s nullovým bodem X_μ přímky m, pak se protnou obě spojnice ve středu svazku rovnicí (10) vyjádřeného. Protože však rovnice (10) jest totožná s rovnicí (4), náležejí body L_1, $\mathfrak{X}_\mu$ jedné křivce F, body L_2, X_μ druhé takové křivce; následkem čehož se skutečně přímky $(L_1\mathfrak{X}_\mu)$, (L_2X_μ) protínají v bodě U.

Jde-li o to sestrojiti asymptotu z, sestrojme body H a U, jak bylo navedeno a spojme je přímkou e; pak udává spojnice bodů N a (me), anebo bodů $\mathfrak{N}$ a (me) směr asymptoty; protneme-li přímku $(N\mathfrak{N})$ asymptotou u v bodě, jehož vzdálenost od $\mathfrak{N}$ přeneseme na tutéž přímku od bodu N, pak obdržíme jeden bod pro z, čímž tato asymptota též již určena jest.

Souřadnice $\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y}$ pro bod U vypočítáme z rovnic přímek $(L_1\mathfrak{X}_\mu)$, (L_2X_μ); majíť hodnoty

$$\mathfrak{X} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1 - y_2},$$
$$(11) \qquad \mathfrak{Y} = \frac{y_1y_2J}{y_1-y_2}.$$

(Pokračování.)

Casparyho nové věty z geometrie trojúhelníka.

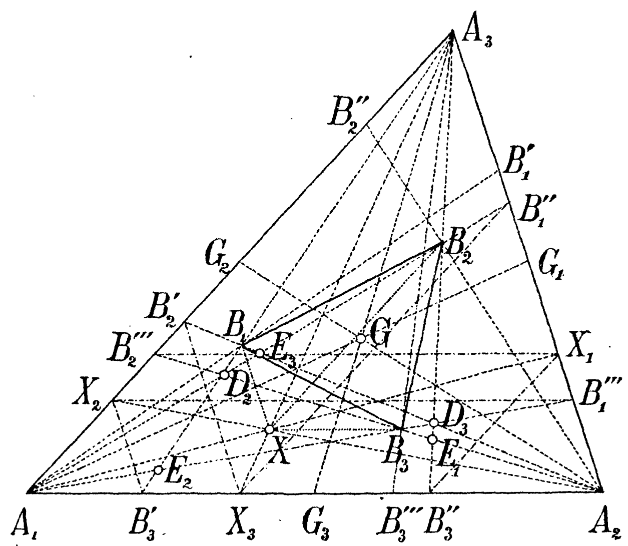
Dokazuje

A. Libický,
professor na Král. Vinohradech.

(Pokračování.)

3. Abychom nyní poznali a odůvodnili věty Casparyho, sestrojme především tento obrazec: Bodem $X(x_1, x_2, x_3)$ (obr. 3.) veďme tři příčky k vrcholům trojúhelníka základního A_1X, A_2X, A_3X; první z nich seče protější stranu A_2A_3 tohoto trojúhelníka v bodě X_1, druhá stranu A_3A_1 v bodě X_2 a třetí stranu A_1A_2 v bodě X_3. Bodem X_1 sestrojme pak dvě rovnoběžky, jednu ke straně A_3A_1, druhou k A_1A_2; podobně bodem X_2 veďme rovnoběžky ke stranám A_2A_3, A_1A_2 a bodem X_3 rovnoběžky k A_2A_3 a A_3A_1. Tím obdržíme na stranách trojúhelníka $A_1A_2A_3$ nových šest bodů; dva z nich, ležící na straně

$A_2 A_3$, poznamenáme B''_1 a B'''_1, kde dolejší index značí stranu (první: $A_2 A_3$), na níž body ty jsou položeny, hořejší indexy značí strany (druhou: $A_3 A_1$ a třetí: $A_1 A_2$), ku kterým jsou přímky, končící v těchto bodech, rovnoběžny. Podobně body, jež leží na straně $A_3 A_1$, označíme B'''_2, B'_2; body na straně $A_1 A_2$ pak B'_3, B''_3.



Obr. 3.

Poněvadž jest $X_3 B''_1 \parallel A_1 B_3$, platí úměra

$$A_2 B''_1 : B''_1 A_3 = A_2 X_3 : X_3 A_1 ;$$

ale dle obr. 1. jest

$$A_2 X_3 : X_3 A_1 = x_1 : x_2 ,$$

tudíž též

$$A_2 B''_1 : B''_1 A_3 = x_1 : x_2 .$$

Týmž způsobem ustanovíme

$$\begin{aligned} A_2 B'''_1 : B'''_1 A_3 &= x_3 : x_1 , \\ A_3 B'_2 : B'_2 A_1 &= x_1 : x_2 , \\ A_3 B'''_2 : B'''_2 A_1 &= x_2 : x_3 , \\ A_1 B'_3 : B'_3 A_2 &= x_3 : x_1 , \\ A_1 B''_3 : B''_3 A_2 &= x_2 : x_3 . \end{aligned} \tag{6}$$

Spojíme-li body B''_1, B'''_1 s protějším vrcholem A_1, body B'''_2, B'_2 s vrcholem A_2 a body B'_3, B''_3 s vrcholem A_3, obdržíme šest příček, jež se navzájem protínají v osmi bodech. Očekávali bychom vlastně, že těchto bodů bude dvanáct, avšak přesvědčíme se snadno, že tři ze sestrojených příček procházejí jedním bodem a jiné tři též jedním bodem. Jsou to jednak příčky $A_1 B''_1$, $A_2 B'''_2$ a $A_3 B'_3$, jednak příčky $A_1 B'''_1$, $A_2 B'_2$ a $A_3 B''_3$. Důkaz provedeme pomocí věty *de Cévy*. Jestiť dle (6) poměr vzdáleností bodu B''_1 od vrcholů A_2 a A_3 roven $\frac{x_1}{x_2}$, poměr bodu B'''_2 vzhledem k A_3 a A_1 roven $\frac{x_2}{x_3}$, poměr bodu B'_3 vzhledem k A_1 a A_2 roven $\frac{x_3}{x_1}$; součin těchto poměrů rovná se 1, tudíž $A_1 B''_1$, $A_2 B'''_2$ a $A_3 B'_3$ procházejí jedním bodem D_2. Týmž způsobem dokážeme, že též příčky $A_1 B'''_1$, $A_2 B'_2$ a $A_3 B''_3$ mají jeden bod D_3 společný, neboť tu opět

$$\frac{x_3}{x_1}\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3} = 1.$$

Barycentrické souřadnice bodů D_2 a D_3 vypočteme pomocí úměr (3). Pro první z těchto bodů jest totiž poměr $A_2 B''_1 : B''_1 A_3$ (jehož hodnota tam byla označena $p_2 : p_3$) roven $x_1 : x_2$ a poměr $A_3 B'''_2 : B'''_2 A_1$ (tam označený $q_3 : q_1$) roven $x_2 : x_3$; tudíž barycentrické souřadnice bodu D_2 jsou dle (3 *a*) dány poměrem

$$x_1 x_2 : x_2 x_3 : x_1 x_3 \quad \text{aneb} \quad \frac{1}{x_3} : \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2}.$$

Rovnice tohoto bodu jest pak

$$(7a) \qquad dD_2 = \frac{1}{x_3} A_1 + \frac{1}{x_1} A_2 + \frac{1}{x_2} A_3 \qquad \left(d = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right).$$

Podobným způsobem ustanovíme rovnici bodu D_3, totiž

$$(7b) \qquad dD_3 = \frac{1}{x_2} A_1 + \frac{1}{x_3} A_2 + \frac{1}{x_1} A_3.$$

Z těchto rovnic jde, že *body D_2 a D_3 jsou body brocard-*

ské bodu X. Známé sestrojení brocardských bodů k danému bodu X lze odvoditi bezprostředně z obrazce.

Z výše vytčených osmi bodů zbývá jich ještě šest, jež rozdělíme ve dvě skupiny po třech. V první skupině jsou body:

B_1, totiž průsečík příček $A_2 B'_2$ a $A_3 B'_3$,
B_2, " " " $A_3 B''_3$ a $A_1 B''_1$,
B_3, " " " $A_1 B'''_1$ a $A_2 B'''_2$.

Souřadnice těchto bodů určíme opět na základě úměr (3); tak na př. pro bod $B_1(b_1, b_2, b_3)$ užijeme hodnot poměrů $A_3 B'_2 : B'_2 A_1$ a $A_1 B'_3 : B'_3 A_2$, jež se dle (6) rovnají $x_1 : x_2$ (místo $q_3 : q_1$) a $x_3 : x_1$ (místo $r_1 : r_2$). Úměra (3 b) se tím změní ve

$$b_1 : b_2 : b_3 = x_1 : x_3 : x_2,$$

a rovnice bodu B_1 jest

$$xB_1 = x_1 A_1 + x_3 A_2 + x_2 A_3 \qquad (x_1 + x_2 + x_3 = x).$$

Podobně nalezneme

$$\begin{aligned} xB_2 &= x_3 A_1 + x_2 A_2 + x_1 A_3, \\ xB_3 &= x_2 A_1 + x_1 A_2 + x_3 A_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Body B_1, B_2 a B_3 jsou tudíž isobarickými body druhého druhu vzhledem k bodu X.

Sestrojení jejich vysvítá opět bezprostředně z obrazce. Sečtením tří rovnic (8) vychází

$$B_1 + B_2 + B_3 = A_1 + A_2 + A_3,$$

t. j. *trojúhelníky $A_1 A_2 A_3$ a $B_1 B_2 B_3$ mají týž střed hmotný G.*

Je-li bod X ve zvláštním případě bodem Lemoine-ovým, jest trojúhelník $B_1 B_2 B_3$ dle známé definice *první trojúhelník Brocardův*; vrcholy jeho jsou průměty bodu Lemoine-ova na osy souměrnosti stran trojúhelníka $A_1 A_2 A_3$.

Konečně nám zbývají z původních osmi bodů ještě tři, totiž:

průsečík E_1 příček $A_2 B'''_2$ a $A_3 B''_3$,
" E_2 " $A_3 B'_3$ a $A_1 B'''_1$,
" E_3 " $A_1 B''_1$ a $A_2 B'_2$.

K určení jejich rovnic použijeme opět úměr (3); tak pro bod $E_1(e'_1, e'_2, e'_3)$ máme dle (6)

$$A_3 B'''_2 : B'''_2 A_1 = x_2 : x_3 \quad \text{a} \quad A_1 B''_3 : B''_3 A_2 = x_2 : x_3 .$$

Tudíž platí dle (3 *b*)

$$e'_1 : e'_2 : e'_3 = x_2 x_3 : x_2^2 : x_3^2 ,$$

a rovnice bodu E_1 jest

$$e' E_1 = x_2 x_3 A_1 + x_2^2 A_2 + x_3^2 A_3 \qquad (e' = x_2 x_3 + x_2^2 + x_3^2),$$

a podobně

$$(8\,a) \quad \begin{aligned} e'' E_2 &= x_1^2 A_1 + x_3 x_1 A_2 + x_3^2 A_3 \qquad (e'' = x_1^2 + x_3 x_1 + x_3^2), \\ e''' E_3 &= x_1^2 A_1 + x_2^2 A_2 + x_1 x_2 A_3 \qquad (e''' = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2). \end{aligned}$$

4. Body B_1, B_2, B_3 vznikly průsekem vždy dvou příček, naznačeným způsobem vedených; spojme každý z těchto bodů s tím vrcholem trojúhelníka základního, s nímž ještě spojen není. Tím obdržíme na stranách $\triangle A_1 A_2 A_3$ tři nové body, a to: bod B'_1 (obr. 3.), v němž příčka $A_1 B_1$ seče stranu $A_2 A_3$; bod B''_2, v němž příčka $A_2 B_2$ seče stranu $A_3 A_1$; bod B'''_3, v němž se stýká příčka $A_3 B_3$ se stranou $A_1 A_2$. Poměry těchto bodů vzhledem k příslušným vrcholům trojúhelníka základního ustanovíme snadno ze známých souřadnic bodů $B_1(x_1, x_3, x_2)$, $B_2(x_3, x_2, x_1)$ a $B_3(x_2, x_1, x_3)$, přihlížejíce k hodnotám, vyznačeným v obr. 1. pro bod $X(x_1, x_2, x_3)$; i bude

$$(9) \quad \begin{aligned} A_2 B'_1 : B'_1 A_3 &= x_2 : x_3 , \\ A_3 B''_2 : B''_2 A_1 &= x_3 : x_1 , \\ A_1 B'''_3 : B'''_3 A_2 &= x_1 : x_2 . \end{aligned}$$

Položíme-li tedy $A_2 A_3 = 1$, jest

$$A_2 B'_1 = \frac{x_2}{x_2 + x_3}, \quad B'_1 A_3 = \frac{x_3}{x_2 + x_3};$$

srovnáme-li tyto výrazy s výrazy pro $A_3 X_1$ a $X_1 A_2$ ve (2 *a*), nalezneme, že

$$A_2 B'_1 = X_1 A_3 , \qquad A_3 B'_1 = X_1 A_2 ,$$

a podobně

$$A_3 B''_2 = X_2 A_1, \quad A_1 B''_2 = X_2 A_3,$$
$$A_1 B'''_3 = X_3 A_2, \quad A_2 B'''_3 = X_3 A_1.$$

Můžeme tedy sestrojiti na př. bod B'_1 kratčeji též takto: vnesme úsečku $A_2 X_1$ od bodu A_3 na stranu $A_2 A_3$ ve směru protivném, koncový bod takto přenesené úsečky jest hledaný bod B'_1.

Z těchto rovnic plyne: Je-li bod G_1 středem strany $A_2 A_3$, jest též středem úsečky $X_1 B'_1$; podobně jest střed G_2 strany $A_3 A_1$ středem úsečky $B''_2 X_2$ a střed G_3 strany $A_1 A_2$ středem úsečky $X_3 B'''_3$.

Dále poznáváme, majíce zřetel k obr. 1., že jako

$$A_1 X : XX_1 = (x_2 + x_3) : x_1,$$

také

$$A_1 B_1 : B_1 B'_1 = (x_2 + x_3) : x_1,$$

neboť body X a B_1 mají souřadnici x_1 společnou a souřadnice x_2 a x_3 navzájem vyměněné. Jest tedy

$$A_1 X : XX_1 = A_1 B_1 : B_1 B'_1,$$

z čehož jde, že jest

$$XB_1 \parallel A_2 A_3,$$

a podobně

$$XB_2 \parallel A_3 A_1, \quad XB_3 \parallel A_1 A_2.$$

Z této zvláštní polohy úseček XB_1, XB_2 a XB_3 ke stranám trojúhelníka základního následuje, že se úsečka XB_1 rozpoluje průsečíkem jejím s medianou $A_1 G_1$ právě tak, jako se úsečka $X_1 B'_1$ rozpoluje bodem G_1. Podobně mediana $A_2 G_2$ rozpoluje úsečku XB_2 a mediana $A_3 G_3$ úsečku XB_3.

Příčky $A_1 B'_1$, $A_2 B''_2$, a $A_3 B'''_3$ protínají se v jediném bodě D_1 (obr. 4.). Jest totiž dle (9) součin poměrů bodů B'_1, B''_2, B'''_3 vzhledem k příslušným vrcholům základním, totiž $\frac{x_2}{x_3} \frac{x_3}{x_1} \frac{x_1}{x_2}$, roven 1. Souřadnice tohoto bodu d'_1, d'_2, d'_3 určíme opět pomocí úměr (3); poněvadž jest

$$A_2 B'_1 : B'_1 A_3 = x_2 : x_3 \quad \text{a} \quad A_3 B''_2 : B''_2 A_1 = x_3 : x_1,$$

jest dle (3 *a*)

$$d_1 : d_2 : d_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}$$

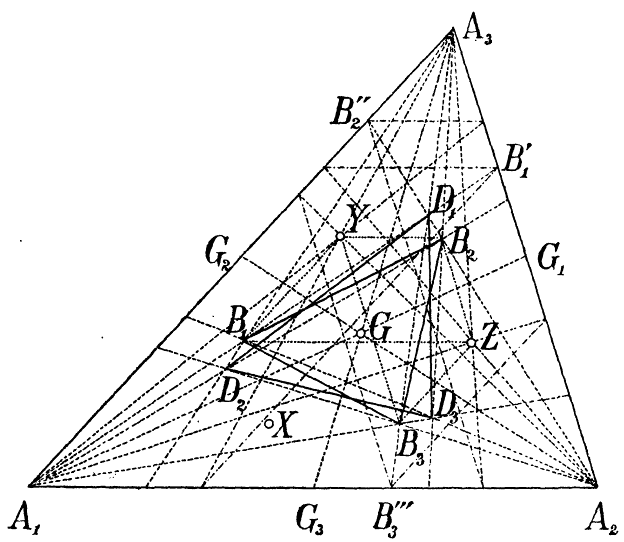
a rovnice bodu D_1

$$dD_1 = \frac{1}{x_1} A_1 + \frac{1}{x_2} A_2 + \frac{1}{x_3} A_3, \tag{7 c}$$

kdež jako výše

$$d = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

Bod D_1 jest tedy bodem reciprokým (stupně nulltého) k bodu X.



Obr. 4.

Budiž zde připojeno, že trojúhelník $B_1 B_2 B_3$ jest ve zvláštním vztahu k $\triangle A_1 A_2 A_3$. *Oba tyto trojúhelníky jsou totiž trojnásobně homologickými*; jedním středem homologie jest bod D_1, neboť se v něm sekou přímky $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ a $A_3 B_3$; druhým středem jest bod D_2, neboť ten jest průsečík přímek $A_1 B_2$, $A_2 B_3$ a $A_3 B_1$ a třetím středem jest bod D_3, průsečík přímek $A_1 B_3$, $A_2 B_1$ a $A_3 B_2$.

Podobně jsou trojnásobně homologickými trojúhelníky $D_1 D_2 D_3$ a $A_1 A_2 A_3$ (středy homologie jsou body B_1, B_2, B_3)

jakož i trojúhelníky $B_1 B_2 B_3$ a $D_1 D_2 D_3$ (středy homologie jsou body A_1, A_2, A_3).

Body D_1, D_2 a D_3 jsou vrcholy trojúhelníka, jehož střed hmotný jest bod G, střed hmotný trojúhelníků $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$, jak se snadno přesvědčíme sečtením rovnic (7 *a*), (7 *b*) a (7 *c*).

Z bodu D_1 odvodíme dva nové body Y a Z týmž způsobem, kterým jsme z bodu X odvodili body D_3 a D_2. Jako jsme totiž body X_1, X_2 a X_3 vedli rovnoběžky k těm stranám základního trojúhelníka, na nichž body ty neleží, a spojili koncové body těchto rovnoběžek s protějšími vrcholy základními, načež průsekem příslušných příček takto sestrojených vznikly body D_3 a D_2, tak obdržíme body Y a Z touž konstrukcí, berouce za základ místo bodů X_1, X_2, X_3 body B'_1, B'_2, B'_3. Body Y a Z musí tedy býti brocardskými body k bodu $D_1\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right)$ právě tak, jako jsou body $D_3\left(\frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_1}\right)$ a $D_2\left(\frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right)$ brocardskými body k bodu $X(x_1, x_2, x_3)$. Můžeme tedy rovnice jejich psáti bezprostředně, totiž

$$\begin{aligned} xY &= x_2 A_1 + x_3 A_2 + x_1 A_3, \\ xZ &= x_3 A_1 + x_1 A_2 + x_2 A_3, \end{aligned} \tag{10}$$

Body Y a Z jsou tedy isobarické body prvního druhu vzhledem k bodu X.

Snadno dokážeme věty:

Trojúhelník XYZ má společný střed hmotný G s trojúhelníkem $A_1 A_2 A_3$.

Jako spojnice bodu X s body B_1, B_2, B_3 jsou navzájem rovnoběžny se stranami trojúhelníka základního, jest též

$$YB_1 \parallel A_3 A_1, \quad YB_2 \parallel A_1 A_2, \quad YB_3 \parallel A_2 A_3,$$

a

$$ZB_1 \parallel A_1 A_2, \quad ZB_2 \parallel A_2 A_3, \quad ZB_3 \parallel A_3 A_1.$$

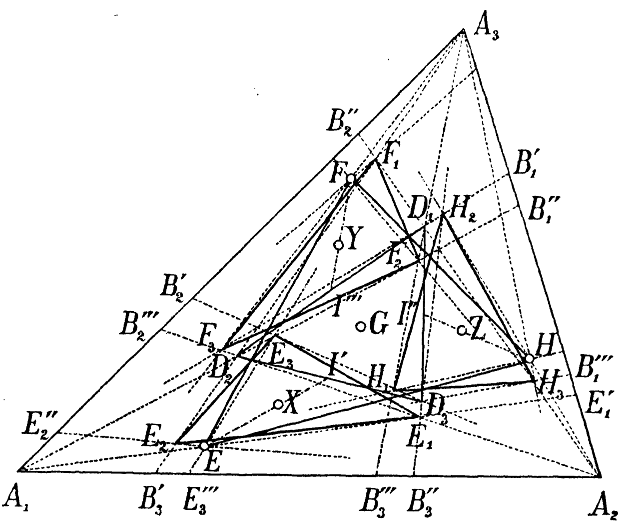
5. Z bodů B_1, B_2, B_3 odvodili jsme vedením příček $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ bod D_1; podobným způsobem obdržíme nový bod E, sestrojíme-li příčky procházející body E_1, E_2, E_3, jež ještě body těmi vedeny nejsou. Jsou to příčky $A_1 E_1$, $A_2 E_2$, $A_3 E_3$ (obr. 5.); z těch první stanoví na straně $A_2 A_3$ bod E'_1, druhá na straně $A_3 A_1$ bod E''_2 a třetí na straně $A_1 A_2$ bod E'''_3.

Přihlížejíce k souřadnicím bodu E_1 $(x_2 x_3, x_2^2, x_3^2)$ (8 a), určíme dle (2) poměr bodu E'_1 vzhledem k bodům A_2 a A_3, totiž

$$A_2 E'_1 : E'_1 A_3 = x_3^2 : x_2^2,$$

a podobně

$$A_3 E''_2 : E''_2 A_1 = x_1^2 : x_3^2,$$
$$A_1 E'''_3 : E'''_3 A_2 = x_2^2 : x_1^2.$$



Obr. 5.

Poněvadž součin těchto poměrů $= 1$, protínají se příčky $A_1 E'_1$, $A_2 E''_2$, $A_3 E'''_3$ v jediném bodě E. Rovnici jeho můžeme psáti bezprostředně, jestiť

$$(11\,a) \qquad eE = x_1^2 A_1 + x_2^2 A_2 + x_3^2 A \qquad (e = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Je-li bod X ve zvláštním případu středem kružnice vepsané $(x_1 : x_2 : x_3 = a_1 : a_2 : a_3)$, jest bod E bodem Lemoine-ovým.

K tomuto bodu E připojuji ještě dva další body F a H. Tím, že jsme sestrojili příčky $A_1 B'_1$, $A_2 B''_2$, $A_3 B'''_3$, vznikly totiž nové body na příčkách již vedených k bodům B'_2, B'_3, B''_3, B''_1, B'''_1, B'''_2. Rozvrhneme je ve dvě skupiny po třech; v první skupině jsou:

průsečík F_1 příček $A_3 B'_3$ a $A_2 B''_2$,
" F_2 " $A_1 B''_1$ a $A_3 B'''_3$,
" F_3 " $A_2 B'''_2$ a $A_1 B'_1$.

Způsobem již několikrát uvedeným určíme dle (3) souřadnice těchto bodů; i obdržíme

$$
\begin{aligned}
& f_1 F_1 = x_1 x_3 A_1 + x_3^2 A_2 + x_1^2 A_3, \\
(8\,b) \qquad & f_2 F_2 = x_2^2 A_1 + x_2 x_1 A_2 + x_1^2 A_3, \\
& f_3 F_3 = x_2^2 A_1 + x_3^2 A_2 + x_3 x_2 A_3.
\end{aligned}
$$

Z těchto bodů sestrojíme bod F, společný průsečík příček $A_1 F_1$, $A_2 F_2$, $A_3 F_3$, jak snadno dokážeme pomocí věty de Cevy. Rovnice toho bodu jest

$$(11\,b) \quad eF = x_2^2 A_1 + x_3^2 A_2 + x_1^2 A_3 \qquad (e = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Druhou skupinu z vytčených bodů tvoří:

průsečík H_1 příček $A_2 B'_2$ a $A_3 B'''_3$,
" H_2 " $A_3 B''_3$ a $A_1 B'_1$,
" H_3 " $A_1 B'''_1$ a $A_2 B''_2$.

Rovnice těchto bodů jsou:

$$
\begin{aligned}
& h_1 H_1 = x_1 x_2 A_1 + x_1^2 A_2 + x_2^2 A_3, \\
(8\,c) \qquad & h_2 H_2 = x_3^2 A_1 + x_2 x_3 A_2 + x_2^2 A_3, \\
& h_3 H_3 = x_3^2 A_1 + x_1^2 A_2 + x_3 x_1 A_3;
\end{aligned}
$$

průsečík H příček $A_1 H_1$, $A_2 H_2$, $A_3 H_3$ má rovnici

$$(11\,c) \quad eH = x_3^2 A_1 + x_1^2 A_2 + x_2^2 A_3 \qquad (e = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Z rovnic (11 *a*), (11 *b*), (11 *c*) poznáváme, že body E, F, H tvoří skupinu isobarickou prvního stupně; $\triangle EFH$ má s trojúhelníkem $A_1 A_2 A_3$ týž střed hmotný G.

O bodu E uvádí Caspary větu: *Body E, X a střed I' úsečky $D_2 D_3$ leží v téže přímce.*

Abychom dokázali tuto větu, užijeme známé věty z Grassmannovy Ausdehnungslehre: „Jsou-li tři body A, B, C ve vztahu číselném, t. j. platí-li o nich rovnice

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$

kde α, β, γ značí číselné koefficienty, jež vyhovují podmínce $\alpha+\beta+\gamma=0$, leží body ty na jedné přímce.“ *)

Rovnice středu I' úsečky $D_2 D_3$ jest

$$2I'=D_2+D_3;$$

klademe-li tu za D_2 a D_3 hodnoty (7 *a*) a (7 *b*) a upravíme-li, obdržíme

$$2(x_1 x_2+x_2 x_3+x_3 x_1)I'$$
$$=x_1(x_2+x_3)A_1+x_2(x_3+x_1)A_2+x_3(x_1+x_2)A_3;$$

rovnice bodu X a E jsou pak

$$(x_1+x_2+x_3)X=x_1 A_1+x_2 A_2+x_3 A_3,$$
$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)E=x_1^2 A_1+x_2^2 A_2+x_3^2 A_3.$$

Násobíme-li prostřední z těchto tří rovnic výrazem $-(x_1+x_2+x_3)$ a sečteme-li všechny, dostaneme

$$2(x_1 x_2+x_2 x_3+x_3 x_1)I'-(x_1+x_2+x_3)^2 X$$
$$+(x_1^2+x_2^2+x_3^2)E=0,$$

t. j. dle uvedené věty Grassmannovy leží body I', X a E v jedné přímce.

Týmž způsobem dokážeme, že body Y, F a střed I'' úsečky $D_1 D_2$ leží v jedné přímce a že podobnou zvláštní polohu mají body Z, H a střed I''' úsečky $D_3 D_1$.

(Pokračování.)

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati.

Napsal

Arnošt Dittrich v Praze.

(Pokračování.)

Měl-li ν-tý bod soustavy souřadnice x_ν, y_ν, z_ν, rychlosti x'_ν, y'_ν, z'_ν a přejde-li během doby t do polohy $\overline{x_\nu}$, $\overline{y_\nu}$, $\overline{z_\nu}$, v níž má rychlosti $\overline{x'_\nu}$, $\overline{y'_\nu}$, $\overline{z'_\nu}$, lze říci, že stav x_ν, y_ν, z_ν, x'_ν, y'_ν, z'_ν přešel ve stav $\overline{x_\nu}, \overline{y_\nu}, \ldots, \overline{z'_\nu}$. Stav soustavy určen souhrnem $6n$

---

*) Základové geometrického počtu Grassmannova, roč. XXV. pag. 267.