Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

C. Le Paige

# Note sur la théorie des polaires dans les courbes géométriques

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 10 (1881), No. 4, 212--216

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121627`

$$ax^4+4bx_3+6cx^2+4dx+e=0$$

co kvadratický, kubický a bikvadratický variant a retrovariant vzorce obdobné a sice v případě posledním

$$V_4=3b^4-6ab^2c+4a^2bd-a^3e,$$
$$V_4'=3d^4-6ed^2c+4e^2db-e^3a.$$

Jakou úlohu při řešení rovnic hrají varianty a retrovarianty, bude příležitostně ukázáno později.

---

# Note sur la théorie des polaires dans les courbes géométriques.

Par le Dr. **C. le Paige,**

Professeur de Géométrie Supérieure à l' université de Liége.

Nous nous proposons, dans cette courte Note, de démontrer quelques propriétés des groupes polaires d' un groupe de points par rapport à un point donné, propriétés qui permettent de ramener aisément la détermination des courbes polaires d' un point relativement à une courbe $C_n$ indécomposable, à celle des mêmes polaires pour des courbes décomposables. Ces propriétés permettent aussi de trouver les élements nécessaires à leur construction et à la détermination de leur ordre.

I. *Pour que les $(n-k)^{mes}$ polaires d' un point $P$ par rapport à deux groupes de $n$ points $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$; $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$, coïncident, il faut et il suffit que l' involution $I_1^n$, déterminée par ces deux groupes, possède un point $(k+1)^{ple}$ en $P$.*

En effet, soient

$$\gamma=\alpha_0x^n+\binom{n}{1}\alpha_1x^{n-1}y+\binom{n}{2}\alpha_2x^{n-2\,2}y+\ldots+\alpha_ny^n=0,$$
$$\varphi=\beta_0x^n+\binom{n}{1}\beta_1x^{n-1}y+\binom{n}{1}\beta_2x^{n-2\,2}y+\ldots+\beta_ny^n=0,$$

les équations dont les racines représentent les deux groupes donnés. La $(n-k)^{me}$ polaire du point $P$, par rapport au premier groupe, sera représentée par

$$x^k\,[\alpha_0\, x^{n-k} + \binom{n-k}{1} \alpha_1\, x^{n-k-1} y + \ldots + \alpha_{n-k}\, y^{n-k}]$$
$$+ \binom{k}{1} x^{k-1} y\, [\alpha_1 x^{n-k} + \binom{n-k}{1} \alpha_2 x^{n-k-1} y + \ldots + \alpha_{n-k+1} y^{n-k}] + \ldots$$
$$+ y^k\, [\alpha_k\, x^{n-k} + \binom{n-k}{1} \alpha_{k+1}\, x^{n-k-1} y + \ldots + \alpha_n\, y^{n-k}] = 0;$$

celle du même point qui est relative au second groupe par l'équation

$$x^k\,[\beta_0\, x^{n-k} + \binom{n-k}{1} \beta_1\, x^{n-k-1} y + \ldots + \beta_{n-k}\, y^{n-k}] +$$
$$+ \binom{k}{1} 2^{k-1} y\, [\beta_1\, x^{n-k} + \ldots - + \beta_{n-k+1}\, y^{n-k}] + -$$
$$+ y^k\, [\beta_k x^{n-k} + \binom{n-k}{1} \beta_{k+1}\, x^{n-k-1} y + \ldots + \beta_n y^{n-k}] = 0.$$

Pour que ces deux groupes de $k$ points coïncident, il faut évidemment que l'on ait,

$$\frac{\alpha_0\, x^{n-k} + \binom{n-k}{1} \alpha_1\, x^{n-k-1} y + \ldots + \alpha_{n-k}\, y^{n-k}}{\beta_0\, x^{n-k} + \binom{n-k}{1} \beta_1\, x^{n-k-1} y + \ldots + \beta_{n-k}\, y^{n-k}} =$$

$$= \frac{a_1\, x^{n-k} + \binom{n-k}{1} \alpha_2\, x^{n-k-1} y + \ldots + \alpha_{u-k+1}\, y^k}{\beta_1\, x^{n-k} + \binom{n-k}{1} \beta_2\, x^{n-k-1} y + \ldots + \beta^{n-k+1}\, y^k} = \ldots = \ldots$$

Ces équations peuvent aussi s'écrire:

$$\frac{d^k f}{dx^k} - \lambda \frac{d^k \varphi}{dx^k} = 0, \quad \frac{d^k f}{dx^{k-1} dy} = \lambda \frac{d^k \varphi}{dx^{k-1} dy} = 0, \ldots$$
$$\frac{d^k f}{dy^k} - \lambda \frac{d^k \varphi}{dy^k} = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'involution

$$f - \lambda \varphi = 0,$$

possède un point $(k+1)^{ple}$ en $P$.

Le cas où $k = 1$ a été signalé par *Poncelet.* *)

II. Soit un groupe de $n$ points $a_1$, $a_2$, . . . $a_n$ sur une droite et déterminons la première polaire $z_1$, $z_1$, . . . $z_{n-1}$ d'un point de cette droite $P$: $(z, v)$, par rapport à ce groupe; puis

---

*) Analyse des Transversales, No. 191—192.

encore la première polaire $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ de $P$ par rapport à $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$. *Les trois groupes* $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$; $P, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}$; $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$, *appartiennent à une même involution* $I_1^{n-1}$.

Pour simplifier les écritures, bornons-nous au cas où $n=4$: on s' apercevra aisément que la démonstration est générale.

Soit

$$\alpha_0 n^4 + 4\alpha_1 x^3 y + 6\alpha_2 x^2 y^2 + 4\alpha_3 x y^3 + \alpha_4 y^4 = \alpha_0 (x - a_1 y)(n - a_2 y)(x - a_3 y)(x - a_4 y) = 0,$$

l' équation qui représente les points $a_1, a_2, a_3, a_4$.

La première polaire de $P$ a pour équation

$$f = x^3 (\alpha_0 Z + \alpha_1 U) + 3x^2 y (\alpha_1 Z + \alpha_2 U) + 3 x y^2 (\alpha_2 Z + \alpha_3 U) + y^3 (\alpha_3 Z + \alpha_4 U) = 0. \qquad 1)$$

Posons de plus

$$\varphi = \alpha_0 (x - a_1 y)(x - a_2 y)(x - a_3 y) = A_0 x^3 + 3A_1 x^2 y + + 3A_2 x y^2 + A_3 y^3 = 0. \qquad 2)$$

On trouve

$$A_0 = \alpha_0;\ 3A_1 = 4\alpha_1 + \alpha_0 a_4,\ 3A_2 = 6\alpha_2 + 4\alpha_1 a_4 + \alpha_0 a_4^2,$$
$$A_3 = 4\alpha_3 + 6\alpha_2 a_4 + 4\alpha_1 a_n^2 + \alpha_0 a_4^3.$$

On a, de plus:

$$\alpha_4 = -4\alpha_3 a_4 + 6\alpha_2 a_4^2 + 4\alpha_1 a_4^3 + \alpha_0 a_4^4.$$

Les points $y_1, y_2$, seront représentés par l' équation

$$x^2 (A_0 Z + A_1 V) + 2xy (A_1 Z + A_1 V) + y^2 (A_2 Z + A_3 V) = 0,$$

et le groupe $y_1, y_2, a_4$, par

$$\psi = [x^2 (A_0 Z + A_0 V) + 2xy (A_1 Z + A_1 V) + y^2 (A_2 Z + A_3 V)](x - a_4 y) = 0. \qquad 3)$$

Un léger calcul fait voir que

$$4f - (Z - a_4 V)\varphi - 3\psi \equiv 0.$$

On peut observer que si $P$ coïncide avec $a_4$,

$$4f \equiv 3\psi,$$

théorème d'ailleurs connu.

Appliquons ces deux propositions à la détermination de la polaire d'un point $P$, relative à une courbe du quatrième ordre $C_4$.

Menons une transversale quelconque $\delta$ qui coupe $C_4$ en quatre points $a, b, c, d$, puis les droites $Pa, Pb, Pc, Pd$. Chacune d'elles coupe $C_4$ en trois nouveaux points, et les douze points $a'$, $a''$, $a'''$ ; $b'$, $b''$, $b'''$; $c'$, $c''$, $c'''$ ; $d'$, $d''$, $d'''$, sont sur une cubique $C_3$.

Les trois courbes de quatrième ordre $C_4$ ; $\delta_3$ $C_3$ ; $Pa$, $Pb$, $Pc$, $Pd$, ont seize points communs. Donc elles sont en involution.

Si maintenant, par le point $P$, nous menons une transversale quelconque $Px$, cette droite remontre $C_4$ en quatre points $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ; $\delta C_3$ en $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ et $Pa$, $Pb$, $Pc$, $Pd$, en quatre points coïncidant en $P$.

Par suite $P$ est un point quadruple de l'involution déterminée par $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$; $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$.

A cause de I, on voit que la polaire de $P$ par rapport au groupe $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ est la même que celle qui est relative à $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$.

Il en résulte que la polaire de $P$ par rapport à $C_4$ ne diffère pas de celle qui est relative à $\delta C_3$.

Soient $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ les points où $\delta$ rencontre $C_3$ et $t_1$, $t_2$ $t_3$, $t_4$, $t_5$, $t_6$, les points de contact des six tangentes menées de $P$ à $C_3$; ces six points $t_1$, $t_2$, . . . $t_6$ sont d'ailleurs sur la conique, polaire de $P$ par rapport à $C_3$.

On voit maintenant que la première polaire de $P$ relative à $C_4$, passera par $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, $t_1$, $t_2$, $t_3$, . . . $t_6$.

Si sur $Px$ nous déterminons le groupe $z_1z_2z_3$ polaire de $P$ relatif à $y_1y_2y_3y_4$ (et par suite à $x_1x_2x_3x_4$), ce groupe par le théorème II, est en involution avec les deux groupes de points de rencontre de $Px$ d'abord avec $C_3$, et en second lieu avec $\delta$ et la conique qui passe par $t_1t_2t_3t_4t_5t_6$.

Donc ils sont donnés par une cubique qui passe par les neuf points $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, $t_1$, $t_2$, . . . $t_6$.

D'ailleurs cette cubique est complètement déterminée, car le groupe $z_1$, $z_2$, $z_3$ doit encore faire partie de l'involution $I^3_1$ formée par les points polaires de $P$, lorsque $P$ se déplace sur $Px$, involution dont il est facile d'obtenir des ternes de points en appliquant la remarque qui termine le §. II.

En conséquence, la polaire de $P$ relative à $C_3\delta$, et par suite à $C_4$, est une cubique. Ceci s'applique naturellement aux courbes géométriques d'ordres quelconques.

La démonstration que nous venons de donner de ce théorème connu, nous semble plus complète que celle qui se déduit de la remarque que la première polaire d'un point $P$, relative à une courbe de $n^{me}$ ordre, ne coupant une transversale, issue de $P$ qui en $n-1$ points, est une courbe de $(n-1)^{me}$ ordre.

D'ailleurs le § II contient, on le voit, un mode uniforme de construction de la polaire d'un point par rapport à un groupe de $n$ points quand on sait construire la polaire par rapport à un groupe de $n-1$ points.

---

# Základové theorie elektrostatiky.

Sepsal

prof. Dr. Fr. Koláček, v Brně.

V této rozpravě chci podati krátký nástin pokroku elektrostatiky v dobách posledních, jednak co se theorie týče, jež nyní se jen o náhledy *Faraday-ovy* opírati může, jinak co do přístrojů elektrostatických. Rozumí se samo sebou, že nelze vyčerpati látky, ač k dalšímu sdělování vybízí. Chci se obmeziti na některé zajímavější, však dosti málo známé partie. Zejmena chci po spůsobu *W. Thomsona* a *J. Cl. Maxwella* ukázati, kterak třeba interpretovati, a částečně doplniti výsledky starší materialné theorie, aby jimi zobrazeny byly názory Faraday-ovy co do formy i obsahu. Znamoť, že Faraday, zamítaje „actio in distans", obracel zřetel k tomu, co pozorovati jest v dielectricum, jež právem za sídlo energie elektrostatické považoval. Nad míru zajímavé pokusy vedly jej ke studiu tak zvaných čar sil (Lines of force), jimiž vyjádřoval to, *co na výjevech elektrických jest prostorového.* V tomto ohledu jest Faraday-ův názor o elektrickém poli s čárami jeho, se starším názorem o fluidu na mezích dielektrika, stejně oprávněný. Jest věcí pouze formálního dosahu, jestli se starší neb Faraday-ovy interpretace přidržíme.

Hledáme-li sídlo energie elektrostatické v dielektriku, namítá se nám otázka, čím jest stav dielektrika v stavu rozrušeném aspoň mathematicky karakterisován, a jak veliká jest energie