Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vojtěch

Theorie geometrických konstrukcí. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 2, 161--173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121592

V míře úhlové jest

$$\psi = 15^0 . \sin \varphi.$$

Poznámka. *Na polu* plášť kužele přechází *v kruhový kotouč*, a obzor pod ním se otáčí a to na *severním polu* směrem *kladným*, na *jižním* pak směrem *záporným*; v obojím případě s úhlovou rychlostí 15^0 za hodinu.

Za to zdánlivě orientační přímka na *severním polu* se otáčí směrem *záporným*, na *jižním* směrem *kladným*, sledujíc na obou polech běh pásu Orionova! Rovina kyvu neustále směřuje k pásu Orionově, bylo-li kyvadlo směrem tím vychýleno. Vertikála obzoru na polu se neviklá; odpadáť tam pohyb valný I.

Na rovníku orientační přímka, spojujíc oko s polárkou P, *nemění své polohy*. Rovina kyvu neustále směřuje k polárce, bylo-li kyvadlo směrem tím vychýleno. Plášť kužele v tomto zvláštním případě přechází *v přímku* OP.

Odpadá zde opět pohyb otáčivý II.; za to však vertikála obzoru se otáčí, opisujíc kruh rovníkový.

Theorie geometrických konstrukcí.

Napsal

Jan Vojtěch v Praze.

I. O elementárních konstrukcích geometrických.

1. *Theorií geometrických konstrukcí* rozumí se obyčejně podati methody, kterými se řeší geometrické úlohy konstruktivní (strojné). Při tom pojímá se geometrická úloha ve smyslu užším, totiž jako *elementární* geometrická úloha. Jsou to ony geometrické úkoly, jichž konstrukce lze *přesně* provésti *pravítkem a kružítkem.*

Taková theorie zde stručně bude podána na prvním místě. V dalším zhostíme se do jisté míry uvedených omezení a přihlédneme pak ještě k jiným otázkám, které se v tomto oboru naskytují.

2. Jest záhodno uvésti si na mysl zmíněná obvyklá omezení. Jak rozhodneme, zda předložená úloha jest elementární? Někdy činí se rozdíl mezi elementárními konstrukcemi 1. a 2. stupně: geometrickou konstrukcí prvního stupně míní se taková, k jejímuž provedení stačí strojení přímek, kdežto konstrukce složená z přímek a oblouků kruhových nazývá se konstrukcí druhého stupně. Rozlišení toto, činěné na základě pomůcek, není vhodné. Vzniká tu obecnější otázka: Jak určíme vůbec stupeň dané úlohy geometrické, jejíž řešení ovšem ještě neznáme? Při úlohách geometrie polohy můžeme obecně říci, že úkol, jenž připouští n řešení, jest stupně n-tého. Jde-li však o úkoly geometrie míry, o které se nám zde hlavně jedná, jest nesnadno odpověděti na tuto otázku cestou geometrickou. Snáze přijdeme při mnohých úlohách k cíli cestou početní. Položme si užší otázku: *Jak lze dokázati, že daná úloha není elementární?* Soudíme takto: Každá provedená konstrukce geometrická 2. stupně (konstrukce 1. stupně lze sem zahrnouti jako zvláštní případ) sestává z přímek a oblouků kruhových; sledujeme-li sestrojení počtem (po způsobu analytické geometrie), jest nám řešiti pouze linearní a kvadratické rovnice, nikdy však rovnice, jež by nebylo lze převésti na kvadratické. Odtud činíme závěr: Přijdeme-li při početním řešení úlohy geometrické na nesvodné rovnice vyššího stupně než druhého, jest tím již dokázáno, že úloha ta není elementární. Tak odpovídá na otázku na př. A. Adler,[1]) a tím také zpravidla vystačíme.

Úplnější odpověď dává F. Klein.[2]) Vychází od základní věty: „Analytický výraz jest tehdy a jenom tehdy sestrojitelný kružítkem a pravítkem, dá-li se odvoditi ze známých veličin konečným počtem racionálních výkonů a druhých odmocnin.“ Chceme-li ukázati, že jistá veličina není konstruovatelna pravítkem a kružítkem, jest nám dokázati, že rovnice, kterou lze problém vyjádřiti, není řešitelna druhými odmocninami v konečném počtu. Řešení jest tím spíše nemožno, neexistuje-li vůbec žádná algebraická

[1]) *August Adler*, Zur Theorie der geometrischen Constructionen ve výroční zprávě něm. státní reálky v Plzni, 1895.

[2]) Dr. *Felix Klein*, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, Lipsko, Teubner, 1895.

rovnice. Cestou elementární, velmi pěknou a srozumitelnou, dokazuje pak přesně, že stupeň nesvodné rovnice, které hoví výraz sestavený z druhých odmocnin, jest vždy mocnina čísla 2. I dedukuje: Není-li nesvodná rovnice stupně 2^h (kde h je číslo celistvé a kladné), není jistě řešitelna druhými odmocninami. Nemožnost konstrukce pravítkem a kružítkem je tedy dokázána, shledáme-li, že rovnice, která problém vyjadřuje, je nesvodná a není stupně 2^h. Potud uvedený autor. Dlužno však připomenouti, že nelze větu obrátiti a říci, že kořeny každé nesvodné rovnice stupně 2^h možno sestrojiti našimi prostředky. Pravítkem a kružítkem lze dle toho sestrojiti kořeny jistých nesvodných rovnic stupně 2^h, dále kořeny oněch svodných rovnic jiných stupňů, jež se dají rozložiti v rovnice uvedeného typu. — Jak vidíme, neodpovídá pojem geometrické konstrukce 2. stupně pojmu algebraické rovnice 2. stupně. Stejně nelze vždy pouhým pravítkem sestrojiti kořeny lineárních rovnic. —

3. Co se týká *výhradních pomůcek našich,* pravítka a kružítka, nutno uvésti jejich rovnoprávnost. Některé úlohy dovedli bychom řešiti konstruktivně bez užití kružítka; k tomu a pod. však prozatím nebudeme přihlížeti. — Pravítkem rozumíme přístroj, pomocí kterého lze kresliti přímky pouhým tahem podél jeho hrany; musí býti vytčeno, že dovoleno je užívati jen jedné hrany a nikoli zároveň druhé ke strojení rovnoběžek. Kružítko ovšem lze dle libosti rozevírati.

4. Konečně stojí v definici elementární úlohy konstruktivní, že konstrukce má býti *přesná.* Pravíme, že úloha je řešena přesně, je-li jisto, že bychom udaným sestrojením obdrželi výsledek dokonale přesný, kdyby pomůcky, jichž užíváme, byly ideálně dokonalé, a není-li mimo to potřebí nekonečného počtu operací. To je ovšem přesnost v theorii. V praksi může úloha theoreticky přibližně řešená býti přesněji sestrojena než úloha řešená v theorii přesně. Neboť k provedení konstrukce, která je theoreticky přesná, jest někdy třeba mnoho výkonů přístroji, které ovšem nejsou nikdy absolutně dokonalé, nehledě k tomu, že jimi dokonale nedovedeme pracovati; tím vnáší se do skutečné konstrukce více chyb, než v případě přibližného sestrojení, kdy hned z počátku nějakou chybu připustíme, ale kde jsme s konstrukcí brzo hotovi.

5. *Geometrické úlohy konstruktivní* ve smyslu vyloženém zaujímají v učebnicích elementární geometrie buď zvláštní kapitolu nebo po různu nějaké místo. Bývají také někdy předmětem větší pozornosti na středních školách. A to právem: neboť bystří schopnost pozorovati a kombinovati více ještě než jiné kapitoly mathematického učiva a vedou k jasnému i logickému myšlení. Mimo to poutají u vysokém stupni toho, kdo na nich zkouší svůj důvtip a um. —

Řešení takových úloh bylo oblíbeno už u starých; algebra nebyla vyvinuta, i vedeni byli Egypťané, Řekové a jiní geometrickými svými úvahami také k řešení strojných úloh. Od těch dob stále jistá pozornost se úlohám těm věnuje.

Sbírky geometrických úloh konstruktivních[3]) jsou velmi četné, nehledě k tomu, že v mnohé učebné knize geometrie bývá jich uveden též slušný počet ku cvičení. Vedle toho v každém časopise mathematickém, který uveřejňuje úlohy k řešení, — a jest jich celá řada — est část úloh takových.[4]) O konstruktivní úkoly geometrické není tedy nouze. Mnohem méně jest však literatury, která by soustavně pojednávala o takových úlohách. V uvedených i neuvedených sbírkách, v učebnicích a j. jsou úlohy nanejvýš spořádány dle obvyklých kapitol (přímka, trojúhelník, kruh, . . .). V systém jsou řešení těchto úloh — ne ovšem všech — uvedena ve dvou knihách:

Julius Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung

---

[3]) Ze sbírek buďtež aspoň uvedeny:

Lieber-Lühmann, Geometrische Constructionsaufgaben (Berlín, L. Simion, 6. vyd., 1882),

Brockmann, Planimetrische Konstruktionsaufgaben (Lipsko,Teubner, 1889),

Brockmann, Materialien zu Dreiecksconstructionen nebst Anwendung auf fast 400 Aufgaben (tamtéž, 1888).

Ghersi, Metodi facili per risolvere i problemi di geometria elementare, Milán, Hoepli, 1900.

Jiné sbírky vydali Borth, Gandtner-Junghans, Heilerman, Reidt a j.

[4]) Také tyto z části sebrány, na př. *Laisant*, Recueil de problèmes de Mathématiques z 5 francouzských časopisů a sbírka úloh z 25 prvních ročníků *Hoffmannova* Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht.

geometrischer Constructionsaufgaben, angewandt auf etwa 400 Aufgaben;[5])

Ivan Alexandroff, Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution.[6])

Též menších pojednání o této věci je poskrovnu. Pokládajíť se dosud od mnohých takové úlohy za jistý druh hádanek; to jest ovšem mylné. Také řešení těchto úloh řídí se jistými pravidly; celé velké skupiny úloh možno řešiti na základě jedné myšlenky, jedním postupem. Abychom tyto základní myšlenky konstrukcí nalezli, musíme řešiti velký počet úloh nejrozmanitějších, vlastně by bylo záhodno řešiti všechny úlohy, a odtud pak vypozorovati jest nám methody, kterými se provádějí. Tak praví Petersen o vzniku své knihy: „Povstala na ten způsob, že jsem řešil velké množství úloh, z nichž mnohé jsou původní, největší část jich však vzata z mnohých existujících sbírek. Řešiv úlohu pokoušel jsem se nalézti ideu, jež vedla k řešení, a analysovati postup myšlenek, jenž vedl k této ideji, bych odtud vyňal více méně obecné methody." Jakož se děje při vývoji všech věd, tak i v této zcela nepatrné kapitole mathematiky od konkretních případů řešení postupujeme abstrakcí k obecným methodám, na jichž základě — při dostatečné úplnosti — dovedeme potom konkretní úlohy dokonale řešiti.

6. Majíce konstruovati útvar geometrický, známe-li některé z jeho elementů v dostatečném počtu, by úloha byla určitá, musíme takto postupovati:

a) Provésti konstrukci předběžnou, co možná přibližnou, — pokládajíce úlohu za řešenu — a hledati vztah mezi prvky danými a hledanými;

---

[5]) Původně vyšel spis dánsky: Methoder og theorier til Lösning af geometriske Konstructionsopgaver, anwendte paa ca 400 opgaver, Kjöbnhavn 1866, přeložen do němčiny Dr. v. *Fischer-Benzonem* 1879, též do frančiny a angličiny.

[6]) traduit du russe, sur la sixième édition par *D. Aitoff* (Paříž, Hermann, 1899). — Také v *Schlömilchově* Handbuch der Mathematik (Encyclopaedie der Naturwissenschaften, I. Abth., II. Th.) v 1. svazku, ve spracování Reidtově, str. 309—344. Menší a méně důležitý je spisek *Brockmannův*, Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstructionsaufgaben. (Lipsko, Teubner, 1889).

b) naleznouce tento vztah, provedeme sestrojení správné;

c) dokážeme, že sestrojení je exaktní;

d) diskutujeme úlohu.

Pokud se týče daných prvků útvaru, který máme sestrojiti, je nutno, by byly na sobě nezávislé. To jest základní požadavek. Neboť, aby úloha byla určitá, t. j. aby připouštěla jen konečný počet řešení, k tomu je nezbytno, aby byl dán přiměřený počet podmínek. Je-li jich dáno méně, je úloha neurčitá; tento případ nastává zvláště tehdy, když podmínky, udané třebas v počtu příslušném, nejsou vesměs nezávislé. Tu dovoluje úloha nekonečný počet konstrukcí. Úloha přeurčená je taková, kde útvaru hledanému ukládá se více podmínek na sobě nezávislých, než kolika může vyhověti. Zde konstrukce není možna; ovšem úloha jen zdánlivě přeurčená, kde přebytečná podmínka vyplývá z ostatních, dá se konstruovati tak jako každá jiná. Aby bylo jasno, oč jde, uvedeme příklad: K určenosti trojúhelníka stačí 3 podmínky nezávislé; to jsou ty dané prvky, na příklad 2 úhly a strana nebo strana, přilehlý úhel a příslušná k ní výška; nestačí však k určenosti 3 úhly, ježto třetí plyne z dvou ostatních dle věty o součtu úhlů vnitřních v trojúhelníku, nestačí strana, výška a plocha, protože plocha závisí na výšce a straně nelze sestrojiti trojúhelník, dána-li strana, výška a 2 úhly, toliko v případě, že tyto podmínky si neodporují čili jsou-li vzaty ze skutečného obrazce, je i zde konstrukce možna, ale 4. podmínka nepřijde vůbec k platnosti při sestrojení.

První krok, který jest nám učiniti, když máme řešiti konstruktivní úkol geometrický, jest, jak uvedeno, rozbor; v obrazci k vůli němu předběžně načrtnutém dbejme především toho, by dané prvky byly do něho uvedeny a v něm vyznačeny. Potom kombinujeme, srovnáváme, hledáme cestu, jak by byla možna konstrukce; zkoušíme, které ze známých method bylo by zde možno užiti. Tu jest jádro celé věci, rozbor je první a hlavní část našeho řešení. — Druhý krok je vlastní sestrojení, jež se opírá o rozbor a známosti při něm nabyté. — Třetí bod je důkaz správnosti sestrojení, který veden je často týmiž myšlenkami jako rozbor a sestrojení, jenomže sestavenými dle potřeby. — Konečně diskusse neb determinace problému zabývá se otázkou, jaký je počet řešení (počet konstrukcí) a jaké meze platí pro dané prvky, by konstrukce byla proveditelna.

7. Dříve než přikročíme k methodám konstrukcí geometrických a k typickým příkladům pro ně, bylo by snad záhodno uvésti *základní některé úkoly* a jich jednoduché konstrukce, prvky to, z nichž řešení úkolů geometrických se skládají. Nehledě k nejzákladnějším výkonům s pravítkem a kružítkem (jako: sestrojiti přímku libovolnou, přímku procházející jedním, dvěma body danými, sestrojiti kružnici daného středu poloměru libovolného, kružnici poloměru daného a p.) jsou fundamentální konstrukce ony uvedeny v každé učebnici měřictví pro první stupeň škol. Bylo by ovšem možno jimi se zabývati s tím zřetelem, jaká konstrukce je nejjednodušší, o čemž několik slov později. Zde aspoň výčet nejdůležitějších takových prvků: přenésti úsečku danou (= sestrojiti úsečku rovnou dané); přenésti úhel daný; sestrojiti úsečku, jež by byla tak dlouhá jako dvě dané úsečky dohromady (dle analogie algebry říkáme krátce: sestrojiti součet dvou úseček daných); sestrojiti rozdíl dvou daných úseček (obecně: sestrojiti úsečku $= a + b + c + \ldots \ldots - m - n - \ldots$); rozděliti danou úsečku na n nestejných dílů tak, aby tyto byly k sobě v poměru daných úseček $b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n$; rozpůliti danou úsečku; sečísti geometricky úhly dané; rozpůliti daný úhel; vztýčiti v daném bodě přímky kolmici k ní; spustiti z daného bodu kolmici na danou přímku; vésti rovnoběžku daným bodem k dané přímce; vésti rovnoběžku k dané přímce v dané vzdálenosti a pod.

Pokud se týče *zmethodisování* geometrických konstruktivních řešení, jest nutno jednu důležitou okolnost míti na mysli. Mnohé z konstrukcí, které dle některé methody se provádějí, jsou složitější a delší, než je snad možno řešiti týž úkol nezávisle, svou cestou. Je to starý úkaz a zkušenost: čím méně method, tím větší okliky musíme činiti při některých úkolech; co získáváme na soustavnosti, to jde na účet jednoduchosti a elegance některých řešení. Jasný doklad vidíme na geometrii Descartově; zde jedna methoda platí pro všechny úkoly a celou geometrii: bod určuje se vzdáleností od dvou os. Osy tyto často nemají s úlohou nic společného, vše se zde ovšem odívá v roucho algebraické, i přicházíme k rovnicím, kde ztrácíme někdy vědomí o geometrickém významu rovnic. Přečasto jsou výsledky tak komplikované, že je nelze prakticky provésti, to jest do geometrie zpět převésti konstrukcí. Byla snaha odpomoci této vadě, hledaly se speciální systémy souřadnic; řešení jednotlivých úloh stává se přirozenější a pěknější, ale obtíž se přenáší zase na volbu methody. Tak stále ty dvě věci se doplňují na konstantní součet: počet method a nepřirozenost konstrukcí.

8. Na prvním místě uvádíme *methodu geometrických míst* (méthode des lieux géométriques). Jest to methoda velmi často užívaná, při úkolech zcela jednoduchých i složitých. Podstata její spočívá asi v tomto. Z daných podmínek určujících úkol vynecháme-li jednu, dovoluje úloha nyní neurčitá nekonečný počet řešení, která všechna spolu souvisí, tvoříce dohromady nepřetržitý řetěz možných řešení. Každé z nich hoví daným podmínkám vyjímaje onu odstavenou. Jestliže podruhé podobně postupujeme, nepřihlížejíce k jinému některému z postavených dat, dojdeme k stejnému výsledku; z nekonečného počtu řešení vyhovuje každé. Protože pak mají býti splněny všechny podmínky bez výjimky, je patrno, že hledaná pravá řešení budou ona, která zároveň budou hověti prvému komplexu podmínek, kde schází jen jedna do celku, a která současně budou činiti zadost druhé skupině podmínek, v níž ona prve vynechaná také je obsažena.

Záleží nyní na tom, vhodnou volbou abstrahovati od té podmínky, bez které zbývající data určují tak zvané geometrické místo, a sice jde o to, aby toto bylo známé a vhodné. Geometrické místo je soustava bodů, z nichž každý hoví daným podmínkám, a sice tak, že žádný jiný mimo ně jim nehoví. K úspěšnému řešení geometrických úloh konstruktivních touto methodou je ovšem nutna znalost dostatečného počtu geometrických míst; nám hodí se zde jenom přímka a kružnice jako geometrické místo. Také průsek přímky s kuželosečkou obecnou (myslíme-li přímku i kuželosečku jako geometrická místa) lze sestrojiti našimi prostředky.

Bylo by na místě aspoň hlavní, často přicházející místa geometrická zde sestaviti: jsou však většinou známá a uvedeno jich v cit. systematických knihách 10—15, — tím by stručný tento přehled příliš se trhal.

Jako příklad na objasnění řešme úkol: *Sestrojiti jest trojúhelník, dána-li strana, protilehlý úhel a příslušná k straně výška* (a, A, v_a). — Konstrukce děje se na základě dvou geometrických míst: Geometrické místo bodů, majících od pevné přímky konstantní vzdálenost, jest *přímka* rovnoběžně v dotčené vzdálenosti k ní vedená. Geometrické místo vrcholů trojúhelníků s pevnou základnou a daným úhlem při vrcholu je *kružnice*, jejíž tětivou je ona základna a jejíž středovým úhlem příslušným k oné tětivě je dvojnásobný daný. — Řešení jsou možna 4 nebo 2 nebo žádné dle toho, je-li $v_a \lesseqgtr \frac{a}{2} \cot \frac{A}{2}$.

Jiné příklady: 1. Sestrojiti trojúhelník, dána-li strana, přilehlý úhel a příslušná k straně výška (a, B, v_a). Geometrická místa: přímka a přímka.

2. Sestrojiti trojúhelník, máme-li b, B, v_a. — Geometrická místa: půlkružnice nad b jako průměrem a oblouk kruhový; potom ještě kružnice a přímka. —

Methoda geometrických míst má velmi široké pole; sem patří většina obvyklých základních konstrukcí týkajících se bodu, přímky, trojúhelníka a kruhu. Tak na př. z geometrie kruhu dle této methody se provádějí fundamentální konstrukce:

1. Vésti tečnu k dané kružnici bodem mimo ni.
2. Vésti tečnu společnou dvěma daným kružnicím.
3. Nalézti bod takový, aby tečny vedené z něho ku třem kružnicím daným byly stejně dlouhé.

Všimněme si poslední důležité úlohy blíže:

Bod hledaný bude na chordále kružnic O_2 a O_3, rovněž na chordále kružnic O_1 a O_2, bude tedy v jich průsečíku. Bychom sestrojili hledaný bod, sestrojme 2 koncentrické kružnice, jež protnou dané tři kružnice. Prodlužme tři dvojice tětiv tak, aby vznikly dva trojúhelníky; tyto jsou podobné a podobně položené, střed podobnosti (průsek spojnic dvou a dvou příslušných vrcholů) je hledaný bod. — Problém nedává řešení (v užším smyslu), jsou-li chordály rovnoběžné neb neexistuje-li chordála. To nastane: 1. Když všechny tři středy kružnic jsou na jedné přímce a kružnice neprocházejí všechny jedním bodem. 2. Když dvě kružnice nebo všechny tři jsou koncentrické. — Stotožní-li se chordály, stane se úloha neurčitou. Případ ten nastane, protínají-li se dané tři kružnice ve dvou bodech nebo dotýkají-li se navzájem všechny kružnice v jediném bodě.

9. *Methoda založená na podobnosti obrazců* (méthode de similitude). Užíváme jí, obdržíme-li — když abstrahujeme od jedné z daných podmínek — systém podobných (a podobně položených) obrazců. Uveďme si na paměť pojmy, které se zde vyskytují.

Vedeme-li z libovolného bodu M přímku k libovolnému bodu A dané křivky (přímky, obrazce) K a rozdělíme-li ji bodem A' tak, by $\overline{MA'} : \overline{MA} = m : n$, pak je geometrickým místem bodů A' křivka (přímka, obrazec) K', dané podobná. Pravíme o křivkách těch, že jsou vůči sobě podobně položeny; jsou homothetické. M sluje středem podobnosti, přímky jdoucí bodem M paprsky podobnosti. Homologické body křivek (obrazců) jsou takové, které leží na témž paprsku podobnosti; obecněji (v případě, že obrazce nejsou homothetické, ale jsou přece podobné) jsou homologické body ony, které si v obou obrazcích odpovídají. Homologické přímky jsou ty, jež spojují homologické body; homologické úhly jsou stejné. Všechny homologické úsečky jsou v konstantním poměru $m : n$; poměr tento sluje poměrem podobnosti obou obrazců.

Dotčená methoda záleží v tom, že sestrojujeme na prvním místě obrazec neb jeho část, hledíce jen ku tvaru (dle daných podmínek); nesestrojujeme přímo hledaný obrazec, nýbrž obrazec jemu podobný. Ze soustavy podobných obrazců, z nichž jen jeden ovšem je skutečně sestrojen, vybéřeme ten, který hoví také podmínce, od níž jsme na počátku abstrahovali. Můžeme lišiti případy:

a) Jest dána jedna délka, mimo ni úhly a poměry. Abstrahujeme od dané délky a snažíme se sestrojiti obrazec daných úhlů, jenž by hověl daným poměrům. Konstruovaný obrazec je podobný hledanému, tento pak obdržíme zavedením vyloučené dříve délky.

Příklad: *Sestrojiti trojúhelník, dán-li jeden úhel, poměr stran jej svírajících a poloměr vepsaného kruhu.*

Provedení: Sestrojme daný úhel, na jehož ramena naneseme jakékoli úsečky, jichž délky jsou v daném poměru k sobě. Spojíme-li koncové body úseček, dostaneme trojúhelník podobný hledanému. Rozpůlíme-li daný úhel a vedeme potom k jednomu rameni jeho rovnoběžku ve vzdálenosti rovné danému poloměru, obdržíme střed vepsaného kruhu jako průsečík těchto dvou geometrických míst. Rovnoběžka s třetí stranou onoho prozatímního trojúhelníka, která je zároveň tečnou vepsané kružnice, dá nám třetí stranu definitivního trojúhelníka.

b) *Má-li míti obrazec určitou polohu vzhledem k jistým daným přímkám nebo bodům,* musíme hleděti vyloučiti takovou podmínku, abychom dostali systém homothetických obrazců. Tím stanou se paprsky podobnosti (jdoucí středem podobnosti) geometrickými místy pro body obrazce, i určíme na základě toho snadno hledaný útvar, sestrojíce nejprve libovolný z homothetických a potom jemu podobný, který by hověl spolu vynechané podmínce. Podmínka, kterou jest nám vynechati, je zpravidla buď „že přímka má míti určitou polohu“ nebo „že jistý bod má ležeti na dané přímce“ nebo „že jistá přímka má procházeti daným bodem“. Totéž v kružnici.

Příklad: *Sestrojiti kružnici, jež by procházela daným bodem A a dotýkala se dvou daných přímek, které se protínají v bodě O.*

Provedení: Libovolná kružnice, která se dotýká obou přímek, musí býti homothetická s hledanou, je-li O středem podobnosti. Přímka OA protne narýsovanou tuto kružnici v bodě homologickém k bodu A. Dva průsečíky odpovídají dvojímu řešení. Vedeme-li v sestrojené (prostředeční) kružnici poloměry k bodům průsečným, dostaneme středy hledaných kružnic, když sestrojíme bodem A rovnoběžky k těmto poloměrům; středy ty ovšem leží na symmetrále úhlu daných přímek.

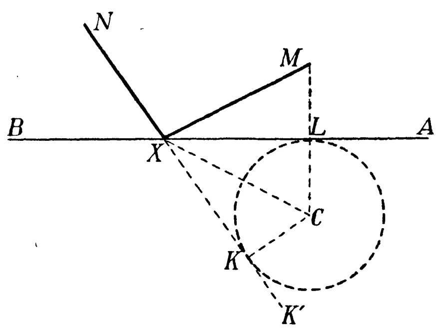
Že při této methodě i dalších je nutno často užívati vět o geometrických místech, není nic divného; užívá se zde však jako základu jiného principu, dle něhož methoda má své jméno, kdežto při vlastní methodě geometrických míst v odst. 8. stačí použiti vět o geometrických místech. —

10. *Methoda transformace obrazců* (méthode des transformations des figures). Je-li nesnadno sestrojiti hned obrazec

žádaný, můžeme často mysliti si jej přetvořený v jiný, jehož konstrukci lze snáze provésti na základech už vyložených. Obtíž neb i nemožnost sestrojení přímého spočívá v tom, že dané části neleží v obrazci pohromadě; i musíme nejprve utvořiti z obrazce, načrtnutého předem k vůli rozboru, obrazec jiný, kde dané části jsou tak sestaveny vůči sobě, že lze konstrukci snadno provésti. Je-li tento obrazec vyrýsován, zbývá přejíti k vlastnímu hledanému, což nebývá obtížno. Lze rozeznávati čtyři různé způsoby transformace obrazců.

a) Nejjednodušší a historicky první je *methoda souměrnosti* (méthode de symétrie, de retournement). Body A a B slují souměrné vzhledem k přímce P kolmé na spojnici AB v jejím středu. Přímka P sluje osou souměrnosti. Obrazce symmetrické jsou ony, jichž body jsou vzájemně symmetrické vzhledem k téže ose. — Obrazec hledaný nahrazujeme obrazcem k němu souměrným, čímž úkol stává se snáze řešitelný.

Příklad: *Nalézti na dané přímce BA bod X té vlastnosti, by přímky MX a NX, které spojují tento bod s danými M a N, tvořily s přímkou danou dva úhly NXB a MXA, z nichž první je dvojnásobný druhého.*



Obr. 1.

Provedení (obr. 1.): Buďtež M a N dva body, ležící na téže straně přímky BA, a X budiž bod hledaný na přímce této tak, že $\sphericalangle NXB = 2 \sphericalangle MXA$. Nahraďme bod M symmetrickým bodem C. Máme tedy $\sphericalangle MXL = \sphericalangle LXC$. Budiž XK' prodloužení přímky NX; úhel $K'XL = NXB$ je dvojnásobný úhlu CXL, čili $\sphericalangle KXC = \sphericalangle CXL$. Trojúhelníky pravoúhlé KXC a CXL mají společnou přeponu a rovný ostrý úhel, jsou proto shodné, následkem čehož $\overline{KC} = \overline{CL}$. Odtud uzavíráme, že přímka NXK' je tečna kružnice opsané kol bodu C jako středu tak, by se dotýkala přímky BA. — Úloha je tedy převedena na tuto: Sestrojiti bod C souměrný k bodu M vzhledem k přímce BA jako ose, opsati kružnici středu C poloměru $\overline{CL}$, konečně vésti tečnu k této kružnici. — Úloha dovoluje dvojí konstrukci (lze vésti dvě tečny).

Jiné příklady: 1. Sestrojiti trojúhelník, je-li dána jedna strana, součet druhých dvou a jeden z úhlů přilehlých k dané straně. 2. Sestrojiti trojúhelník, známe-li b, c, $B - C$.[7])

(Pokračování.)

Úlohy.

Úloha 16.

Čísly celými řešiti jest rovnici

$$\frac{x}{2} = 2^{\frac{x}{y}}.$$

Posl. fil. *R. Hruša.*

Úloha 17.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$a + x - y - z = b + y - z - x = c + z - x - y$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Posl. fil. *R. Hruša.*

Úloha 18.

Vyloučiti jest veličiny x, y, z z rovnic

$$a + x - y - z = b + y - z - x = c + z - x - y$$
$$= d + x + y + z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Posl. fil. *R. Hruša.*

---

[7]) Alexandrov-Aitov uvádí mimo naše čtyři ještě pátou methodu transformační, totiž methodu rotace kol osy; je patrně totožna s touto.