Poznámka k teorii plochy třetího řádu v prostoru čtyřdimensionálním.

F. Balada.

1. Buďtež dány tři roviny v prostoru čtyřrozměrném takové, že žádné dvě neleží v témže prostoru a nechť jsou tyto tři roviny osami tří projektivních svazků prostorů. Homologické prostory těchto tří svazků protínají se v přímkách, všechny tyto přímky (kterých jest ∞^1) tvoří přímkovou plochu ν třetího řádu. Neboť průsek její s libovolně jdoucím prostorem jest výtvar tří projektivních svazků rovin, čili kubika prostorová.

2. Vzhledem k tomu, že byla vytvořena plocha třetího řádu *) v prostoru čtyřrozměrném jakožto výtvar dvou kolineárních svazků rovinových o přímkách jakožto osách (kterou budu v dalším nazývati plochou Hlavatého), jest na snadě otázka, nelze-li tyto plochy považovati za totožné, t. j. *nelze-li plochu vytvořenou dvěma kolineárními svazky rovin vytvořiti třemi projektivními svazky prostorů a vice versa.***) To bude předmětem naší úvahy (odst. 4.).

3. Dříve než přistoupíme k důkazu totožnosti obou ploch, dlužno připomenouti věty, kterých při důkazu bude užito (odvození jich lze nalézti v uvedeném pojednání Hlavatého).

α) Hlavatého plocha obsahuje ∞^1 povrchových přímek *(P)* navzájem mimoběžných, které všecky protínají třetí část (přímku) degenerované kubiky, ve které prostor, určený osami vytvářecích svazků, plochu protíná.

β) Plocha Hlavatého jest určena, jsou-li dány dvě přímky P_1, P_2, které má obsahovati (a které jsou mimoběžné) a čtyři body a_i $(i = 1, \ldots 4)$ (které neleží v rovině).

Neboť tímto způsobem, přiřadíme-li k rovinám $(P_1\, a_i)$ roviny $(P_2\, a_i)$, jest ve svazku rovin kolem oněch přímek definována kolineace a jest tudíž jejich výtvarem zmíněná plocha.

γ) Plocha Hlavatého obsahuje ∞^2 kuželoseček »K^2«; každá z površek »*P*« protíná každou kuželosečku »K^2« v jednom a jen jednom bodě.

---

*) V. Hlavatý: O určité ploše třetího řádu ve čtyřrozměrném prostoru. Rozpravy České Akademie, roč. XXXI, tř. II, č. 24.

**) Dr. Seifert: O úhlu dvou rovin v prostoru čtyřrozměrném. Časopis pro pěstování matem. a fys., roč. LII, str. 146.

4a) Buďtež tedy ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ony tři roviny prostoru čtyřrozměrného, hovící uvedené suposici, které jsou osami tří projektivních svazků prostorů vytvářejících plochu ν.

Dva ze svazků (ϱ_i), na př. (ϱ_1), (ϱ_2) definují přímkovou varietu kvadratickou, která protíná ϱ_3 v kuželosečce K_3^2. Tato kuželosečka jest průsečnicí roviny ϱ_3 s plochou ν. Podobně obdržíme K_1^2, K_2^2.

Dle věty β odst. 3. určíme nyní plochu Hlavatého ν' tak, že přímkami P_1, P_2 (t. j. osami kolineárních svazků rovinových, které plochu definují) budou dvě površky plochy ν, které, jak snadno nahlédneme, budou mimoběžné. Neboť každá přímka plochy ν jest průsečnicí tří homologických prostorů svazků (ϱ_j) $(j = 1, 2, 3)$, protíná tudíž roviny ϱ_j. Avšak bodem mimo tři roviny v poloze obecné lze k těmto vésti pouze jednu různoběžku.

Ale ani v bodu kuželosečky K_i^2 nemohou se dvě površky protnouti, neboť v případě, že by se tak stalo na př. v bodu kuželosečky K_1^2, musela by jedna trojice prostorů homologických vytvářeti dvě přímky, což jest nemožné.

Body a_i zvolme rovněž na ν, ovšem tak, aby hověly uvedené suposici.

Prostor A, určený body a_i protíná přímky P_1, P_2 v bodech p_1, p_2, obě plochy v kubikách prostorových K^3, $K^{3\prime}$, které ale mají šest bodů a_i, p_k $(i = 1, ..4,\ k = 1, 2)$ společných a jsou tudíž totožné, $K^3 \equiv K^{3\prime}$. Prostor P, přímkami P_k jdoucí, má s prostorem A společnou rovinu, která seče K^3 ve třech bodech, z nichž dva jsou body p_k, třetí, obecně položený, budiž bod m.

Plochy ν, ν' protíná P v degenerovaných kubikách L^3, $L^{3\prime}$, které mají dvě přímky P_k společné. Třetí část každé z nich jest přímka bodem m, která musí protínat přímky P_k. Taková přímka existuje pouze jedna, jsou tudíž obě degenerované kubiky L^3, $L^{3\prime}$ rovněž totožny $(L^3 \equiv L^{3\prime})$.

Snadno nyní uvážíme, že každý bod plochy ν leží na ν' a naopak. Neboť vedeme-li bodem jedné z obou ploch prostor, protne obě plochy v kubikách, které mají šest společných bodů (průsečných bodů tohoto prostoru s K^3 a L^3) a jsou tudíž totožny.

Dokázali jsme, že každou plochu vytvořenou třemi projektivními svazky prostorů lze vytvořiti dvěma kolineárními svazky rovin.

Dokážeme nyní opak.

b) Budiž dána plocha ν', vytvořená dvěma kolineárními svazky rovinovými a chceme dokázati, že ji lze považovati za vytvořenu způsobem udaným nahoře pro plochu ν.

Zvolme za roviny ϱ_j takové tři roviny, které protínají ν' v kuželosečkách (odst. 3., věta γ), mimo to zvolme na ν' body a_1', a_2', a_3' v poloze obecné. Tím jest definován projektivní vztah ve svazcích prostorů kolem rovin ϱ_j, považujeme-li prostory $(\varrho_1\, a'_j)$, $(\varrho_2\, a'_j)$, $(\varrho_3\, a'_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ za projektivně sobě přiřaděné. Jest tedy určena i jistá plocha ν.

ν protíná ϱ_j v kuželosečkách K_j^2, ν' v $K_j^{2'}$. Dle odst. 3. věty γ musí površka plochy ν' bodem a'_j protínati $K_j^{2'}$ v jednom bodě; snadno uvážíme, že površka plochy ν týmž bodem vedená protne K_j^2. Ale bodem lze vésti ke třem rovinám v obecné poloze, neprochází-li žádná tímto bodem, jedinou různoběžku. Musí se tedy obě površky stotožňovati. Podobně pro body a_2', a_3'. Tomu by bylo lze vyhověti v případě různých $K_j^2, K_j^{2'}$ pouze tak, že tři průsečíky $(K_j^2\ K_j^{2'})$ by ležely po třech na přímkách B_j jdoucích body a_j. Měly by tedy plochy ν, ν' tři společné přímky B_j a mimo to v každé rovině ϱ_j bod c, který jest čtvrtým průsečíkem kuželoseček $K_j^2, K_j^{2'}$.

Plocha ν jest totožna s plochou ν'', vytvořenou kolineárními svazky rovinovými v osách B_1, B_2, vztahujeme-li na sebe kolineárně tyto roviny:

$[(B_1\ c_1), (B_2\ c_1)]$, $[B_1\ c_2)\ (B_2\ c_2)]$, $[(B_1\ c_3)\ (B_2\ c_3)]$, $[(B_1\ n)\ (B_2\ n)]$ (je-li n obecně položený bod přímky B_3). Poněvadž ale všecky tyto elementy leží na ploše ν a lze jimi tuto plochu definovati, jest $\nu'' \equiv \nu' \equiv \nu$.

5. Tím proveden důkaz identity obou ploch. Můžeme tedy vysloviti větu: *Plocha třetího řádu v prostoru čtyřrozměrném, vytvořená dvěma kolineárními svazky rovin o osách — přímkách, jest totožna s plochou třetího řádu, vytvořenou třemi projektivními svazky prostorů (osami těchto svazků jsou roviny).*

Zároveň ukázána poněkud jiným způsobem existence povrchových přímek a kuželoseček na této ploše.

Plocha ν jest obsažena ∞^2 způsoby na přímkové varietě třetího řádu, vytvořené třemi kolineárními svazky prostorů (každý svazek má za osu přímku).

Poznámka. Význam této plochy pro teorii křivosti ploch v prostoru čtyřrozměrném ukázal Hlavatý. (Rozpravy České Akademie, r. XXXII, č. 14.)

*

Note sur la théorie de l'homoloïde du troisième ordre dans l'espace à quatre dimensions.*)

(Extrait de l'article précédent.)

La théorie de cette surface est l'analogue de la théorie de la cubique gauche de l'espace à trois dimensions. On démontre dans cet article qu'on peut la définir de deux manières différentes: soit moyennant deux faisceaux projectifs linéaires à ∞^2 de plans, soit par trois faisceaux projectifs linéaires à ∞^1 d'espaces.

---

*) **Hlavatý:** ***La représentation projective d'une surface de troisième degré S_2^3 de l'espace à quatre dimensions dans un plan π_0.*** **(Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême, 1922.)**

Seifert: ***Sur l'angle de deux plans dans l'espace à quatre dimensions,*** **(ce journal, vol. LII, p. 148).**