Bedřich Procházka

Příspěvek ku stanovení středu křivosti trajektorií vytvořených při pohybu neproměnného útvaru rovinného v jeho rovině

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 2-3, 144--156

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121608

travariant I, utvořený z výrazů σ, σ', τ, τ', má index 7, jakož snadno způsobem l. c. pag. 117 vyloženým vychází, a redukuje se v případě kanonických forem f, f' v podstatě na součin $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4$, tak že rovnice $I = 0$ repraesentuje vrcholy společného polárného čtyrstěnu daných ploch.

Poukazuje v příčině dalších příkladův a applikaci na cit. dílo *Salmon Fiedlerovo*, zůstavuji obdobné úvahy o smíšených formách době pozdější.

Příspěvek ku stanovení středů křivosti trajektorií vytvořených při pohybu nepromĕnného útvaru rovinného v jeho rovině.

Napsal

Bedřich Procházka.

professor na realce Karlinské

Ve článku: „O jistém druhu křivek“, uveřejněném ve IV. čísle XXIV. ročníku tohoto časopisu, použil jsem při sestrojování středu křivosti konstrukce, které se dá s prospěchem užíti také při *trochoidách*, a jelikož lze každý pohyb nepromĕnného útvaru rovinného v jeho rovině se šinoucího pokládati za pohyb kotálení, také ***při trajektoriích vytvořených body libovolně se pohybujícího nepromĕnného útvaru rovinného.***

1. Kotálí-li se křivka A, nalézající se v pohybující se rovině A, po křivce K, ležící v rovině M, kteráž svou polohu nemĕní, pak můžeme pokládati tento pohyb za pohyb *torný* a současný pohyb *posuvný* křivky A po křivce K, při nichž se rovná oblouk, kterým se ona křivka tře, oblouku této křivky, po kterém se posouvá. Následkem současných těchto dvou pohybů, které v každém okamžiku jsou vlastně pohyby otáčení kol středů křivosti ^1o a ^2o křivek A a K, zůstane bod jejich dotyku s v poloze stálé a bude okamžitým středem otáčení, kterým procházejí normaly trochoid vytvořených body hybné roviny.

Zvolíme-li při posouvání křivky A úhlovou rychlost otáčení kol středu ^2o za jednotku, pak představuje vzdálenost $\overline{a\,^2o}$ jakéhokoliv bodu a, náležejícího pohybující se rovině A, od středu ^2o kolmou rychlost otáčení bodu tohoto a. Přímka ^2on sestrojená bodem ^2o rovnoběžně se spojnicí bodu a se středem křivosti ^1o křivky A odetíná na normale $N \equiv as$ příslušící bodu a, délku $\overline{an}$, kteráž jest kolmou rychlostí bodu a při kotálení křivky A po křivce K. (Kdybychom chtěli sestrojiti normalnou rychlost $\overline{ad}$ bodu a při tření křivky A, t. j. při jejím otáčení kol bodu $'o$, vedeme $nd \parallel a^2o$, kteráž přímku a^1o v bodě d protíná.)

Při kotálení postupuje však bod dotyku obou křivek s ve směru jejich společné tečny T, v tomto bodě sestrojené, kolmou rychlostí $\overline{s^2o}$. Sestrojíme-li $ne \perp N$ a vedeme $ae \parallel s^2o$, obdržíme v $\overline{ae}$ kolmou rychlost, kterou se pohybuje bod a v přímce $T_a \parallel T$ a bodem a procházející. Přímka e^2o protíná N v bodě ^1a, jehož rychlost se rovná nule, a který jest tedy středem křivosti příslušným bodu a.

Vyjadřujíce délku poloměru křivosti $\varrho = \overline{a^1a}$ trochoidy vytvořené bodem a, označíme poloměr křivosti křivky K v bodu dotyčném s $R' = \overline{s^2o}$, poloměr křivosti křivky A v témž bodu $R'' = \overline{s^1o}$, délku $\overline{as}$ písmenem m, a úhel normaly N s přímkou T písmenem φ.

Z podobnosti trojúhelníků:

$$\triangle\, a^1ae \sim \triangle\, s^1a^2o$$

vyplývá, že

$$\frac{\varrho}{\varrho - m} = \frac{\overline{ae}}{R'}.$$

Z trojúhelníku ane patrno, že

$$\overline{ae} = \frac{\overline{an}}{\sin\varphi},$$

a klademe-li

$$\overline{an} = \overline{as} + \overline{sn} = m + \overline{sn},$$

obdržíme, učiníce, jak z podobnosti trojúhelníků

$$\triangle\, as^1o \sim \triangle\, ns^2o$$

vyplývá,

$$\overline{sn} = \frac{m \,.\, R'}{R''},$$

výraz

$$\frac{\varrho}{\varrho - m} = \frac{m + \frac{m \, . \, R'}{R''}}{R' \sin \varphi} = \frac{m\,(R' + R'')}{R' \, R'' \sin \varphi}.$$

Uvedouce tuto rovnici na tvar

$$\varrho : (\varrho - m) = m : \frac{R' R''}{R' + R''} \sin \varphi,$$

obdržíme konečně po jednoduchém výpočtu

$$\frac{m}{\varrho} = 1 - \frac{\sin \varphi}{m} \frac{1}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}},$$

ku kteréž formuli dospěl pan professor *Eduard Weyr* *), považuje křivky A a K za limitní tvar čar lomených.

V právě uvedené konstrukci středu křivosti trochoidy, skrývá se však také již *Eulerův* způsob sestrojení středu tohoto.**)

Sestrojí-li se za tím účelem průsečík f přímky ae s přímkou n^2o, průsečík g přímek a^1o a en, průsečík α přímek ag a ^2oe, pak vyplývá z této konstrukce, že

$$\frac{\overline{as}}{\overline{an}} = \frac{\overline{f^2o}}{\overline{fn}} = \frac{\overline{a\alpha}}{\overline{ag}}.$$

Proto jest přímka $s\alpha$ rovnoběžna ku přímce ng a tudíž i kolma ku přímce $N \equiv as$.

Lze tudíž sestrojiti střed křivosti ^1a bodu a také takto: *Sestrojíce* $s\alpha \perp N$, *spojíme průsečík její* α *s přímkou* a^1o *s bodem* ^2o; *přímka* α^2o *protíná normalu* N *ve středu křivosti* ^1a.

2. Použijme této druhé konstrukce, abychom sestrojili středy křivosti ^1b, $^1c, \ldots$ příslušící ku trochoidám, vytvořeným body $b, c, \ldots$, nalezajícími se v normale N bodu a. Tu shledáme, že přímá řada bodů $abc\ldots$ jest projektivnou ku svazku $'o\,(a\,b\,c\ldots)$, kterýž určuje v přímce $\alpha s \perp N$ k němu projektivnou

*) *Prof. Eduard Weyr: Strojení středu zakřivení trochoid.* Tohoto časopisu ročn. XXIII. str. 6.

**) Týž článek str. 7.

řadu bodů $\alpha\beta\gamma\ldots$ Svazek $^2o\,(\alpha\beta\gamma\ldots)$ určuje pak v normale N řadu bodů $^1a^1b^1c\ldots.$ která je projektivnou ku tomuto svazku a tudíž i ku řadě bodové $abc\ldots$

V těchto dvou projektivných řadách soumístných přísluší nekonečně vzdálenému bodu r_∞ normaly N bod centralný ^1r, kterýž sestrojíme, vedouce bodem ^1o přímku $^1o\varsigma \parallel N$, protínající přímku $s\alpha$ v bodě ς, a protnouce normalu N přímkou $^2o\varsigma$. Opáčnou konstrukcí lze docíliti druhý bod centrálný v jakožto odpovídající bodu nekonečně vzdálenému $^1v_\infty$. Bod ^1r je středem křivosti trochoidy vytvořené nekonečně vzdáleným bodem r a bod v vytvořuje trochoidu mající v něm nekonečně veliký poměr t. j. bod obratu. Jak z konstrukce těchto bodů ^1r a v vyplývá, jest čtyřuhelník $^1o\varsigma^2o\omega$ lichoběžníkem, jehož střední příčkou jest délka $\overline{^1rv}$; proto mají oba body centrálné od okamžitého středu otáčení stejnou vzdálenost.

Použijeme-li této konstrukce, shledáme, že v bodě s se zároveň oba samodružné body obou projektivných řad soumístných stotožňují.

Ze známé věty o projektivné potenci dvou projektivných řad plyne, že součin

$$\overline{av}\,.\,\overline{^1a^1r} = \overline{bv}\,.\,\overline{^1b^1r} = \ldots = \overline{s^1r}^2 = \overline{sv}^2 = \text{konst.}\,^{*})$$

Proto můžeme, znajíce okamžitý střed otáčení s a bod centrálný ^1r sestrojiti ku bodu a sdružený bod ^1a následovně:

Body a a s vedeme v libovolném směru rovnoběžky at a su a protneme je jinými dvěma přímkami rovnoběžnými st a ^1ru v bodech t a u, jimiž určená přímka protíná normalu N v bodu ^1a. **)

Z uvedené konstruce této plyne, že

$$\frac{\overline{s^1a}}{\overline{^1r^1a}} = \frac{\overline{t^1a}}{\overline{u^1a}} = \frac{\overline{at}}{\overline{su}} = \frac{\overline{a^1a}}{\overline{s^1a}}$$

z čehož plyne:

*) „*Základové vyšší geometrie*“ od *Dra. Emila Weyra* a *Eduarda Weyra*, díl. I. str. 53.

**) *A. Mannheim: Principes et développements géométrie cinématique.* 1894. str. 36.

$$\overline{a^1a} \, . \, \overline{{}^1r^1a} = \overline{s^1a}^2 . \tag{1}$$

Klademe-li v tomto vzorci:

$$\overline{a^1a} = \overline{av} + \overline{v^1r} + \overline{{}^1r^1a}$$

a
$$\overline{s^1a} = \overline{s^1r} + \overline{{}^1r^1a},$$

obdržíme po jednoduchém výpočtu a redukci

$$\overline{av} \, . \, \overline{{}^1a^1r} = \overline{s^1r}^2 \tag{2}$$

jakožto důkaz správnosti uvedené konstrukce.

Z podmínky 1. zároveň na hoře odvozené plyne, že přenesouce délku $\overline{{}^1as}$ od bodu ${}^1a$ na protivnou stranu, obdržíme bod ${}^1a'$, který s bodem s harmonicky odděluje body a a ${}^1r$; můžeme tedy také tohoto jednoduchého vztahu ku sestrojení bodu ${}^1a$ použiti.*) Sestrojivše totiž bod ${}^1a'$ jakožto harmonicky sdružený s bodem s vzhledem ku bodům a a ${}^1r$ jakožto základním, rozpolili bychom pak hledaným bodem ${}^1a$ délku $\overline{s^1a'}$.

Jiná konstrukce, kterou lze, známe-li okamžitý střed otáčení s a bod centrálný v, bod ${}^1a$ docíliti jest:

Bodem v a s vedeme v libovolném směru dvě rovnoběžky vk a sl a protneme je přímkou ak, libovolně bodem a vedenou v bodech k a l. Přímka $l^1a \parallel ks$ protne pak normalu N v bodu ${}^1a$.

Důkaz správnosti této konstrukce mohli bychom právě tak vésti, jako v případě předcházejícím a přišli bychom zároveň ku vzorci:

$$\overline{{}^1aa} \, . \, \overline{va} = \overline{sa}^2,$$

z kterého plyne, že učiníce $\overline{aa'} = - \overline{as}$, obdržíme bod a', který s bodem s harmonicky odděluje body ${}^1a$ a v, na kterémž základě bychom také bod ${}^1a$ mohli sestrojiti.**)

Jest zřejmo, že v konstrukci prvé nalezáme zároveň způsob, jakým bychom sestrojili, — znajíce družinu a^1a a okamžitý střed otáčení s,— bod ${}^1r$, příslušící nekonečně vzdálenému bodu r normaly N; konstrukce druhé pak užiti můžeme, abychom za týchž okolností bod centrálný v sestrojili.

*) Tamtéž, str. 32.
**) Tamtéž str. 32.

Jest-li naopak předpokládáme, že se křivka K kotálí po křivce A, pak přísluší, jak z konstrukce Eulerovy vysvítá, bodu ^1a jakožto bodu vytvořujícímu trochoidu naopak bod a jakožto střed křivosti. Jsou tedy rovinné útvary A a M, tímto způsobem k sobě vztažené v *kvadratické příbuznosti.* *)

3. Vztýčime-li, sestrojivše bod ^1r konstrukcí Eulerovou v bodu tomto kolmici ku N, protne tato přímka spojnici obou středů křivosti ^1o a ^2o křivek L resp. K v bodu x. Z konstrukce té patrno, že jest poměr

$$\frac{\overline{sx}}{\overline{^2ox}} = \frac{\overline{\varrho^1r}}{\overline{^2o^1r}} = \frac{\overline{^1os}}{\overline{^2os}} = \text{konst.}$$

Poloha bodu x jest jak zřejmo na poloze přímky N nezávislá a proto jest geometrickým místem bodu ^1r křivka kruhová ^1R, mající délku $\overline{sx}$ za svůj průměr.

Z toho tedy plyne: *Středy křivosti trochoid, vytvořených současně nekonečně vzdálenými body roviny* A, *nalézají se na křivce kruhové ^1R, dotýkající se křivek K a A v okamžitém středu otáčení s.* **)

Poněvadž $\overline{sv} = -\overline{s^1r}$ jest geometrickým místem bodu v křivka kruhová V, shodná s křivkou ^1R, položená souměrně ku této křivce vzhledem ku okamžitému středu otáčení s.

Výsledek, ke kterému jsme dospěli, můžeme vysloviti takto: *Body, které vytvořují trochoidy, mající nekonečně veliké poloměry nalézají se na křivce kruhové V, která se dotýká křivek A a K v jejich bodě dotyčném s a jest ku křivce ^1R souměrně položena dle tohoto bodu.* ***)

Nalézají se tedy všechny body tvořící současně obraty svých trochoid v křivce kruhové V, která se nazývá *křivkou kruhovou obratu* nebo dle svého vynálezce *de la Hirovou.*†)

Těmto bodům obratu příslušící tečny obratu procházejí patrně jediným bodem y křivky kruhové obratu, který jest dia-

---

*) *Dr. Th. Reye. Die Geometrie der Lage.* II. vyd. II. odd. str. 119.

**) *A. Mannheim. Géométrie cinématique.* str. 31.

***) Tamtéž, str. 31.

†) *Dr. L. Burmester. „Lehrbuch der Kinematik.“* 1888. I. svaz. str. 121.

metrálným vzhledem ku okamžitému středu otáčení s a nazývá se *polem obratu*.*)

Každá z kružnic ^1R nebo V nahrazuje nám úplně — vzhledem ku sestrojení středů křivosti vytvořených trochoid — křivky K a A a můžeme jich, znajíce zároveň bod s, užiti ku sestrojení středu křivosti trochoidy, vytvořené jakýmkoliv bodem c pohybující se roviny A. Protneme-li totiž přímkou $\overline{cs}$ kružnice ony v bodech ^1r resp. v, nabýváme tím potřebných prvků ku užití předem uvedených konstrukcí (článek 2.) ku sestrojení příslušného středu křivosti ^1c.

Při kotálení opáčném křivky K po křivce L jest naopak křivka ^1R křivkou kruhovou obratu a křivka V geometrickým místem středů křivosti příslušících ku nekonečně vzdáleným bodům pohybující se roviny M. —

4. Jest-li při kotálení křivky A po křivce K s rovinou A oné křivky zároveň se pohybuje křivka kruhová C, pak vytvořuje tato křivka křivku obalovou skládající se ze dvou částí O a O'. Dotyčné body o a o' těchto křivek O a O' s křivkou kruhovou C obdržíme, když spustíme ku této křivce okamžitým středem otáčení kolmice, kteréž se stotožňujíce, středem jejím k procházejí. Jelikož zůstane při kotálení vzdálenost bodů o a o' jakožto průměr křivky kruhové C nepromĕnnou, budou křivky obalové O a O' jakož i trochoida vytvořená středem k křivky kruhové C tak zvanými *křivkami parallelními* čili *ekvidistantními* majícími v bodu ^1k, příslušném jakožto střed křivosti ku středu k, *společný* střed křivosti.

Je-li poloměr křivky kruhové C nekonečně veliký, t. j. je-li tato křivka přímkou, kterou P nazveme, pak se dotýká obalová křivka této přímky v patě kolmice N, spuštěné s okamžitého středu otáčení s ku přímce oné a středem křivosti obalové křivky jest bod ^1r, příslušící nekonečně vzdálenému bodu kolmice N, jakožto středu křivosti přímky P.

Všechny přímky stejnosměrné s přímkou P obaleny jsou křivkami, majícími týž bod křivosti ^1r. Ona rovnoběžka, která zároveň bodem ^1r prochází, bude obalena křivkou, která obsa-

*) Tamtéž, str. 121.

luje bod tento jakožto svůj střed křivosti a proto má v bodě tomto svůj *bod vratu.* Z té příčiny nazýváme křivku ^1R, *křivkou kruhovou vratu* nebo také *druhou křivkou kruhovou de la Hirovou.**) Všechny takové přímky, které současně obaleny jsou křivkami majícími bod vratu, procházejí bodem x, který jest diametralným vzhledem ku okamžitému středu otáčení a *polem vratu* se nazývá.**) —

Předpokládejme dále v pohyblivé rovině A libovolnou křivku D. Spusťme s okamžitého středu otáčení s kolmici so ku této křivce a sestrojme křivku kruhovou C', kteráž oskuluje křivku D v patě o oné kolmice. Poněvadž křivka D s křivkou kruhovou C' má v bodě o a nekonečně blízkém bodě o' společnou normalu, bude míti za křivku obalovou křivku, která křivku obalovou křivky kruhové C' oskuluje.

Z toho plyne, *že střed křivosti křivky obalové křivky D jest ve středu křivosti křivky obalové příslušící její křivce oskulační C'.****)

Avšak poznali jsme před tím, že střed křivosti křivky obalové pohybující se křivky kruhové C jest totožný se středem křivosti trochoidy vytvořené středem k křivky C. Tedy patrno, že *střed křivosti obalové křivky příslušící pohyblivé křivce D obdržíme sestrojíce střed křivosti trochoidy vytvořené středem k příslušné křivky kruhové oskulační C'.*

5. Poněvadž každý pohyb rovinného útvaru A po rovině M můžeme pokládati za pohyb kotálení jisté křivky A, v rovině A se nalézající, po určité křivce K roviny M, jíž se v okamžitém středu otáčení dotýká,†) možno nám sestrojiti střed křivosti každé trajektorie vytvořené bodem roviny A jakož i střed křivosti každé křivky obalové, vytvořené libovolnou přímkou nebo křivkou pohybující se roviny.

V předcházejících článcích však jsme poznali, že nám křivka kruhová ^1R nebo V úplně křivky A a K nahrazuje a ukážeme nyní, jak lze v různých případech pohybu nepro-

---

*) Tamtéž, str. 122.

**) Tamtéž, str. 122.

***) *A. Mannheim: Géométrie cinématique,* str. 24.

†) Tamtéž str. 8.

měnného útvaru rovinného A po rovině M tyto křivky ${}^1R$ a V sestrojiti a jak lze jich užiti ku sestrojení středů křivosti při pohybu tom vzniknuvších trajektorií a křivek obalových.

6. Vyjděme od případu, kdy body a a b neproměnného útvaru rovinného A vytvořují trajektorie V_a a V_b, stotožňující se s jistými dvěma křivkami K a L, nalézajícími se v rovině stálé M, jichž středy křivosti jsou body ${}^1a$ a ${}^1b$. Normaly N_a a N_b v bodech a a b ku křivce V_a resp. V_b sestrojené protínají se v okamžitém středu otáčení s.

Abychom sestrojili křivku kruhovou ${}^1R$, která střed otáčení r obsahuje, sestrojíme ještě body ${}^1r_a$ a ${}^1r_b$, příslušící nekonečně vzdáleným bodům normal N_a resp. N_b. K jejich sestrojení užijeme konstrukce, uvedené ve článku 2., kterou tím zjednodušíme, že budeme oba body ${}^1r_a$ a ${}^1r_b$ současně sestrojovati, volíce pomocnou přímku ${}^1at$ tak, aby zároveň bodem ${}^1b$ procházela, jakož i přímku at, aby zároveň bod b obsahovala. Pak přímka $u{}^1r_a \parallel st$, určující v normale N_a bod ${}^1r_a$, již také určuje bod ${}^1r_b$ v normale N_b.

Na základě křivky kruhové ${}^1R$, určené body s, ${}^1r_a$ a ${}^1r_b$, lze pak použitím konstrukcí uvedených ve článku 2. dospěti ku středům křivosti všech trajektorií jakož i křivek obalových. —

Sestrojivše však křivku kruhovou ${}^1R$, vidíme zároveň, že

$$\sphericalangle bst = \sphericalangle s{}^1r_b{}^1r_a \qquad (3)$$

a že přímky ab, ${}^1a{}^1b$, *a přímka* $st \parallel {}^1r_a{}^1r_b$ *se protínají v jediném bodě* t.

Hledajíce tedy střed křivosti ${}^1m$, příslušný nějakému bodu m pohybující se roviny A, můžeme dle předcházejícího vztahu přijíti takto k cíli.

Veďme bodem s s přímkou ${}^1r_a\,{}^1r_m$*) rovnoběžku sq, kteráž přímku am v bodu q protíná. Spojnice bodu tohoto q s bodem ${}^1r_a$ protíná pak normalu N_m v hledaném bodu ${}^1m$.

Z konstrukce té jest patrno, že

$$\sphericalangle msq = \sphericalangle s{}^1r_m{}^1r_a$$

a poněvadž

$$\sphericalangle s{}^1r_b{}^1r_a = \sphericalangle s{}^1r_m{}^1r_a$$

*) Bod ${}^1r_m$ jest průsek normaly $N_m = ms$ s křivkou kruhovou ${}^1R$.

(jakožto úhly obvodové nad touž tetivou křivky kruhové ${}^1R$), jest dle předcházející rovnice 3. také

$$\sphericalangle\, msq = \sphericalangle\, bst.$$

Můžeme tedy sestrojiti střed křivosti ${}^1m$ bez použití křivky kruhové ${}^1R$ takto:

Učiní-li se $\sphericalangle\, msq$ rovný $\sphericalangle\, bst$, pak spojnice průsečíku q ramene sq úhlu msq a přímky am s bodem ${}^1a$ protíná normalu N_m v bodu ${}^1m$.

Konstrukci tuto podal a odůvodnil *Bobillier* *). Nalezáme tudíž v této Bobillierově konstrukci novou pomůcku k sestrojování středů křivosti trajektorií, která i sestrojení křivky kruhové ${}^1R$ nebo V zbytečným činí.

7. Nejobecnějším případem pohybu neproměnného útvaru rovinného A jest ten, kdy dvě jeho křivky A a B se stále dotýkají dvou křivek K a L roviny M, nalézající se v poloze stálé Pak jsou dle článku 4. křivky K a L obalujícími křivkami pohybujících se křivek A a B a proto středy křivosti k a l oněch dvou křivek jsou zároveň středy křivosti ${}^1a$ a ${}^1b$, příslušící trajektoriím vytvořeným středy křivosti a a b křivek se pohybujících. Můžeme tudíž užiti s výhodou konstrukce Bobillierovy ku sestrojení středů křivosti každé při tomto pohybu vzniklé trajektorie a křivky obalové.

V tomto případu obsažen jest případ předcházející (článek 6.) jakož i všechny takové zvláštní případy pohybu neproměnného útvaru rovinného, které obdržíme, když křivky A, B, K a L nahradíme přímkami nebo body. Jest zřejmo, že z těchto případů jsou vyloučeny ony, kdy křivky A a K nebo B a L současně přímkami a body jsou, jelikož jest v těchto případech pohyb vůbec aneb obecně nemožný.

Dá se dokázati, že takových možných případů pohybu neproměnného útvaru rovinného jest 28, v nichž jsou zahrnuty ony dva již uvedené případy.

Z těchto případů uvedeme jen některé, vedoucí nás ku známým trajektoriím neb křivkám obalovým, jichž středy křivosti budeme sestrojovati.

---

*) *Bobillier*: Cours de géometrie str. 232.

11

8. Vytvořují-li dva body a a b roviny A přímé dráhy, pak vytvořuje každý jiný bod o této roviny *křivku elliptickou.**) Abychom sestrojili střed křivosti této křivky, použijeme křivky kruhové obratu V, která prochází okamžitým středem otáčení s (který sestrojíme jakožto průsečík normal N_a a N_b, vztýčených ku přímým trajektoriím bodů a a b v těchto bodech), a obsahuje oba body a a b jakožto body vytvořující dráhy nekonečně velikého poloměru (článek 3.)

Normala N_c cs ku elliptické křivce bodem c vytvořené protíná křivku kruhovou V v bodě v. Na základě bodů c, s, v sestrojíme některou konstrukcí uvedenou ve článku 2. k bodu prvému bod sdružený ${}^1c$, jakožto střed křivosti této křivky elliptické.

Jedná-li se o střed křivosti křivky obalové O přímky P, určené body a a b, tu třeba jen k ní spustiti kolmici N s bodu s, kteráž protíná křivku V v bodu v'. Učiníme-li $\overline{s^1r} = - v'$ obdržíme bod ${}^1r$ jakožto střed křivosti křivky obalové O pro bod p, v němž kolmice N přímku P protíná (článek 4.)

9. Pohybuje-li se roviná A tak, že jistý její bod a vytvořuje určitou trajektorii a jistá přímka její P stále prochází určitým stálým bodem p roviny M, pak sestrojíme střed křivosti trajektorie vytvořené libovolným bodem c roviny A nejpohodlněji pomocí křivky kruhové vratu ${}^1R$.

Na přímce as, procházející okamžitým středem otáčení s (kterýž určíme jakožto průsečík normaly N_a, v bodu a ku trajektorii tohoto bodu vztýčené, s normálou N_p ku přímce P sestrojenou), sestrojíme ku daným sdruženým bodům a, ${}^1a$ (středu křivosti trajektorie bodu a pro tento bod) a bodu s bod čtvrtý ${}^1r$, použijíce k tomu konstrukce ve článku 2. uvedené. Proto vedeme bodem s přímku $su \parallel P$ a protneme ji přímkou p^1a v bodu u, kterým sestrojíme ku přímce P kolmici u^1r, protínající přímku as v hledaném bodě ${}^1r$.

Křivka kruhová, obsahující tento bod ${}^1r$, okamžitý střed otáčení s a bod p**) jest křivkou ${}^1R$, které můžeme užiti ku

*) Toto vytvoření křivky elliptické bylo již geometrům starého věku známo.

**) Tento bod p zastupuje křivku obalovou přímky P. Leže v ní jakožto její střed křivosti, jest tudíž bodem vratu, který se dle článku 4. nalezá na křivce kruhové vratu ${}^1R$.

sestrojení středu křivosti všech trajektorií a křivek obalových tohoto pohybu.

Konstrukce té užiti lze pro *konchoidy*, které povstávají, nalezá-li se bod tvořící na přímce P.

10. Je-li pohyb roviny A určen tak, že jisté dvě její přímky A a B dotýkají se stále dvou křivek K a L roviny stálé M, pak užijeme ku sestrojení středu křivosti trajektorie, vytvořené libovolným bodem roviny se pohybující A, opět kruhové křivky vratu ${}^1R$.

Křivka tato prochází okamžitým středem otáčení s, který si určíme jakožto průsečík normal N_k a N_l, vztýčených ku křivkám K a L v bodech k a l, v nichž se jich přímky A a B dotýkají. Mimo to prochází křivka ${}^1R$ oběma středy křivosti ${}^1r_k$ a ${}^1r_l$ křivek L a K jakožto křivek obalových přímek A a B (článek 4.)

Konstrukce té můžeme užiti ku sestrojení středu křivosti *křivek úpatních tečen a normal*, které povstávají průsečíkem přímek A a B, je-li úhel jejich pravý a jedna z křivek K a L nahrazena bodem.

11. K těmto případům pohybu nepromënného útvaru rovinného můžeme také připojiti *pohyb posuvný a torný*. Jelikož však můžeme, nahrazujíce pohyby tyto pohybem kotálení, snadno nalézti křivku se kotálející (A) a křivku řídící (K), použijeme v těchto dvou případech raději konstrukce Eulerovy (článek 1.).

V prvém z těchto případů posouvá-li se křivka A roviny A po křivce K, v rovině stálé M se nalézající, dotýkajíc se jí stále týmž bodem s, můžeme pohyb ten pokládati za pohyb kotálení, společné normaly N obou křivek v bodě s sestrojené, jakožto přímky roviny hybné A po evolutě E příslušné křivce K.

Použijeme-li v tomto případě vzorce, uvedeného ve článku 1. pro poloměr křivosti trochoid, obdržíme kladouce $R' = \infty$:

$$\frac{m}{\varrho} = 1 - \frac{\sin\varphi}{m} R,$$

ve kterém značí R poloměr křivosti evoluty E v bodě e, v němž se jí normala N dotýká.

Z tohoto vzorce plyne dále, že

$$\varrho = \frac{m^2}{\sin\varphi m - R}. \text{*)}$$

Taktéž v případě druhém, tře-li se křivka A, pohybující se roviny A, v daném bodu s křivky K roviny stálé M, možno pohyb ten pokládati za pohyb kotálení, tenkráte evoluty E křivky se troucí A po společné normale N obou křivek v bodě s sestrojené.

V tomto případě jest $R'' = \infty$ a použijeme-li téhož vzorce obdržíme, označíce s R poloměr křivosti evoluty E v bodě e, v němž se jí normala N dotýká, týž vztah jako nahoře

$$\frac{m}{\varrho} = 1 - \frac{\sin\varphi}{m} R,$$

z kterého pak také plyne, že

$$\varrho = \frac{m^2}{m - R\sin\varphi}.$$

Položíme-li za m označení N a za $m . \sin\varphi = N \sin\varphi$ označení y, obdržíme pro poloměr křivosti křivky torné vzorec

$$\varrho = \frac{N^3}{N^2 - Ry}. \text{**)}$$

Důkaz jisté věty z geometrie polohy.

Napsal

Josef Klobouček,

assistent při realné škole v Kr. Vinohradech.

„Úpatní body os plochy druhého stupně, jdoucích daným bodem, leží na křivce pátého stupně, která daným bodem trojnásob kolmo prochází.“

Větu tuto uvádí *Reye* ve své geometrii polohy***), avšak dů-

*) *Fr. Machovec: „Zobrazování tečen a středů křivosti křivek na základě nové methody“*, str. 108.

**) Tamtéž, str. 110.

***) Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. Theodor Reye, II., zweite, vermehrte Auflage. Neue Ausgabe 1882.