Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Cornelius Plch

Společný spůsob dokazování různých pouček a vzorců. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 4, 201--207

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121629

Společný spůsob dokazování různých pouček a vzorců.

na základě

skracování stálých poměrů proměnnými veličinami.

Podává žákům středních škol

P. Cornelius Pich, T. J. v Bohusudově.

§. 1.

Schema společného spůsobu dokazování. *)

Podmínky.

1. Buďtež A, a, B, b *veličiny stálé*, x_1, y_1, *veličiny proměnné* a na čísle $n = 1, 2, 3, 4 \ldots.$ tak závislé, že hodnot x_1, y_1 při rostoucím n ustavičně přibývá neb ubývá.
2. Budiž c *společná* stálá *mezní hodnota*, k níž se proměnné veličiny x_1, y_1 *stejným spůsobem* přibližují, když při rostoucím n hodnot jejich přibývá neb ubývá, tak že jest vůbec buď $x_1 < c$, $y_1 < c$ aneb $x_1 > c$, $y_1 > c$.
3. Budiž buď srovnalost
$$\frac{A x_1}{a y_1} = \frac{B}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$
buď rovnice
$$\frac{A x_1}{a y_1} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$
pro každou hodnotu čísla n pravdiva.

Výrok. V případě (I) jest nezbytně $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$,

v případě (II) jest nezbytně $\frac{A}{a} = 1$, čili $A = a$.

Důkaz. Poněvadž *poměr* $\frac{A}{a}$ *je stálý* a poněvadž i *součin poměrů* $\frac{A}{a}$, $\frac{x_1}{y_1}$ při každé hodnotě čísla n *stálou má hodnotu* $\frac{B}{b}$

*) Poznámka. Tímto způsobem dokazování lze *přímo* a *přesně* dokázati všecky poučky a vzorce, které se posud na středních školách buď jenom *nepřímo*, buď *zakuklenou integrací* dokazovaly. Začátečníkům se radí, aby dříve četli §. 3. než §. 1.

neb 1, *nutno, by též poměr* $\frac{x_1}{y_1}$ při každé hodnotě čísla n *stálou měl hodnotu.* Značí-li m tuto stálou hodnotu, bude

$$\frac{x_1}{y_1} = m.$$

z čehož jde

$$x_1 = m y_1.$$

Přibližuje-li se při rostoucím n proměnná veličina y_1 ustavičně k stálé mezní hodnotě c, musí nezbytně $x_1 = my_1$ ustavičně k stálé mezní hodnotě mc se přibližovati. *Avšak* dle 2. podmínky *proměnné veličiny* x_1, y_1 *k téléž stálé mezní hodnotě stejným spůsobem se přibližují.*

Pročež jest

$$m c = c,$$

z čehož plyne

$$m = 1;$$

tudíž jest nezbytně

$$x_1 = m y_1 = y_1.$$

Jsou tedy proměnné veličiny x_1, y_1 ***pro každou hodnotu čísla n sobě rovny.***

Skrátíme-li poměr $\frac{A x_1}{a y_1}$ společným činitelem $x_1 = y_1$, obdržíme ze srovnalosti (I) hledanou srovnalost

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b},$$

aneb z rovnice (II) hledanou rovnici

$$\frac{A}{a} = 1, \text{ čili } A = a.$$

Dodatek. Jak později (§. 3.) uvidíme, jest *v některých zvláštních případech pro jisté hodnoty čísla* $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$

$$x_1 = c$$
$$y_1 = c;$$

tudíž je poměr

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{c}{c} = 1.$$

Ježto však poměr $\frac{x_1}{y_1} = m$ *pro každou hodnotu čísla n je stálý, bude tedy pro každou hodnotu n*

$$\text{poměr } \frac{x_1}{y_1} = m = 1\,,$$

z čehož jde

$$x_1 = m y_1 = y_1.$$

§. 2.

Všeobecná poučka (platná v geometrii i ve fysice).

Jsou-li dvě stejnorodé směřitelné veličiny (A, a) srovnalostné s dvěma jinými veličinami (B, b), budou i tehdy s nimi srovnalostné, jsou-li ony veličiny nesměřitelné. *)

Podmínka. Pro případ, že *veličiny* A, a jsou *směřitelné*, budiž platna srovnalost

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Výrok. Srovnalost (1) *bude také pravdiva, jsou-li* A, a *veličiny nesměřitelné.*

Důkaz. Jsou-li *veličiny* A, a *směřitelné*, musí jakýsi $n$tý díl veličiny a ve veličině A $p$krát beze zbytku obsažen býti; tudíž jest

$$A = \frac{a}{n} . p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu veličiny A do rovnice (1), dostaneme

$$B = \frac{b}{n} . p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Jestiť tedy tentýž $n$tý díl veličiny b ve veličině B také $p$krát beze zbytku obsažen.

Jsou-li však *veličiny* A, a *nesměřitelné*, bude pro každou hodnotu čísla $n = 1, 2, 3, 4 \ldots.$
dle rovnice (2)

$$A = \frac{a}{n} . p + x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

a dle rovnice (3)

$$B = \frac{b}{n} . p + y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

*) **Poznámka.** Budiž zde jednou na vždy podotknuto, že litery A, a, a B, b, jakož i jiné, jichž v následujících §§. použijeme, *netoliko veličiny*, o kterých řeč jest, *nýbrž i jejich poměrná čísla* znamenají.

kdežto dané veličiny A, a, B, b jsou *veličiny stálé*, a tudíž *zbytky* $x < \frac{a}{n}$, $y < \frac{b}{n}$ *veličiny proměnné*, jichžto hodnot při rostoucím n ustavičně ubývá.

Z rovnic (4), (5) pak plyne

$$A - x = a \,.\, \frac{p}{n},$$

$$B - y = b \,.\, \frac{p}{n}.$$

Obrácením a dělením těchto dvou rovnic obdržíme

$$\frac{a}{b} = \frac{A - x}{B - y} = \frac{A\left(1 - \frac{x}{A}\right)}{B\left(1 - \frac{y}{B}\right)} = \frac{A x_1}{B y_1},$$

položivše zkrátka

$$1 - \frac{x}{A} = x_1,\ 1 - \frac{y}{B} = y_1.$$

Pročež jest

$$\frac{A x_1}{B y_1} = \frac{a}{b}.$$

Znásobíce na obou stranách poměrem $\frac{B}{a}$ dostaneme

$$\frac{A x_1}{a y_1} = \frac{B}{b},$$

z čehož dle (I) §. 1. plyne hledaná srovnalost

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b},$$

poněvadž všecky tři podmínky společného spůsobu dokazování zde místo mají, totiž:

1. Dané *veličiny* A, a, B, b jsou *stálé*, pak $x_1 = 1 - \frac{x}{A}$, $y_1 = 1 - \frac{y}{B}$ *veličiny proměnné* a na čísle $n = 1, 2, 3, 4 \ldots.$ tak závislé, že hodnot jejich při rostoucím n ustavičně přibývá, protože zbytku $x < \frac{a}{n}$, $y < \frac{b}{n}$ při rostoucím n ustavičně ubývá.

2. Proměnné veličiny $x_1 = 1 - \frac{x}{A}$, $y_1 = 1 - \frac{y}{B}$ se přibližují *stejným způsobem* ustavičně k *téléž* stálé *mezní hodnotě* $c = 1$, když hodnot jejich při rostoucím n ustavičně přibývá, ačkoliv *nikdy se nestane* $x_1 = c = 1$, $y_1 = c = 1$, protože *nikdy se nestane* $x = 0$, $y = 0$.

3. *Srovnalost* $\frac{A x_1}{a y_1} = \frac{B}{b}$ *jest pro každou hodnotu čísla* n *pravdiva.*

Nutno tedy, aby i výrok v §. 1. dokázaný zde platným byl.

Dodatek. Je-li srovnalost $\frac{A}{a} = \frac{b}{B}$ *pravdiva pro případ, že veličiny* A, a *jsou směřitelné, bude také pravdiva, jsou-li* A, a *veličiny nesměřitelné.*

Důkaz podobá se předešlému.

Geometrické poučky.*)

§. 3.

Poučka. Protínají-li dvě rovnoběžné příčky dvé paprskův, jsou úsečky (A, a) *jednoho paprsku s úsečkami* (B, b) *druhého paprsku srovnalostné.*

I. Důkaz. Že pro případ směřitelnosti úseček A, a srovnalost:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

je pravdiva, dokázáno v každé školní knize. [Viz ku př. „Geometria od Vács. Jandečky, druhé vydání §. 87. 2. *a*)].

Jsou-li však *úsečky* A, a *nesměřitelné*, plyne platnost srovnalosti dokázané pro případ směřitelnosti úseček A, a, také pro případ jich nesměřitelnosti ze všeobecné poučky §. 2.

II. Důkaz (neodvislý od §. 2.). Rozdělivše menší úsečku a prvního paprsku na $n = 1, 2, 3, 4 \ldots.$ sobě rovných částí odnímáme-li takovou část $= \frac{a}{n}$ od větší úsečky A *p*krát, t. j.

*) Poznámka. Příslušné obrazce sestrojiž si každý sám.

kolikrát vůbec možná, zůstane z A ještě zbytek $x < \frac{a}{n}$, při čemž také $x = 0$ býti může, ale nemusí.

Tudíž jest

$$A - x = \frac{a}{n} \cdot p = a \cdot \frac{p}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Vedeme-li pak každým dělícím bodem úseček A, a rovnoběžku s danými rovnoběžnými příčkami, rozdělí se tím též menší úsečka b druhého paprsku na n sobě rovných částí, z nichžto každá $= \frac{b}{n}$, větší pak úsečka B na p sobě rovných částí, z nichžto každá $= \frac{b}{n}$, se zbytkem $y < \frac{b}{n}$, při čemž $y = 0$ pro $x = 0$.

Tudíž jest

$$B - y = \frac{b}{n} \cdot p = b \cdot \frac{p}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Dělíme-li rovnici (1) rovnicí (2), obdržíme

$$\frac{a}{b} = \frac{A - x}{B - y} = \frac{A\left(1 - \frac{x}{A}\right)}{B\left(1 - \frac{y}{B}\right)} = \frac{Ax_1}{By_1},$$

kdežto

$$x_1 = 1 - \frac{x}{A}, \quad y_1 = 1 - \frac{y}{B}.$$

Pročež jest

$$\frac{Ax_1}{By_1} = \frac{a}{b};$$

tudíž také

$$\frac{Ax_1}{ay_1} = \frac{B}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

z čehož *pro případ nesměřitelnosti úseček* A, a dle (I) §. 1. plyne hledaná srovnalost

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b},$$

poněvadž v tomto případě všecky tři podmínky §. 1. místo mají; musí tedy i výrok tamtéž dokázaný zde platným býti.

Jsou-li však *úsečky* A, a *směřitelné*, jest pro jisté hodnoty čísla $n = 1, 2, 3, 4 \ldots.$

$$x_1 = 1 - \frac{x}{A} = 1 - \frac{0}{A} = 1,$$

$$y_1 = 1 - \frac{y}{B} = 1 - \frac{0}{B} = 1.$$

Jestiť tedy pro jisté hodnoty čísla n poměr $\frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{1} = 1.$

Ješto však poměr $\frac{x_1}{y_1}$ ve srovnalosti (3) *pro každou hodnotu n je stálý, bude pro každou hodnotu n poměr* $\frac{x_1}{y_1} = 1$, čili $x_1 = y_1$.

Pročež plyne ze srovnalosti (3) *hledaná srovnalost*

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b},$$

nechť si už jsou úsečky A, a směřitelné neb nesměřitelné.

Poznámka. Jelikož odvozujíce srovnalost (3) *nepředpokládáme ani směřitelnosti ani nesměřitelnosti úseček A, a*, nýbrž si této vlastnosti nevšímáme, patrno, že tento II. důkaz není totožný s důkazem v §. 2. ani na onom závislý, jakož jest I. důkaz na něm závislý.

Dodatek. Předešlými dvěma důkazy jsou i následující čtyry poučky již dokázány, dáme-li jen literám A, a, B, b jiné příslušné významy.

§. 4.

1. *Poučka. Výšky (A, a) dvou obdélníkův o rovných základnách jsou s ploskými obsahy (B, b) srovnalostné.*
2. *Poučka. Oblouky (A, a) téže kružnice jsou s příslušnými úhly středovými (B, b) srovnalostné.*
3. *Poučka. Oblouky (A, a) v témže kruhu jsou s příslušnými výkrojky (B, b) srovnalostné.*
4. *Poučka. Výšky (A, a) dvou pravoúhelných rovnoběžnostěnů na téže základně jsou s krychlovými obsahy (B, b) srovnalostné.*