického poznání a badání, jakož i o noetických základech jednotlivých odvětví naší vědy, přechází k ceně matematiky pro vzdělání, při čemž zdůrazňuje jak momenty vzdělání formálního, tak materiálního a technicko-ekonomického. Také etické a estetické stránky matematické výchovy nezůstávají nepovšimnuty. A poněvadž zdárný výsledek výchovného působení jest v neposlední řadě závislý na receptivní schopnosti žákově, věnována také kapitola matematickému nadání. Spisek Birkenmeierův se opírá o hojnou literaturu, dokládanou téměř v 500 poznámkách. Prolíná jej snaha po přesně logickém zdůvodnění, jdoucím až na poslední filosofické a noetické základy problému. Snaha ta asi zavinila, že spisek se někdy až příliš utápí v odborné nomenklatuře a v systemisování, u německé vědy tak oblíbené. Přes tyto nám nevalně sympatické vlastnosti nalezne v něm učitel matematiky hojně podnětů k přemýšlení o základních otázkách, podmiňujících zdárný výsledek jeho námahy.

Q. Vetter.

*

---

*) Klassický příklad toho je Schoutenův důkaz Bianchiho identity $\nabla^2 \neg \overset{4}{K} = 0$, direktní methodou, jenž svojí jednoduchostí daleko předčí důkazy počtu složkového.