Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 4-5, 494--566

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121494

Úlohy.

Řešení úloh.

Z mathematiky.

1.

Stanoviti hodnotu součinu prvých n členů řady arithmetické čtvrtého stupně

$$1,\ 5,\ 15,\ 35,\ 70,\ 126, \ldots$$

Jan Svoboda, úř. hypot. banky v Brně.

Řešení 1. Zaslal p. *F. Mádle*, stud. VII. tř. reálky v Rakovníce.

Pro obecný člen arithmetické řady stupně r-tého

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_n, \ldots$$

platí vzorec

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}\varDelta a_1 + \binom{n-1}{2}\varDelta^2 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{r}\varDelta^r a_1$$

jsou-li $\varDelta a_1, \varDelta^2 a_1, \ldots \varDelta^r a_1$ první členy příslušných řad rozdílových.

V daném případě jest řada původní a řady rozdílové

$$\begin{array}{c} 1,\ 5,\ 15,\ 35,\ 70,\ 126, \ldots \\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56, \ldots \\ 6,\ 10,\ 15,\ 21, \ldots \\ 4,\ 5,\ 6, \ldots \\ 1,\ 1, \ldots \end{array}$$

a tedy

$$a_1 = 1,\ \varDelta a_1 = 4,\ \varDelta^2 a_1 = 6,\ \varDelta^3 a_1 = 4,\ \varDelta^4 n_1 = 1.$$

I jest

$$a_n = 1 + \binom{n-1}{1}.4 + \binom{n-1}{2}.6 + \binom{n-1}{3}.4 + \binom{n-1}{4}.1$$

$$= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + 3\left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] + 3\left[\binom{n-1}{2}\right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{3}\right] + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}$$

a užijeme-li vlastnosti binomických součinitelů, vyjádřené vzorcem

$$\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}=\binom{m+1}{k},$$

jest

$$a_n=\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\binom{n}{4}.$$

Podobně lze dále psáti

$$a_n=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+2\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right]+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$$

$$=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{4}$$

$$=\left[\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}\right]+\left[\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{4}\right]$$

$$=\binom{n+2}{3}+\binom{n+2}{4}$$

$$=\binom{n+3}{4}.$$

Jest tedy

$$a_n=\binom{n+3}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

Součin prvních n členů bude

$$\frac{1.2.3.4}{24}\cdot\frac{2.3.4.5}{24}\cdot\frac{3.4.5.6}{24}\cdots\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

$$=\frac{n!\,(n+1)!\,(n+2)!\,(n+3)!}{12\,.\,24^n}$$

$$=\frac{2\,(n!)^4\,(n+1)^3\,(n+2)^3\,(n+3)}{24^{n+1}}.$$

Poznámka. Výraz pro

$$a_n=1+\binom{n-1}{1}4+\binom{n-1}{2}6+\binom{n-1}{3}4+\binom{n-1}{4}$$

$$=\binom{4}{4}\binom{n-1}{0}+\binom{4}{3}\binom{n-1}{1}+\binom{4}{2}\binom{n-1}{2}$$

$$+\binom{4}{1}\binom{n-1}{3}+\binom{4}{0}\binom{n-1}{4}.$$

lze též kratčeji zjednodušiti pomocí vzorce

$$\binom{m_1}{r}\binom{m_2}{0}+\binom{m_1}{r-1}\binom{m_2}{1}+\binom{m_1}{r-2}\binom{m_2}{2}$$
$$+\ldots\binom{m_1}{0}\binom{m_2}{r}=\binom{m_1+m_2}{r},$$

klademe-li v něm $m_1 = 4$, $m_2 = n - 1$, $r = 4$.

Vzorec ten dostaneme, utvoříme-li součin řad pro $(1 + x)^{m_1}$ a $(1 + x)^{m_2}$ a pak řadu pro $(1 + x)^{m_1+m_2}$ a v identických výrazech $(1 + x)^{m_1} (1 + x)^{m_2} = (1 + x)^{m_1+m_2}$ porovnáme součinitele u x^r.

Řešení 2. Zaslal p. *Ladislav Novák*, stud. něm. obch. akademie v Praze.

Obecný člen arithmetické řady čtvrtého stupně lze psáti ve tvaru

$$a_n = k_0 n^4 + k_1 n^3 + k_2 n^2 + k_3 n + k_4.$$

Abychom koefficienty k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 určili, položíme si $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Tak dostaneme, uvážíme-li, že $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 15$, $a_4 = 35$, $a_5 = 70$, k určení pěti koefficientů k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 pět lineárních rovnic. Z těch vypočteme

$$k_0 = \tfrac{1}{24},\ k_1 = \tfrac{1}{4},\ k_2 = \tfrac{11}{24},\ k_3 = \tfrac{1}{4},\ k_4 = 0.$$

Odtud

$$a_n = \tfrac{1}{24}n^4 + \tfrac{1}{4}n^3 + \tfrac{11}{24}n^2 + \tfrac{1}{4}n$$
$$= \frac{n(n^3+6n^2+11n+6)}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} = \binom{n+3}{4}.$$

Další postup jest jako při řešení 1.

2.

Řešiti jest rovnici

$$1 + \sin x + \frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{4}{8}\sin^3 x + \frac{5}{16}\sin^4 x + \ldots = \frac{16}{9}$$

Dr. *J. Štěpánek* v Táboře.

Řešení 1. Zaslal p. *Bohumil Hummel*, stud. VI. tř. r. v Příbrami.

Jde nejprve o to, sečísti řadu na levé straně dané rovnice. (Že jest konvergentní [a to absolutně] pro $|\sin\alpha| < 1$, poznáváme z toho, že její členy jsou vesměs co do absolutní hodnoty menší než členy konvergentní řady geometrické [s členy kladnými]).

Pišme v ní

$$\frac{\sin x}{2} = q,$$

takže nabude tvaru

$$S = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \ldots$$

Násobme tuto řadu q. Tak dostaneme

$$Sq = q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 5q^5 + \ldots$$

a odečtením obou řad

$$S(1 - q) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{1 - q}$$

a tedy

$$S = \frac{1}{(1 - q)^2} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}\sin x)^2}.$$

Máme tedy rovnici

$$\frac{1}{(1 - \frac{1}{2}\sin x)^2} = \frac{16}{9}$$

a tedy

$$(1 - \tfrac{1}{2}\sin x)^2 = \tfrac{9}{16},$$

$$1 - \tfrac{1}{2}\sin x = \pm\tfrac{3}{4}$$

a odtud buď $\sin x = \frac{1}{2}$, neb $\sin x = \frac{7}{2}$.

Význam má pouze řešení $\sin x = \frac{1}{2}$.

Odtud plyne

$$x = 30^0,\ 150^0$$

a obecně

$$x = 30^0 + 360^0 . k \quad (k \text{ celé číslo}),$$

$$x = 150^0 + 360^0 . k,$$

neboli v míře obloukové

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Řešení 2. Zaslal p. *Miloslav Hampl*, stud. VIIIa. tř. g. v Č. Budějovicích.

Součet řady

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 \ldots$$

lze určiti takto:

Řadu geometrickou

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{1-q}$$

násobme q. Dostaneme řadu

$$q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots = \frac{q}{1-q}$$

a derivujeme-li obě strany této rovnice, bude

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \ldots = \frac{d}{dq}\,\frac{q}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

3.

Do přímého kužele kruhového o daném úhlu vrcholovém vepíši kužel podobný, jehož vrchol padne do středu základny prvého kužele. Do tohoto druhého kužele vepíši podobný třetí, do tohoto čtvrtý atd. vždy dle těchže pravidel.

Jaký jest součet řady objemů a řady povrchů těchto kuželů?

Dr. *J. Štěpánek* v Táboře.

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VIa. tř. r. v Praze-III.

Označíme-li r poloměr základny, v výšku, s stranu, α úhel vrcholový, V objem, P povrch daného kužele, bude

$$v = r \cot g \frac{\alpha}{2},$$

$$s = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$V = \frac{\pi r^2 v}{3} = \frac{\pi r^3 \cot g \frac{\alpha}{2}}{3},$$

$$P = \pi r(r+3) = \pi r^2 \left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= 2\pi r^2 \frac{\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Rozměry jednotlivých kuželů jsou v poměru

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \ldots$$

a tedy povrchy v poměru

$$1 : \frac{1}{2^2} : \frac{1}{4^2} : \frac{1}{8^2} : \ldots$$

a objemy v poměru $1 : \frac{1}{2^3} : \frac{1}{4^3} : \frac{1}{8^3} : \ldots$

Jest tedy součet povrchů dán řadou geometrickou o podílu $\frac{1}{4}$

$$P\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) = \frac{P}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}P$$

$$= \frac{8}{3}\pi r^2 \frac{\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

a součet objemů řadou geometrickou o podílu $\frac{1}{8}$

$$V\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \ldots\right) = \frac{V}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}V$$

$$= \frac{8}{21}\pi r^3 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

4.

Dokázati, že platí vztah

$$nx^{n-1} - (n-1)x^n = 1 - (1-x)^2 X,$$

je-li $X = 1 + 2X + 3X^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2}$

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Frant. Friedmann,* stud. VII. tř. g. v Benešově.

Výraz pro X můžeme rozepsati

$$\begin{aligned} X = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} \\ + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} \\ + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} \\ + \ldots\ldots \\ + x^{n-2} \end{aligned}$$

Sečtěme řady v jednotlivých řádcích. I bude

$$X = \frac{x^{n-1}-1}{x-1} + x\frac{x^{n-2}-1}{x-1} + x^2\frac{x^{n-3}-1}{x-1} + \ldots + x^{n-2}$$

$$= \frac{(x^{n-1}-1)+(x^{n-1}-x)+(x^{n-1}-x^2)+\ldots+(x^{n-1}-x^{n-2})}{x-1}$$

$$= \frac{(n-1)\,x^{n-1}-(1+x+x^2+\ldots+x^{n-2})}{x-1}$$

a dosadíme-li za řadu v závorce její součet $\frac{x^{n-1}-1}{x-1}$ a upravíme

$$X = \frac{(n-1)\,x^n - n\,x^{n-1}+1}{(x-1)^2},$$

takže skutečně jest vztah svrchu napsaný splněn.

Poznámka. Podobně, jako zde naznačeno, možno stanoviti součet řady v úl. 2. a naopak užíti obou způsobů tam vyložených k řešení úlohy dané.

5.

Pravidelný jehlan přímý n-boký jest stanoven poboční hranou b jakož i hranovým úhlem β hran pobočných. Vrcholem základny vésti po jeho plášti lomenou čáru tak, aby každá její úsečka byla kolmá k následující hraně poboční, a určiti délku této spiralovité čáry vedoucí k vrcholu jehlanu.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Hladík,* stud. VI. tř. r. ve Velkém Meziříčí.

Základna jehlanu budiž $ABC\ldots$, vrchol V. Lomená čára vycházející z bodu A vytíná body M, N, P, ... na hranách pobočných $\overline{BV}$, $\overline{CV}$, $\overline{DV}$, ..., kteréž svírají vesměs hranové úhly $= \beta$.

Jelikož

$$\triangle AMV \backsim \triangle MNV \backsim \ldots,$$

jest

$$\overline{AM} : \overline{MN} = \overline{AV} : \overline{MV} = 1 : \cos\beta,$$

takže podíl úseček sousedních lomené čáry jest stálý rovný $\cos\beta$, což jest quotient geom. ř. konvergentní, jejíž prvý člen jest z $\triangle AMV$.

$$\overline{AM} = b \sin\beta,$$

druhý

$$\overline{MN} = b \sin\beta \cos\beta.$$

Délka lomené čáry jest pak

$$x = \frac{b \sin\beta}{1 - \cos\beta} = \frac{2b \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\beta}{2}}{2 \sin^2\frac{\beta}{2}},$$

z čehož

$$x = b \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

Úsečka tato dá se sestrojiti snadno jako odvěsna pravoúhlého trojúhelníka, přilehlá k úhlu $\frac{\beta}{2}$, ležícímu proti odvěsně b.

Poznámka. Roste li n do nekonečna, přejde jehlan v rotační kužel, na němž podobným způsobem možno určovati čáry protínající povrchové přímky pod týmž úhlem. Jsou to tak zvané loxodromy na kuželi rotačním.

6.

Přímý trojboký jehlan pravidelný jest určen základní hranou a, poboční b; vrcholem základny vésti rovinu, aby protínala jeho plášť v trojúhelníku nejmenšího obvodu, jeho pak délku stanoviti.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VIa. tř. reálky v Praze III.

Budiž onen jehlan $ABCD$ a rovinu hledanou proložme vrcholem A. Má-li průsek míti minimální obvod, přejde po rozvinutí pláště jehlanu do roviny v úsečku, neboť ta jest nejkratší vzdáleností dvou bodů. Nazveme-li úhel sevřený dvěma pobočnými hranami β, pak platí

$$sin \frac{\beta}{2} = \frac{a}{2b}.$$

Délku nejmenšího obvodu vypočteme z rovnoramenného trojúhelníka rozvinutého pláště AAD, kde ramena jsou b a úhel jimi sevřený 3β. Bude tedy

$$2b \sin 3\frac{\beta}{2} = 2b\left(3\sin\frac{\beta}{2} - 4\sin^3\frac{\beta}{2}\right) = \frac{a(3b^2 - a^2)}{b^2}.$$

Má tudíž řez o minimálním obvodu délku $\frac{a(3b^2 - a^2)}{b^2}$.

7.

Sestrojiti rovnostranný trojúhelník, dán-li jeden jeho vrchol a zbývající dva jsou na daných dvou přímkách.

Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal p. *Lad. Novák*, stud. něm. obch. akad.

Jest dán vrchol A a dvě přímky p, q. Jsou-li B, C hledané vrcholy, ležící na p, q, a má-li býti trojúhelník ABC rovnostranným, musí býti úhel při A 60^0.

Otočíme-li tedy přímku p s neznámým dosud vrcholem B kolem bodu A o 60^0, protne nám přímka p druhou přímku q v hledaném bodě C a to z toho důvodu, že $AB = AC$.

Sestrojení: Přímku p otočíme o 60^0 kolem A, potom protne nám přímku q v bodě C. Nad úsečkou $\overline{AC}$ sestrojíme rovnostranný trojúhelník tak, aby třetí vrchol B ležel na přímce p.

Úloha jest dvojznačná, ježto ono otočení přímky p kolem bodu A o 60^0 lze provésti dvojím způsobem. Ono otočení provede se tak, že otočíme na př. 2 body přímky p.

8.

Kružnice k dotýká se kružnice l v bodě C, jímž vedena jest libovolná sečna s, sekoucí kružnici k v bodě A a kružnici l v bodě B; jaké jest geometrické místo bodu D harmonicky sdruženého s bodem C vzhledem k bodům A, B.

Josef Kálal, prof. r. v Příboře.

Řešení 1. Zaslal p. *F. Mádle*, stud. VII. tř. r. v Rakovníce.

Seče-li libovolná sečna s dané kružnice v bodech vytčené vlastnosti a zobrazíme-li obdobnou čtveřinu $(CPMN)$ na středné, jest patrno, že $MA \perp s$, $NB \perp s$ a ježto dle předpokladu jest $(CPMN) = (CDAB)$, musí i $PD \perp s$, čili bod D jest vrcholem pravých úhlů nad CP sestrojených a tedy hledaným geom. místem jest kružnice nad průměrem CP. (Apolloniova kružnice bodů MN).

Řešení 2. Zaslal p. *Lad. Novák*, stud. něm. obch. akad.

Zvolíme-li střednou kružnic za osu x a bod C za počátek, mají obě kružnice rovnice

$$k \equiv x^2 + y^2 - 2rx = 0,$$
$$l \equiv x^2 + y^2 - 2Rx = 0$$

a libovolná sečna $\quad s \equiv y = kx.$

Z toho plynou souřadnice průsečných bodů

$$A\left(\frac{2r}{1+k^2}, \frac{2rk}{1+k^2}\right), \quad B\left(\frac{2R}{1+k^2}, \frac{2Rk}{1+k^2}\right)$$

a ježto souřadnice bodu C jsou $x_C = 0$, $y_C = 0$, jsou souřadnice bodu D, jako čtvrtého, harmonicky sdruženého bodu

$$x = \frac{4Rr}{(R+r)(1+k^2)}$$
$$y = \frac{4Rrk}{(R+r)(1+k^2)}.$$

Z těchto rovnic nutno vyloučiti proměnnou směrnici k; jest pak z první rovnice

$$1 + k^2 = \frac{4R}{x(R+r)}$$

a

$$k = \sqrt{\frac{4Rr - x(R+r)}{x(R+r)}};$$

i obdržíme tedy rovnici

$$y = x \sqrt{\frac{4Rr - x(R + r)}{x(R + r)}},$$

čili po upravení

$$x^2 + y^2 - \frac{4Rr}{R + r} x = 0,$$

což jest rovnice kruhu o středu na ose x a dotýkajícího se osy y — jest tedy oním geom. místem kružnice, opsaná nad průměrem, jenž na středné obou kružnic druhé dva průsečíky harmonicky odděluje.

9.

Vrcholem čtverce vedena jest přímka o v úhlu α k jeho straně. Jak velké jsou pláště vytvořené otočením obou úhlopříčen kolem osy o a jak velký musí býti úhel α, aby pláště ty byly co největší.

Školní rada *Václav Hübner.*

Řešení. Zaslal p. *Jan A. Novák,* stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě.

Předpokládejme, že osu o vedeme vrcholem A. Označme φ úhel, který svírá osa o s úhlopříčkou AC. Pak jest, značí-li α úhel, který svírá osa o se stranou AB, $\alpha + \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Vzhledem k souměrnosti čtverce dle úhlopříčky můžeme předpokládati, že osa leží na téže straně úhlopříčky AC jako vrchol B a stačí se při úhlu φ omeziti na hodnoty od O do $\frac{\pi}{2}$.

Úhlopříčka AC opíše kuželovou plochu o straně rovné délce její u a poloměru základny $u \sin \varphi$, takže jest plášť

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\pi u \sin \varphi \cdot u = \pi u^2 \sin \varphi = 2\pi a^2 \sin \varphi.$$

P tedy roste od $\varphi = 0$, tedy $P = 0$ až do $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tedy $P = \pi u^2 = 2\pi a^2$ (kuželová plocha ovšem v tomto krajním případě přejde v kruh o poloměru u).

Při úhlopříčce BD dlužno rozeznávati dva případy, dle toho, I. probíhá-li osa o uvnitř čtverce $\left(o < \varphi < \frac{\pi}{4}\right)$ neb II. vně čtverce $\left(\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

I. Úhlopříčka BD opisuje dva kužele. Označíme-li M průsečík osy o s úhlopříčkou BD, E kolmý průmět vrcholu B do osy o a F kolmý průmět vrcholu D do osy o, bude míti jeden kužel stranu MB a poloměr BE, druhý kužel stranu DM a poloměr DF.

Z pravoúhlého trojúhelníka AMB plyne

$$EB = a \sin \alpha$$

a z pravoúhlého trojúhelníka BEM, v němž úhel při B jest φ, plyne

$$MB = \frac{EB}{\cos \varphi} = \frac{a \sin \alpha}{\cos \varphi}.$$

První kužel má tedy plášť

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\, a \sin \alpha \cdot \frac{a \sin \alpha}{\cos \varphi} = \frac{\pi\, a^2 \cos^2 \alpha}{\cos \varphi}.$$

Podobně z pravoúhlého trojúhelníku AFD plyne

$$DF = a \cos \alpha$$

a z pravoúhlého trojúhelníku DFM

$$DM = \frac{DF}{\cos \varphi} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \varphi}.$$

Druhý kužel má tedy plášť

$$\Pi_2 = \frac{\pi\, a^2 \sin^2 \alpha}{\cos \varphi}.$$

Jest tedy celkový plášť dvojkužele opsaného úhlopříčkou BD

$$\Pi = \frac{2\pi\, a^2}{\cos \varphi}.$$

V intervallu od 0 do $\frac{\pi}{4}$ ubývá $\cos \varphi$ od 1 do $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a tedy $\frac{1}{\cos \varphi}$ roste od 1 do $\sqrt{2}$.

Má tedy plášť Π největší hodnotu pro $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\Pi = \pi a^2 \sqrt{2}$, kdy osa o se stotožní se stranou AB a úhlopříčka DB opisuje kužel.

II. V tomto případě opisuje úhlopříčka BD plášť Π komolého kužele. Ten rovná se součinu z délky té úhlopříčky a obvodu středního řezu. Poloměr středního řezu jest vzdálenost středu čtverce O od osy o, tedy

$$\frac{u}{2} \sin \varphi.$$

Jest tudíž

$$\Pi = 2\pi \frac{u}{2} \sin \varphi \,.\, u = \pi u^2 \sin \varphi = 2\pi a^2 \sin \varphi.$$

V intervallu od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{2}$ $\sin \varphi$ a tedy i Π roste.

Pro $\frac{\pi}{4}$ jest

$$\Pi = \frac{\pi u^2}{\sqrt{2}} = \pi a^2 \sqrt{2}$$

a pro $\frac{\pi}{2}$ největší hodnota $\Pi = \pi u^2 = 2\pi a^2$ (v tomto případě opisuje úhlopříčka BD plochu válcovou).

Uvažujeme-li případy I. a II. dohromady, vidíme, že plášť Π opsaný úhlopříčkou BD má největší hodnotu pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$, kdy osa jest s ní rovnoběžná a úhlopříčkou opisuje plochu válcovou o plášti $\pi u^2 = 2\pi a^2$.

10.

Ze všech kulových výsečí o daném objemu stanoviti onu, jejíž povrch jest co největší a co nejmenší.

Školní rada *Václav Hübner.*

Řešení. Zaslal p. *F. Mádle*, stud. VII. tř. r. v Rakovníce.

Pro objem a povrch výseče kruhové platí vzorce

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 v,$$

$$P = \pi \varrho r + 2\pi r v,$$

značí-li r poloměr koule, ϱ poloměr základny a v výšku příslušné úseče.

Je-li $4x$ středový úhel úseče, pak jest

$$\varrho = r \sin 2x = 2r \sin x \cos x,$$
$$v = r - r \cos 2x = r\,(1 - \cos 2x) = 2r \sin^2 x$$

a tedy

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \sin^2 x,$$
$$P = 2\pi r^2 \sin x\,(\cos x + 2 \sin x).$$

Z první rovnice určíme

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi \sin^2 x}}$$

a dosadíme do druhé. I obdržíme

$$P = \sqrt[3]{\frac{9V^2\pi}{2}}\;\frac{\cos x + 2 \sin x}{\sqrt[3]{\sin x}}.$$

Závisí tedy povrch na funkci

$$f'(x) = \frac{\cos x + 2 \sin x}{\sqrt[3]{\sin x}},$$

kterou dlužno na základě významu x uvažovati v intervallu od 0 do $\frac{\pi}{2}$.

Derivace této funkce jest

$$f'(x) = -\frac{1}{3}\,\frac{\cos^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin^{\frac{4}{3}} x}$$
$$= -\frac{1}{3} \sin^{\frac{2}{3}} x\,(\cot g\, x - 1)\,(\cot g\, x - 3).$$

Pro $x = 0$ roste $f(x)$ do nekonečna a pro malé hodnoty x jest $f'(x)$ záporné. Klesá tedy funkce $f(x)$ od $x = 0$ až do $x = x_1$, určeného vztahem $\cot g\, x_1 = 3$, kdy jest $f'(x) = 0$. Pak v intervallu od x_1 do $x_2 = \frac{\pi}{4}$, kdy $\cot g\, x_2 = 1$, jest $f(x)$ kladné, takže funkce $f(x)$ v onom intervallu stoupá. Z toho plyne, že pro x_1 nastává minimum. V intervallu od $x_2 = \frac{\pi}{4}$ až do $x = \frac{\pi}{2}$ jest $f'(x)$ stále záporné, takže funkce $f(x)$ klesá. Pro $x_2 = \frac{\pi}{4}$ nastává tedy maximum. Nejmenší hodnoty nabývá však funkce $f(x)$ na konci intervallu pro $x = \frac{\pi}{2}$ (hraniční minimum). Přehledně máme vše dáno tabulkou:

x	$f(x)$	$f'(x)$	r	ϱ	v	P	
0	$+\infty$	0	∞	0	∞	∞	
		< 0					
$arc\ tg \frac{1}{3} = 18^0 26' 6''$	$\sqrt[3]{\frac{25}{2}}$	0	$\sqrt[3]{\frac{15V}{2\pi}}$	$\frac{3r}{5}$	$\frac{r}{5}$	$\sqrt[3]{\frac{225\pi V^2}{4}}$	min.
		> 0					
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	0	$\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$	r	r	$\sqrt[3]{\frac{243\pi V^2}{4}}$	max.
		< 0					
$\frac{\pi}{2}$	2	-1	$\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$	0	$2r$	$\sqrt[3]{36\pi V^2}$	hraniční min. (nejmenší hodnota)

11.

Řešiti tětivový čtyřúhelník, dány-li dvě protilehlé strany a, c a obě úhlopříčky m, n svými délkami.

Prof. *Rudolf Hruša.*

12.

Dokažte, že plocha tětivového čtyřúhelníku dá se vyjádřiti vzorcem

$$\frac{mn\,(a^2 - c^2)}{(ma - nc)\,(na - mc)} \sqrt{s\,(s - a - c)\,(s - m - c)\,(s - n - c)}$$

Prof. *Rudolf Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VIa. tř. r. v Praze III.

Značme úhlopříčky $AC = m$, $BD = n$ a úhly $CDB = \varphi$, $DCA = \psi$.

Ze vztahů

$$mn = ac + bd$$

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

ustanovíme neznámé strany b a d.

Nalezneme

$$b = \sqrt{\frac{(mn - ac)(an - cm)}{am - cn}}, \quad d = \sqrt{\frac{(mn - ac)(am - cn)}{an - cm}} \quad (1)$$

Z trojúhelníků BDC, CAB plynou na základě věty kosinusové vztahy

$$b^2 = c^2 + n^2 - 2nc \cos \varphi = m^2 + a^2 - 2ma \cos \varphi$$

a odtud vypočteme

$$\cos \varphi = \frac{m^2 + a^2 - n^2 - c^2}{2(am - cn)},$$

$$1 + \cos \varphi = \frac{(m + a)^2 - (n + c)^2}{2(am - cn)}$$

$$= \frac{(m + a + n + c)(m + a - n - c)}{2(am - cn)},$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{(m + a + n + c)(m + a - n - c)}{4(am - cn)}}.$$

Zaveďme označení

$$2s = m + a + n + c.$$

Pak jest

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{s(s - n - c)}{am - cn}}. \quad (2a)$$

Podobně bychom dostali

$$1 - \cos \varphi = \frac{(n - c)^2 - (m - a)^2}{2(am - cn)}$$

$$= \frac{(n - c + m - a)(n - c + m + a)}{2(am - cn)},$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{(s - a - c)(s - c - m)}{am - cn}} \quad (2b)$$

a tedy

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{(s-a-c)(s-c-m)}{s(s-c-n)}} \tag{2c}$$

a užijeme-li vztahu $sin\,\varphi = 2\,sin\,\frac{\varphi}{2}\,cos\,\frac{\varphi}{2}$

$$sin\,\varphi = \frac{2\sqrt{s(s-a-c)(s-m-c)(s-n-c)}}{am-cn}. \tag{2}$$

Z trojúhelníku ABC plyne užitím věty sinusové

$$sin\,\beta = \frac{m\,sin\,\varphi}{b}$$

a užitím vzorců (1) a (2)

$$sin\,\beta = 2m\sqrt{\frac{s(s-a-c)(s-m-c)(s-n-c)}{(mn-ac)(am-cn)(an-cm)}}. \tag{3}$$

Podobně dostaneme z trojúhelníků ACD a ABD

$$\left.\begin{aligned}
cos\,\frac{\psi}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-c-m)}{an-cm}},\\
sin\,\frac{\psi}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a-c)(s-c-n)}{an-cm}},\\
tg\,\frac{\psi}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a-c)(s-c-n)}{s(s-c-m)}},\\
sin\,\psi &= \frac{2\sqrt{s(s-a-c)(s-m-c)(s-n-c)}}{an-cm}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

a z trojúhelníku ABD užitím věty sinusové

$$sin\,\alpha = \frac{n\,sin\,\psi}{d}$$

a užitím (1) a (4)

$$sin\,\alpha = 2n\sqrt{\frac{s(s-a-c)(s-m-c)(s-n-c)}{(mn-ac)(am-cn)(an-cm)}}, \tag{5}$$

(ostatně můžeme dostati tyto vzorce ihned, zaměníme-li spolu φ a ψ, b a d, α a β, m a n).

Plochu čtyřúhelníka vypočteme jako součet ploch trojúhelníků ABC a ACD

$$P = \frac{1}{2}\,ma\,sin\,\varphi + \frac{1}{2}\,mc\,sin\,\psi$$

a dosazením ze vzorců (2) a (4)

$$P = m\left(\frac{a}{am - cn} + \frac{c}{an - cm}\right)\sqrt{s(s-a-c)(s-m-c)(s-n-c)}$$

a sloučíme-li

$$P = \frac{mn(a^2 - c^2)}{(am - cn)(cn - cm)}\sqrt{s(s-a-c)(s-m-c)(s-n-c)}.$$

Poloměr kružnice opsané r můžeme určiti buď z trojúhelníku ABC, kdež platí vztah $m = 2r \sin \beta$, neb z trojúhelníku ABD, kdež $n = 2r \sin \alpha$. Tak dostaneme

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(mn - ac)(am - cn)(an - cm)}{s(s-a-c)(s-m-c)(s-n-c)}}.$$

13.

Do deltoidu $ABCD$ jest možno vepsati kruh o středu S a poloměru r. Vedle toho jsou čtyři kruhy o středech S_1, S_2, S_3, S_4, jež se vně dotýkají tří stran deltoidu. Jsou-li poloměry těch kruhů r_1, r_2, r_3, r_4, tu vedle vztahů $r_1 = r_2$, $r_3 = r_4$ platí ještě

α) $r_1 : r_3 = tg\,\frac{\delta}{2} : tg\,\frac{\beta}{2}$,

β) $(r_1 - r) : (r - r_3) = a : c$,

γ) *Středy S_1, S_2, S_3, S_4 tvoří rovnoramenný lichoběžník, jehož úhlopříčky se protínají v bodě S.*

Prof. *Rudolf Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš,* stud. VIa. tř. reálky v Praze III.

Osou souměrnosti deltoidu $ABCD$ budiž přímka BD. Poloměry kruhů dotýkajících se vně strany a buďtež r_1, r_2, strany c r_3, r_4. Dva a dva poloměry jsou si rovny proto, že celý obrazec jest souměrný dle BD.

Pak platí následující vztahy:

$$r = a \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = c \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}},$$

$$r_1 = a \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}; \quad r_3 = c \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}};$$

α) Potom

$$r_1 : r_3 = a \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} : c \cdot \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}.$$

Dle věty sinové platí:

$$a : c = \sin\frac{\delta}{2} : \sin\frac{\beta}{2}$$

a ježto v deltoidu $2\alpha + \beta + \delta = 360^0$, t. j.

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 180^0 - \frac{\alpha+\delta}{2} \quad \text{a} \quad \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\delta}{2},$$

bude dále

$$r_1 : r_3 = \sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\delta}{2}$$

a tedy skutečně

$$r_1 : r_3 = tg\frac{\delta}{2} : tg\frac{\beta}{2}.$$

$$\beta)\ (r_1 - r) : (r - r_3) = a\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)$$

$$: c\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}} - \frac{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}\right).$$

Po sloučení obdržíme

$$(r_1 - r):(r - r_3) = a \, . \, \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \, . \, c \, \frac{-\cos\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}$$

$$= a \, . \, cotg \, \frac{\alpha+\beta}{2} : - \, c \, . \, cotg \, \frac{\alpha+\delta}{2} \, .$$

Uvážíme-li, že

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 180^0 - \frac{\alpha+\delta}{2}$$

a tedy $$cotg \, \frac{\alpha+\beta}{2} = - \, cotg \, \frac{\alpha+\delta}{2},$$

platí skutečně

$$(r_1 - r):(r - r_3) = a : c.$$

γ) Snadno se přesvědčíme, že $\overline{S_1S_2} \perp \overline{BD}$ a $\overline{S_3S_4} \perp \overline{BD}$ a tudíž $\overline{S_1S_2} \parallel \overline{S_3S_4}$. Celý obrazec jest souměrný dle $\overline{BD}$ a tudíž $S_1S_2S_3S_4$ jest lichoběžník rovnoramenný, jehož úhlopříčky se protínají na ose $\overline{BD}$ v bodě S.

14.

Dokázati, že objem čtyřbokého hranolu o hranách a, b, c, d, jenž má plochu kolmého řezu z a délku průsečnice řezů úhlopříčných f, jest

$$K = \frac{z}{3}\,(a + b + c + d - f)$$

a délka těžnice rovnoběžné s hranami pobočnými

$$t = \frac{a+b+c+d-f}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{a^2+b^2+c^2+d^2-f^2}{a+b+c+d-f}$$

Prof. *J. Schuster.*

Řešení dle p. autora.

Objem se rovná objemu dvou komolých hranolů trojbokých, tedy

$$K = \frac{z_1}{3}(a+b+c) + \frac{z_2}{3}(c+d+a) = \frac{z}{3}(a+c) + \frac{z_1 b + z_2 d}{3}.$$

Zároveň z úměrnosti, je-li f délka průsečnice řezů úhlopříčných, plyne:

$$\frac{b-f}{f-d}=\frac{z_1}{z_2},$$

t. j. $\quad fz = bz_2 + dz_1 = (b+d)\,z - (bz_1 + dz_2),$

z čehož

$$bz_1 + dz_2 = (b+d-f)\,z. \qquad (\alpha)$$

Dosazení pak dá:

$$K=\frac{2}{3}\,[a+b+c+d-f].$$

Délka těžnice hranolu 4-bokého plyne z věty o dělicím poměru. Délky těžnic obou dílů hranolu jsou:

$$t_1=\frac{a+b+c}{4}+\frac{a^2+b^2+c^2}{4\,(a+b+c)},\; t_2=\frac{a+c+d}{4}+\frac{a^2+c^2+d^2}{4\,(a+c+d)}.$$

Hmoty příslušných hranolů jsou K_1 a K_2, jak svrchu naznačeno. Tedy

$$(t_1-t):(t-t_2)=K_2:K_1$$

a odtud

$$t=\frac{t_1K_1+t_2K_2}{K}.$$

I bude

$$t=\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{12}\,[(a+b+c)^2 z_1+(a^2+b^2+c^2)\,z_1+(a+c+d)^2 z_2 + (a^2+c^2+d^2)\,z_2],$$

což můžeme psáti ve tvaru

$$t=\frac{1}{12\,.\,K}\Big[[(a+c)^2+a^2+c^2]\,z+2\,(a+c)\,[bz_1+dz_2]+2b^2z_1+2d^2z_2\Big].$$

Ale dle rovnice (α), když ji násobíme jednou veličinou b, pak veličinou d a sečteme,

$$b^2z_1+d^2z_2=(b+d-f)\,(b+d)\,z-bdz,$$

takže

$$t=\frac{1}{12K}\,[\{(a+c)^2+a^2+c^2\}\,z+2\,(a+c)\,(b+d-f)\,z + 2(b+d-f)\,(b+d)\,z-2bdz].$$

Odtud vytkněme z, zkraťme proti jmenovateli a výraz v závorce pišme:

$$t = \frac{1}{4(a+b+c+d-f)} [\{a+c+b+d-f\}^2 + a^2 + c^2 +$$
$$+ (b+d-f)(b+d) + f(b+d-f) - 2bd],$$
$$t = \frac{1}{4}\left[a+b+c+d-f+\frac{a^2+b^2+c^2+d^2-f^2}{a+b+c+d-f}\right].$$

15.

Ve čtyřstěnu, jehož protější hrany jsou střídavě stejně dlouhé $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, *platí pro jich sklony vztah*

$$\sin(aa_1) \,.\, \sin(bb_1) \,.\, (cc_1) = \frac{8\varrho^2}{R^2},$$

kde ϱ *jest poloměr koule čtyřstěnu vepsané,* R *poloměr kružnice stěně opsané.*

Prof. *J. Schuster.*

Řešení. Zaslal pan *F. Mádle*, stud. VII. tř. reálné v Rakovníce.

Opišme danému čtyrstěnu rovnoběžnostěn, jehož rovnoběžné stěny jsou určeny vždy dvěma protějšími hranami čtyrstěnu. Tyto hrany jsou úhlopříčkami stěn rovnoběžnostěnu a z rovnosti jich plyne, že bude to rovnoběžnostěn pravoúhlý.

Označme si dále x, y, z rozměry pravoúhlého rovnoběžnostěnu, V objem čtyrstěnu, P jeho povrch. Ten tvořen jest čtyřmi shodnými trojúhelníky o ploše $\triangle$, takže $P = 4\triangle$.

Jelikož daný čtyrstěn odetíná od pravoúhlého rovnoběžnostěnu čtyři shodné trojboké jehlany o objemu $\frac{1}{3}\frac{xyz}{2}$, jest

$$xyz = V + 4 \,.\, \frac{1}{3}\frac{xyz}{2},$$

a tedy

$$xyz = 3V.$$

Poloměr koule čtyrstěnu vepsané dán jest vztahem

$$V = \frac{1}{3} P\varrho.$$

Jest tudíž

$$\varrho = \frac{3V}{P}$$

a mimo to

$$R = \frac{abc}{4\triangle} = \frac{abc}{P}.$$

Z toho plyne

$$\frac{\varrho}{R} = \frac{3V}{abc} = \frac{xyz}{abc}. \qquad (1)$$

Plochu stěn hranolu můžeme vyjádřiti jednak jako poloviční součin úhlopříček a sinu úhlu jimi sevřeného, jednak jako součin příslušných rozměrů.

Z toho plynou rovnice

$$sin(a, a_1) = \frac{2xy}{a^2},$$

$$sin(b, b_1) = \frac{2yz}{b^2},$$

$$sin(c, c_1) = \frac{2xz}{c^2},$$

jichž vynásobením obdržíme

$$sin\,(aa_1) \,.\, sin\,(bb_1) \,.\, sin\,(cc_1) = 8 \,.\, \frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2c^2}. \qquad (2)$$

Porovnáním rovnic (1), (2) pak dospíváme ke vztahu

$$sin\,(aa_1) \,.\, sin\,(bb_1) \,.\, sin\,(cc_1) = 8 \,.\, \frac{\varrho^2}{R^2},$$

jejž jsme měli dokázati.

16.

Výška přímého kužele elliptického budiž geometrickým průměrem poloos podstavy, nejkratší strana geometrickým průměrem strany nejdelší a výšky. Které úhly svírají nejdelší a nejkratší strana s podstavou? Je-li dána lineární výstřednost ellipsy, který jest objem kužele?

Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Jandera,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.

a, b buďtež poloosy základní ellipsy, v výška, s nejdelší a t nejkratší strana kužele. Dle úlohy jest

$$v^2 = ab, \tag{1}$$
$$t^2 = sv. \tag{2}$$

Úhel, který svírá strana s se základnou, buď α, úhel, který svírá strana t se základnou, buď β.

Tu jest

$$tg\,\alpha = \frac{v}{a} = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a},$$

$$tg\,\beta = \frac{v}{b} = \frac{a}{b}.$$

Dále v onom kuželi platí ještě vztahy

$$s^2 = v^2 + a^2, \tag{3}$$
$$t^2 = v^2 + b^2. \tag{4}$$

Vyloučíce postupně t, s, v z rovnic (1) — (4) obdržíme rovnici

$$a^2 - ab - b^2 = 0, \tag{5}$$

odkud plyne

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,b$$

a tudíž

$$tg\,\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \qquad tg\,\beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Význam mají pouze tangenty kladné, protože α i β musí býti menší než 90^0; tedy:

$$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \qquad tg\,\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

I bude

$$\alpha = 38^0 20' 24'',$$
$$\beta = 51^0 49' 36''.$$

Je-li dána lineárná excentricita e, plyne z (5)

$$ab = e^2.$$

Objem O jest dán vzorcem:

$$O = \frac{1}{3}\,z\,.\,v = \frac{\pi}{3}\,.\,ab\sqrt{ab} = \frac{\pi}{3}\,e^3.$$

17.

V bodě paraboly $y^2 = 2px$, jehož pořadnice $y_1 > o$ jest dána, vedena tečna. Ve které vzdálenosti od počátku souřadnic musí byti vrchol souosé paraboly (o ose $+ x$), jejíž parametr $2p' > 2p$, aby tečna byla oběma křivkám společna? Jest vypočítati plochu, již omezují tečna a oblouky obou křivek, jakož i poměr její ku ploše trojúhelníku z tečny a tětiv.

Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení. Zaslal p. *F. Mádle*, stud. VII. tř. r. v Rakovníce.

Tečna t_1 paraboly $y^2 = 2px$ v bodě jejím (x_1, y_1) jest

$$y_1 y = p(x + x_1)$$

čili

$$t_1 \equiv px - y_1 y + \frac{y_1^2}{2} = 0. \tag{1}$$

Tato tečna má se stotožňovati s tečnou t_2 v bodě (x_2, y_2) hledané paraboly $y^2 = 2p'(x - a)$; rovnice tečny t_2 jest

$$y_2 y = p'x + p'x_2 - 2p'a$$

čili

$$t_2 \equiv p'x - y_2 y + \frac{y_2^2}{2} - p'a = 0. \tag{2}$$

Aby skutečně bylo $t_1 \equiv t_2$, musí součinitelé při x, y a člen absolutní v rovnicích (1), (2) býti úměrny, t. j. musí býti

$$kp = p',\ ky_1 = y_2,\ k\frac{y_1^2}{2} = \frac{y_2^2}{2} - p'a.$$

Odtud plyne

$$k = \frac{p'}{p},\ y_2 = \frac{p'}{p}y_1,\ a = \frac{y_1^2(p'-p)}{2p^2} = \frac{p'-p}{p}x_1,$$

takže rovnice hledané paraboly má tvar

$$y^2 = 2p'\left(x - \frac{(p'-p)\cdot x_1}{p}\right).$$

Abychom určili plochu omezenou tečnou a oblouky obou křivek, označme si dotyčné body tečny

$$M\left(x_1 = \frac{y_1^2}{2p},\ y_1\right),\ N\left(x_2 = \frac{y_1^2(2p'-p)}{2p^2},\ y_2 = \frac{p'}{p}y_1\right),$$

jich průměty na osu x : M_1, N_1 a jeden z průsečíků obou parabol (hoření)

$$P\left(x_3 = y_1^2 \frac{p'}{2p^2},\ y_3 = y_1 \sqrt{\frac{p'}{p}}\right).$$

Potom najdeme onu plochu, když od lichoběžníka M_1N_1NM odečteme úseče M_1P_1PM, P_1N_1NP, kde P_1 značí průmět bodu P na osu x.

Jest tudíž hledaná plocha

$$P = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2} - \left[\frac{2}{3}(x_2 - a)\, y_2 - \frac{2}{3}(x_3 - a)\, y_3\right]$$
$$-\left(\frac{2}{3} x_3 y_3 - \frac{2}{3} x_1 y_1\right),$$

a po snadné úpravě

$$P = \frac{1}{6} \frac{y_1^3}{p^3}(p' - p)(\sqrt{p'} - \sqrt{p})^2.$$

Podobně užijeme-li vzorce

$$P' = \frac{1}{2}\left[x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_2 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)\right],$$

obdržíme plochu P' trojúhelníku MNP

$$P' = \frac{1}{4} \cdot \frac{y_1^3}{p^3}(p' - p)(\sqrt{p'} - \sqrt{p})^2.$$

Poměr obou ploch pak jest

$$\frac{P}{P'} = \frac{2}{3}.$$

18.

Jest určiti geometrické místo průseků hyperboly $x^2 \sin^2\varphi - y^2 \cos^2\varphi = a^2$ *s přímkou* $x \operatorname{tg}\varphi - y \operatorname{cotg}\varphi = \frac{2a}{\sin 2\varphi}$, *je-li* φ *proměnlivé.*

Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Jandera,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.

Rovnici přímky možno psáti ve tvaru

$$x \sin^2 \varphi - y \cos^2 \varphi = a.$$

Jedná se tedy o to, vyloučiti úhel φ z rovnic

$$x \sin^2 \varphi - y \cos^2 \varphi = a,$$
$$x^2 \sin^2 \varphi - y^2 \cos^2 \varphi = a^2,$$

neboli, po snadné úpravě, z rovnic

$$(x^2 + y^2) \sin^2 \varphi = y^2 + a^2,$$
$$(x + y) \sin^2 \varphi = y + a.$$

Vyloučením $\sin^2 \varphi$ obdržíme rovnici

$$(x^2 + y^2)(y + a) - (x + y)(y^2 + a^2) = 0$$

a po snadné úpravě

$$(x - a)(y^2 - xy - ax - ay) = 0.$$

Rozpadá se tedy hledané geometrické místo na přímku rovnoběžnou s osou y ve vzdálenosti a

$$x - a = 0$$

a na kuželosečku

$$y^2 - xy - ax - ay = 0.$$

Členy druhého stupně $y^2 - xy$ rozpadají se ve dva reálné činitele prvého stupně $y(y - x)$. Jest to tedy hyperbola, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné s přímkami $y = 0$ a $y - x = 0$, svírají tudíž úhel $\frac{\pi}{4}$. Abychom určili její osy, hledejme nejprve střed. Pošineme rovnoběžně osy, takže bude počátkem bod x_0, y_0. Transformace ta dána jest rovnicemi

$$x = x_0 + \xi,$$
$$y = y_0 + \eta.$$

x_0, y_0 určíme tak, aby v rovnici transformované odpadly členy lineární. I dostaneme souřadnice středu $x_0 = -3a$, $y_0 = -a$. Rovnice hyperboly nabude pak tvaru

$$\eta^2 - \xi\eta + 2a^2 = 0.$$

Otočme nyní soustavu souřadnic o úhel ϑ

$$\xi = X \cos \vartheta - Y \sin \vartheta,$$
$$\eta = X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta.$$

Tak dostaneme

$$Y^3 \sin\vartheta\,(\sin\vartheta - \cos\vartheta) + XY\,(\sin 2\vartheta - \cos 2\vartheta)$$
$$+ Y^2 \cos\vartheta\,(\sin\vartheta + \cos\vartheta) + 2a^2 = 0.$$

Určeme nyní ϑ tak, aby člen XY odpadl.

To vyžaduje, aby $\sin 2\vartheta - \cos 2\vartheta = 0$.

$$tg\, 2\,\vartheta = 1$$
$$2\,\vartheta = \frac{\pi}{4}$$
$$\vartheta = \frac{\pi}{8} = 22^0\,30'.$$

Pak můžeme rovnici hyperboly dáti tvar

$$\frac{X^2}{2a^2(\sqrt{2}+1)} - \frac{Y^2}{2a^2(\sqrt{2}-1)} = 1,$$

z čehož vidíme, že její hlavní poloosa jest $a\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$ a vedlejší $a\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$.

Hyperbola $y^2 - xy - ax - ay = 0$ má střed v bodě $(-3a, -a)$, z asymptot jedna jest rovnoběžná s osou π, druhá svírá s kladným směrem osy x úhel $\frac{\pi}{4}$, hlavní osa půlí ostrý úhel obou asymptot. Hlavní poloosa má délku $a\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$ a vedlejší $a\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$.

19.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x^4 + y^4 + x^2y^2 = a,$$
$$x^2 + y^2 - \quad xy = b.$$

Prof. *R. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VIa. tř. reálky v Praze III.

Levou stranu rovnice prvé lze psáti ve tvaru $\frac{x^6 - y^6}{x^2 - y^2}$ a levou stranu rovnice druhé ve tvaru $\frac{x^3 + y^3}{x + y}$. Z toho vidíme, že levá strana rovnice prvé jest dělitelna levou stranou rovnice druhé a podíl bude

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2.$$

Připojíme-li tedy k rovnici druhé rovnici vzniklou dělením obou daných rovnic, dospíváme k soustavě dvou souměrných a snadno řešitelných rovnic

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{a}{b},$$
$$x^2 - xy + y^2 = b.$$

Z toho sečtením a odečtením dostaneme

$$x^2 + y^2 = \frac{a + b^2}{2b},$$
$$2xy = \frac{a - b^2}{b}.$$

Opětovným sečtením a odečtením dospějeme po odmocnění k soustavě dvou rovnic lineárných

$$x + y = \pm \sqrt{\frac{3a - b^2}{2b}},$$
$$x - y = \pm \sqrt{\frac{3b^2 - a}{2b}}.$$

Z čehož

$$x = \frac{\pm\sqrt{3a - b^2} \pm \sqrt{3b^2 - a}}{2\sqrt{2b}}; \quad y = \frac{\pm\sqrt{3a - b^2} \mp \sqrt{3b^2 - a}}{2\sqrt{2b}}.$$

20.

Řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 + xy = 7,$$
$$y^2 + z^2 + yz = 19,$$
$$z^2 + x^2 + xz = 13.$$

Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *F. Mádle,* stud. VII. tř. r. v Rakovníce.

Odečítejme od druhé rovnice první a třetí a od třetí první. Obdržíme tak po snadné úpravě

$$(z - x)(x + y + z) = 12, \qquad (1)$$
$$(y - x)(x + y + z) = 6, \qquad (2)$$
$$(z - y)(x + y + z) = 6. \qquad (3)$$

Z rovnic (2), (3) plyne

$$y - x = z - y,$$

a tedy jednak

$$z + x = 2y, \tag{4}$$

jednak

$$x + y + z = 3y.$$

Jest tudíž na základě rovnice (1)

$$z - x = \frac{4}{y}. \tag{5}$$

Z rovnic (4), (5) plyne

$$x = y - \frac{2}{y}, \tag{6}$$

$$z = y + \frac{2}{y}. \tag{7}$$

Dosaďme tyto hodnoty do některé z daných rovnic; dostaneme tak rovnici

$$3y^4 - 13y^2 + 4 = 0,$$

ze které plyne

$$y_{1,2} = \pm 2, \; y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3};$$

k tomu přísluší

$$x_1 = 1, \; x_2 = 3, \; x_{3,4} = \pm \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$z_{1,2} = \pm 3, \; z_{3,4} = \pm \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

21.

Na dvou pevných polednících nalezněte body téže šířky, aby pro ně

a) rozdíl oblouků je spojující rovnoběžky a hlavního kruhu byl co největší,

b) plocha mezi týmiž oblouky obsažená byla co největší.

Které hodnotě se blíží šířka φ, když se rozdíl délek obou míst blíží nulle. Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Dle p. autora.

a) Je-li rozdíl šířek obou míst δ, zeměpisná šířka φ, je oblouk na rovnoběžce $r \cos\varphi \operatorname{arc}\delta$, na hlavním kruhu se obdrží řešením pravoúhlého trojúhelníka rovný:

$$2 \arcsin\left(\cos\varphi \,.\, \sin\frac{\delta}{2}\right).$$

Jde o určení extrema výrazu

$$y = r\left[\cos\varphi \,.\, \operatorname{arc}\delta - 2 \arcsin\left(\cos\varphi \sin\frac{\delta}{2}\right)\right].$$

Stačí uvažovati $\cos\varphi$ jako neodvisle proměnnou a označiti x, takže jde o extremum výrazu

$$y = r\left[x \operatorname{arc}\delta - 2 \arcsin\left(x \sin\frac{\delta}{2}\right)\right]$$

a vymizení první derivace dá

$$\operatorname{arc}\delta - 2 \,.\, \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\frac{\delta}{2}}} = 0,$$

z čehož pro x obdržíme

$$x^2 = \frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\left[1 - \left(\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\operatorname{arc}\frac{\delta}{2}}\right)^2\right].$$

Zmenšuje-li se δ, blíží se tento výraz konečné hranici. Neboť uvážíme-li, že pro malé úhly je přibližně

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$\text{blíží se } \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\operatorname{arc}\frac{\delta}{2}} \text{ hodnotě } 1 - \frac{\delta^2}{4 \,.\, 3!}.$$

Dosazení dá

$$x^2 = \frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \,.\left[1 - 1 + \frac{2\delta^2}{4 \,.\, 3!}\right] = \frac{1}{3} \,.\, \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

kterýž výraz má meznou hodnotu $\frac{1}{3}$. Jest tedy příslušná šířka určena absolutní hodnotou $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Že zde jde o maximum, plyne z jednoduché úvahy, že pro $\varphi = 0$ a $\varphi = 90^0$ jest rozdíl 0.

b) Plocha se rovná rozdílu dvou trojúhelníků, jež oba mají společný vrchol při pólu a svrchu uvedené oblouky za základnu. Plocha omezená rovnoběžkou se rovná polovině dvojúhelníka s úhlem δ, zmenšené o část pásu kulového, omezeného rovníkem a rovnoběžkou i poledníky oběma:

$$r^2 \operatorname{arc}\delta - r^2 \operatorname{arc}\delta \,.\, \sin\varphi = r^2 \operatorname{arc}\delta\,(1 - \sin\varphi).$$

Od této plochy se odečte sférický trojúhelník

$$2r^2 \operatorname{arc}\left(\frac{\delta}{2} + \xi - 90\right) = r^2\,(\operatorname{arc}\delta - \pi + 2\operatorname{arc}\xi).$$

Tedy je plocha

$$p = r^2\,[\pi - \sin\varphi \operatorname{arc}\delta - 2\operatorname{arc}\xi],$$

kde ξ plyne z rovnice

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}}{\sin\varphi},$$

takže se φ vyskytuje jen v $\sin\varphi$ a lze je označiti x, a jde pak o maximum výrazu

$$y = x \operatorname{arc}\delta - 2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}}{x}.$$

Položíme-li derivaci rovnu 0, obdržíme rovnici

$$\operatorname{arc}\delta - 2\,\frac{\frac{\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}}{x^2}}{1 + \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{\delta}{2}}{x^2}} = 0, \quad \operatorname{arc}\delta - 2\,\frac{\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}}{x^2 + \operatorname{cotg}^2\frac{\delta}{2}} = 0,$$

z čehož

$$x^2 = \frac{2\, cotg \frac{\delta}{2}}{arc\, \delta} - cotg^2 \frac{\delta}{2}.$$

Mezná hodnota řešení, když se δ blíží 0, se dá získati podobně jako prve. Je totiž

$$x^2 = cotg \frac{\delta}{2} \left[\frac{1}{arc \frac{\delta}{2}} - \frac{cos \frac{\delta}{2}}{sin \frac{\delta}{2}} \right]$$

$$\doteq \frac{cos \frac{\delta}{2}}{sin \frac{\delta}{2}} \cdot \frac{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{3!} \frac{\delta^3}{8} - \frac{\delta}{2}\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{4}\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}$$

$$\doteq \frac{cos \frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} \frac{\frac{\delta^3}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)}{\frac{\delta^2}{4}},$$

neboli $x^2 = \frac{1}{3}$, $sin\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, je-li $\delta = 0$.

22.

Tenký drát dané délky l svinut do šroubovice o n závitech, konce připojeny ke dvěma deskám kolmým k ose šroubovice. Jak daleko smí se desky od sebe vzdáliti, aby válec jimi i šroubovicí stanovený měl objem co největší? Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal pan *F. Mádle*, stud. VII. tř. r. v Rakovníce.

Označíme-li x hledanou vzdálenost obou desek, r poloměr základny válce, jest jeho objem

$$V = \pi r^2 x.$$

Je-li n počet závitů, jest délka jednoho závitu $\frac{l}{n}$ a výška jeho $\frac{x}{n}$.

Rozvineme-li plochu válcovou do roviny, přejde šroubovice v přímku. A tu bude jeden závit přeponou pravoúhlého trojúhelníka, v němž jsou odvěsny tvořeny obvodem základní kružnice a výškou závitu. Bude tedy

$$4\pi^2 r^2 = \frac{l^2}{n^2} - \frac{x^2}{n^2},$$

$$\pi r^2 = \frac{1}{4\pi n^2}(l^2 - x^2),$$

$$V = \frac{1}{4\pi n^2}(l^2 - x^2)\,x.$$

Objem V závisí na funkci

$$f(x) = (l^2 - x^2)\,x,$$

jejíž krajní hodnoty obdržíme z rovnice

$$f'(x) = l^2 - 3x^2 = 0,$$

$$x = \pm \frac{l}{3}\sqrt{3}.$$

Pro $x = \frac{l}{3}\sqrt{3}$ jest druhá derivace $f''(x) = -6x$ záporná; nastává tudíž maximum.

23.

Nalezněte pravoúhlý rovnoběžnostěn objemu největšího a nejmenšího, jsou-li dány

a) součet rozměrů a tělesná úhlopříčka,

b) povrch a tělesná úhlopříčka,

c) součet rozměrů a povrch. Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *F. Mádle*, stud. VII. tř. r. v Rakovníce.

Objem pravoúhlého rovnoběžnostěnu jest dán vzorcem (značí-li x, y, z jeho rozměry)

$$V = xyz.$$

a) Je-li dáno

$$x + y + z = S,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2,$$

tu odečtením rovnic

$$y^2 + 2yz + z^2 = (S - x)^2,$$
$$y^2 + z^2 = u^2 - x^2$$

najdeme

$$yz = x^2 - Sx + \frac{S^2 - u^2}{2},$$

takže jest

$$V = x^3 - Sx^2 + \frac{S^2 - u^2}{2} x.$$

Krajní hodnoty V nastanou pro

$$V' = 3x^2 - 2Sx + \frac{S^2 - u^2}{2} = 0;$$

z této rovnice vypočítáme

$$x_{1,2} = \frac{2S \pm \sqrt{6u^2 - 2S^2}}{6},$$

načež příslušné rozměry y, z dány jsou rovnicemi

$$y + z = S - x,$$
$$yz = x^2 - Sx + \frac{S^2 - u^2}{2}.$$

Pro x_1 jest druhá derivace $V'' = 6x - 2S$ kladná a nastává tedy minimum, pro x_2 jest $V'' < 0$, t. j. nastává maximum.

b) V tomto případě jest dáno

$$2(xy + yz + xz) = P,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

Zde si zjednáme

$$(x + y + z)^2 = P + u^2,$$
$$y + z = \sqrt{P + u^2} - x,$$
$$y^2 + 2yz + z^2 = P + u^2 - 2x\sqrt{P + u^2} + x^2,$$
$$y^2 + z^2 = u^2 - x^2,$$

tedy

$$yz = x^2 - x\sqrt{P + u^2} + \frac{P}{2},$$

takže objem V jest

$$V = x^3 - x^2\sqrt{P + u^2} + \frac{P}{2} x.$$

Z první derivace

$$V' = 3x^2 - 2x\sqrt{P + u^2} + \frac{P}{2} = 0$$

pak plyne

$$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{P + u^2} \pm \sqrt{4u^2 - 2P}}{6}.$$

Pro hořejší znaménko má objem V minimum a pro dolejší maximum, jak se lze přesvědčiti z druhé derivace

$$V'' = 6x - 2\sqrt{P + u^2}.$$

Ostatní rozměry si již snadno najdeme.

c) Zde jest dáno

$$x + y + z = S,$$
$$2xy + 2yz + 2xz = P,$$

Z těchto rovnic si podobně jako předešle najdeme

$$yz = x^2 - Sx + \frac{P}{2},$$

$$V = x^3 - Sx^2 + \frac{P}{2}x,$$

$$V' = 3x^2 - 2Sx + \frac{P}{2} = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{2S \pm \sqrt{4S^2 - 6P}}{6}.$$

Jelikož druhá derivace jest $V'' = 6x - 2S$, má objem V pro x_1 minimum a pro x_2 maximum.

24.

Vepsati do ellipsy lichoběžník, jehož jedna základna, rovnoběžná s osou, má danou délku tak, aby plocha byla co největší. Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Lad. Novák*, stud. něm. obch. akad.

Ellipsu o poloosách a, b lze pokládati za kolmý průmět kružnice o poloměru a, jejíž rovina svírá s rovinou ellipsy úhel φ, daný vztahem $cos\ \varphi = \frac{b}{a}$. Uvážíme-li, že poměr ploch se promítáním nemění a že základna lichoběžníku, jsouc rovnoběžna s osou, promítá se v úsečku téže délky, vidíme, že úloha převedena na tuto jednodušší:

Vepsati do kruhu lichoběžník $ABCD$, jehož jedna základna AB je daná tětiva.

Lichoběžník ten bude patrně rovnoramenný.

Označme α úhel středový AOB, příslušný k tětivě AB. Při α stačí se omeziti na hodnoty od 0 do π.

Dále dlužno rozeznávati dva případy.

1. Střed kružnice leží uvnitř lichoběžníku.

Označme x úhel $BOC = AOD$. Úhel x musíme patrně uvažovati v intervallu od 0 (kdy lichoběžník redukuje se na tětivu) do $\pi - \frac{\alpha}{2}$ (kdy lichoběžník přejde v trojúhelník rovnoramenný). Pak je úhel $COD = 2\pi - 2x - \alpha$.

Plocha lichoběžníku P je součtem ploch trojúhelníků AOB, $BOC = DOA$, COD, tedy

$$P = \frac{1}{2}\, a^2 \sin \alpha + 2 \cdot \frac{1}{2}\, a^2 \sin x + \frac{1}{2}\, a^2 \sin (2\pi - 2x - \alpha),$$

$$P = \frac{a^2}{2} \left(\sin \alpha + 2 \sin x - \sin (2x + \alpha)\right).$$

Plocha P závisí patrně na funkci

$$f(x) = \sin \alpha + 2 \sin x - \sin (2x + \alpha),$$

kterou dlužno uvažovati v intervallu od 0 do $\pi - \frac{\alpha}{2}$.

Derivace

$$f'(x) = 2 \cos x - 2 \cos (2x + \alpha)$$

vymizí pro hodnoty x určené vztahem

$$\cos x = \cos (2x + \alpha),$$

tedy pro hodnoty dané rovnicemi

$$2x + \alpha = \pm\, x + 2k\, \pi,$$

kdež k jest celé číslo.

Z hodnot těch

$$x = -\alpha + 2k\pi$$
$$x = \frac{-\alpha + 2k\pi}{3}$$

připadá do intervallu pro x $\left(\text{od } 0 \text{ do } \pi - \frac{\alpha}{2}\right)$ pouze $\frac{2\pi - \alpha}{3}$.

Ježto

$$f'(0) = 2\,(1 - \cos\alpha) = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} > 0$$

a $f'\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = -2\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right) = -4\cos^2\frac{\alpha}{4} < 0,$

nastává pro $x = \frac{2\pi - \alpha}{3}$ skutečně maximum. Uvážíme-li, že $f(x)$ možno psáti též ve tvaru

$$f(x) = \sin\alpha - \sin(2x + \alpha) + 2\sin x$$
$$= 2\sin x\,(1 - \cos(x + \alpha)) = 4\sin x \sin^2\frac{x + \alpha}{2},$$

pak je ona hodnota maximální

$$f\left(\frac{2\pi - \alpha}{3}\right) = 4\sin\frac{2\pi - \alpha}{3}\sin^2\frac{\pi + \alpha}{3}.$$

Funkce $f(x)$ stoupá od hodnoty $f(0) = 0$ až do maxima a pak klesá až k nejmenší hodnotě na hranici

$$f\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}.$$

Plocha P má stejný průběh a hodnoty její vypočteme ze vztahu

$$P = \frac{a^2}{2} f(x).$$

2. Střed kružnice leží vně lichoběžníku. Označme x zase úhel COB. Nyní musíme x uvažovati v intervallu od 0 (tu lichoběžník se redukuje na tětivu AB) do $\frac{\alpha}{2}$ (kdy lichoběžník přejde v trojúhelník rovnoramenný). Úhel COD jest nyní $\alpha - 2x$.

Plochu lichoběžníku P dostaneme, když od součtu ploch trojúhelníků $AOD = COB$ a DOC odečteme plochu trojúhelníka AOB.

I bude

$$P = \frac{a^2}{2}(-\sin\alpha + 2\sin x + \sin(\alpha - 2x)) = \frac{a^2}{2}\bar{f}(x),$$

klademe-li

$$\bar{f}(x) = -\sin\alpha + 2\sin x + \sin(\alpha - 2x) = 4\sin x \sin^2\frac{\alpha - x}{2}.$$

I vidíme, že jest

$$\bar{f}(x) = -f(-x).$$

Tím převedeno uvažování $\bar{f}(x)$ na uvažování $f(x)$ pro záporné hodnoty x v intervallu od $-\frac{\alpha}{2}$ do 0. V tomto intervallu jest $f'(x) = 0$ jedině pro $x = -\frac{\alpha}{3}$ a ježto

$$f'\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = -2\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = -4\sin^3\frac{\alpha}{4} < 0,$$

$$f'(0) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} > 0,$$

nastává minimum funkce $f(x)$ a tedy maximum funkce $\bar{f}(x)$ pro $x = \frac{\alpha}{3}$. Tu bude

$$\bar{f}\left(\frac{\alpha}{3}\right) = -f\left(-\frac{\alpha}{3}\right) = 4\sin^3\frac{\alpha}{3}.$$

Funkce $\bar{f}(x)$ stoupá od hodnoty $\bar{f}(0)$ do hodnoty maximální a pak klesá k nejmenší hodnotě na hranici

$$\bar{f}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

25.

K počtu logarithmickému upraviti výraz

$$\cot\alpha\cot\beta - \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta,$$

je-li

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0.$$

Prof. *R. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VIa. tř. reálky v Praze III.

Daný výraz lze psáti ve tvaru

$$(-1 + cotg\,\alpha\, cotg\,\beta) + (1 - tg\,\gamma\, tg\,\delta),$$

z něhož se obdrží zavedením *sin* a *cos* a užitím součtových vzorců

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\cos(\gamma+\delta)}{\cos\gamma\cos\delta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)[\cos\gamma\cos\delta + \sin\alpha\sin\beta]}{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta}.$$

Zbývá pouze upraviti výraz: $\cos\gamma\cos\delta + \sin\alpha\sin\beta$. Postupně vyjde:

$$2\cos\gamma\cos\delta + 2\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= \cos(\gamma+\delta) + \cos(\gamma-\delta) + \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$
$$= \cos(\gamma-\delta) + \cos(\alpha-\beta) =$$
$$= 2\cos\frac{\gamma-\delta+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta-\alpha+\beta}{2}.$$

Na základě vztahu $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^0$ jest

$$\frac{\gamma-\delta+\alpha-\beta}{2} = \alpha+\gamma-180^0, \quad \frac{\gamma-\delta-\alpha+\beta}{2} = 180^0-(\alpha+\delta)$$

a tudíž

$$\cos\gamma\cos\delta + \sin\alpha\sin\delta = \cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha+\delta).$$

Jest tedy konečně

$$cotg\,\alpha\, cotg\,\beta - tg\,\gamma\, tg\,\delta = \frac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha+\delta)}{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta}.$$

26.

Řešiti trojúhelník, je-li dán součet stran $a + b$, výška s vrcholu C a úhel γ. Prof. *R. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VIa. tř. reálky v Praze III.

Označme součet stran $a + b = m$ a v výšku z vrcholu C. Z věty cosinusové plyne

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (a+b)^2 - 2ab(1+\cos\gamma)$$
$$= m^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Plochu trojúhelníka lze vyjádřiti ve tvaru $\frac{1}{2}\, cv$ a ve tvaru $\frac{1}{2}\, ab \sin \gamma$. Z toho plyne, že

$$ab = \frac{cv}{\sin \gamma} = \frac{cv}{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

I bude

$$c^2 = m^2 - 2cv \cotg \frac{\gamma}{2}.$$

Jest tedy c určeno kvadratickou rovnicí

$$c^2 + 2cv \cotg \frac{\gamma}{2} - m^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje pouze kladný kořen této rovnice

$$c = -v \cotg \frac{\gamma}{2} + \sqrt{v^2 \cotg^2 \frac{\gamma}{2} + m^2}.$$

Úhly pak určíme na základě rovnice Cagnoli-Mollweideovy:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Odtud plyne

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{m \sin \frac{\gamma}{2}}{c}$$

a mimo to jest

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}.$$

27.

Dán poloměr koule vepsané ϱ a poloměr $r = \frac{5}{2}\varrho$ koule opsané pravidelnému čtyřbokému jehlanu. Jest vypočítati povrch a objem jehlanu jakož i poloměr koule, která se dotýká všech osmi hran. Prof. Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Jandera*, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.

Nechť jest a základní hrana, b pobočná hrana, v výška, h výška pobočné stěny jehlanu.

Vedeme-li úhlopříčný řez, obdržíme trojúhelník rovnoramenný, jemuž opsána jest hlavní kružnice opsané koule jehlanu.

V něm platí vztah

$$2v(2r - v) = a^2. \tag{1}$$

(Stačí uvažovati mocnost paty výšky vzhledem ke kružnici opsané.)

Vedeme-li vrcholem řez rovnoběžný s některou hranou podstavnou, obdržíme trojúhelník rovnoramenný, jemuž vepsán hlavní kruh koule vepsané jehlanu.

V tomto trojúhelníku bude

$$av = \varrho(a + 2h),$$

kdež

$$h^2 = v^2 + \frac{a^2}{4};$$

bude tedy

$$a(v - \varrho) = 2\varrho h.$$

Umocníme-li, obdržíme

$$a^2(v - \varrho)^2 = \varrho^2(a^2 + hv^2)$$

a odtud po snadné úpravě

$$a^2(v - 2\varrho) = 4\varrho^2 v. \tag{2}$$

Znásobením rovnic (1) a (2) dostaneme

$$(2r - v)(v - 2\varrho) = 2\varrho^2$$

a jest tedy v určeno kvadratickou rovnicí

$$v^2 - 2v(r + \varrho) + 2\varrho(2r + \varrho) = 0, \tag{3}$$

odtud dostaneme

$$v = r + \varrho \pm \sqrt{r^2 - 2r\varrho - \varrho^2} = r + \varrho \pm \sqrt{(r - \varrho)^2 - 2\varrho^2}.$$

Z rovnice (1) plyne pak, vyjádříme-li v^2 na základě (3),

$$a^2 = 4\varrho(2r + \varrho - v),$$

$$a = 3\sqrt{\varrho\left(r \mp \sqrt{(r - \varrho)^2 - 2\varrho^2}\right)}.$$

Kouli dotýkající se všech osmi hran protne opět řez úhlopříčný v hlavním kruhu. Uvážíme-li, že se koule ta dotýká hran podstavných v půlících bodech a že tečny vedené z jednoho bodu ke kouli mají tutéž délku, shledáme, že se dotýká hlavní kruh vyťatý úhlopříčným řezem ramen ve vzdálenosti $\frac{a}{2}$ od vrcholů základny a střed že má přirozeně na výšce.

Označíme-li R poloměr této koule, bude pak plynouti z podobnosti trojúhelníků

$$R : \left(b \mp \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}\sqrt{b} : v$$

a tedy

$$R = \frac{(2b \mp a)\, a\sqrt{2}}{4v}.$$

(Znaménko — neb + dle toho, dotýká-li se koule hran pobočných, neb jich prodloužení.)

Zde jest

$$b^2 = v^2 + \frac{a^2}{2} = 2rv.$$

V daném příkladě, kdy $r = \frac{5}{2}\varrho$, nalezneme

$$v_1 = 4\varrho, \quad v_2 = 3\varrho,$$
$$a_1 = 2\varrho\sqrt{2}, \quad a_2 = 2\varrho\sqrt{3},$$
$$h_1 = 3\varrho\sqrt{2}, \quad h_2 = 2\varrho\sqrt{3}.$$

Povrch dán jest vzorcem

$$P = a\,(a + 2h)$$

a tedy

$$P_1 = 32\varrho^2, \quad P_2 = 36\varrho^2,$$

objem pak vzorcem

$$V = \frac{a^2 v}{3},$$

$$J_1 = \frac{32\varrho^3}{3}, \quad V_2 = 12\varrho^3.$$

Konečně jest

$$R_1 = \frac{2\sqrt{5} \mp \sqrt{2}}{2}\,\varrho, \quad R_2 = (\sqrt{10} \mp \sqrt{2})\,\varrho.$$

28.

V komolém kuželi, přímém nebo šikmém, dány objemy dvou kuželů k_1 a k_2, jež obdržíme, když do komolého kužele vepíšeme dva kužele se pronikající tak, aby střed podstavy jednoho byl vrcholem kužele druhého; společný prostor obou těles tvořen jest právě danými kuželi k_1 a k_2. Vypočtěte objem komolého kužele a jeho zbytku, když těleso, jež tvoří oba kužele se pronikající, vyjmeme. Prof. Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení. Zaslal p. *F. Mádle*, stud. VII. tř. r. v Rakovníce.

Označme r_1, r_2 poloměry základen komolého kužele, v_1, v_2 výšky kuželů k_1, k_2, ϱ poloměr společné základny těchto kuželů. Potom jest

$$k_1 = \frac{1}{3}\pi\varrho^2 v_1, \text{ a tedy } v_1 = \frac{3k_1}{\pi\varrho^2}, \tag{1}$$

$$k_2 = \frac{1}{3}\pi\varrho^2 v_2, \text{ a tedy } v_2 = \frac{3k_2}{\pi\varrho^2}. \tag{2}$$

Je-li výška komolého kužele v_1, jest $v_1 + v_2 = v$ a tudíž

$$v = \frac{3(k_1 + k_2)}{\pi\varrho^2}. \tag{3}$$

Objem komolého kužele jest

$$K = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$r_1 = \varrho\frac{v}{v_2}, \quad r_2 = \varrho\frac{v}{v_1},$$

a užijeme-li (1) — (3), bude

$$r_1 = \varrho\frac{k_1 + k_2}{k_2}, \tag{4}$$

$$r_2 = \varrho\frac{k_1 + k_2}{k_1}. \tag{5}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do K a užijeme zároveň (3), dostaneme

$$K = (k_1 + k_2)^3 \cdot \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_2^2}\right),$$

neb též

$$K = \frac{(k_1 + k_2)^3 (k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2)}{k_1^2 k_2^2}.$$

Těleso, jež tvoří oba kužele se pronikající, skládá se ze dvou komolých kuželů K_1, K_2, z nichž první má poloměry základen r_1, ϱ, druhý r_2, ϱ. Jejich objemy jsou

$$K_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 v - k_2,$$

$$K_2 = \frac{1}{3} \pi r_2^2 v - k_1,$$

tedy

$$K_1 + K_2 = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_2^2) v - (k_1 + k_2).$$

Užijeme-li vzorců (4), (5) a (3), dostaneme

$$K_1 + K_2 = (k_1 + k_2)^3 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2}\right) - (k_1 + k_2).$$

Zbytek komolého kužele K pak jest

$$Z = K - (K_1 + K_2)$$

$$= (k_1 + k_2)^3 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_2^2}\right) - (k_1 + k_2)^3 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2}\right)$$

$$+ k_1 + k_2 = \frac{(k_1 + k_2)^3}{k_1 k_2} + k_1 + k_2,$$

$$Z = \frac{(k_1 + k_2)(k_1^2 + 3k_1 k_2 + k_2^2)}{k_1 k_2}.$$

29.

Kruhový prsten, vzniklý otočením kruhové úseče, menší polokruhu, kolem průměru, jenž plochy její neprotíná, jest půlen středním řezem úseče, t. j. řezem, který půlí tětivu úseče a stojí kolmo na ose rotační. Prof. Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení dle p. autora.

$T_1 \widehat{T_2 N T_1}$ jest úseč, jež utvoří, otáčejíc se kolem průměru $P_1 P_2$, kulový prsten; střední řez prstenem jest mezikruží o šířce MN. Na tětivě $T_1 T_2$ zvolme dva body M_1 a M_2 tak, aby bylo $MM_1 = M_2 M$; i bude také $OM_1 = OM_2$. Řezy, vedené body M_1 a M_2 kolmo ku průměru $P_1 P_2$, mají od středního řezu NN' stejné vzdálenosti a tvoří v prstenu mezikruží o šířkách $M_1 N_1$, $M_2 N_2$.

Jejich plochy jsou

$$F_1 = \pi \overline{M_1 N_1} \,.\, \overline{N_1' M_1} = \pi s_1^2,$$
$$F_2 = \pi \overline{M_2 N_2} \,.\, \overline{N_2' M_2} = \pi s_2^2,$$

jsou-li s_1 a s_2 polovice tětiv nejkratších, body M_1 a M_2 vedených. Poněvadž pak $s_2 = s_1$ (neboť $OM_2 = OM_1$), bude i

$$F_2 = F_1 = \pi (r^2 - d_1^2), \; d_1 = OM_1.$$

Mezikruží o šířkách $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ ve stejných vzdálenostech od středního řezu NN' mají plochy sobě rovné a každé z nich se rovná mezikruží, utvořenému hlavním kruhem a kruhem s tímto soustředným o poloměru $OM_1 = OM_2$. Z toho patrno, že střední řez prstenem tvoří mezikruží obsahu maximálního $F = \pi (r^2 - \overline{OM}^2)$. Dle principu Cavalieriho jsou pak obě části prstenu, vzniklé středním řezem, sobě rovny:

$$K_1 = K_2 = \frac{\pi t^2 v}{12},$$

je-li $T_1 T_2 = t$, průmět pak tohoto t na osu rotační roven v.

Poznámka:

a) $F_1 = F_2 = \pi s_1^2$. Mezikruží o šířkách $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ rovnají se kruhu o poloměru

$$s_1 = \sqrt{r^2 - \overline{OM}_1^2}.$$

Označíme-li $\sphericalangle\, MOM_1 = \omega$, úhel pak, který svírá tětiva $t = T_1 T_2$ úseče s osou rotační, písmenem τ, bude

$$s_1^2 = r^2 - \frac{\overline{OM^2}}{\cos^2 \omega} = r^2 - \frac{r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}{\cos^2 \omega},$$

$$s_1^2 = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - r^2 \sin^2 \omega}{\cos^2 \omega} = \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left[r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2\right] tg^2\, \omega.$$

Vzdálenost řezu $N_1'N_1$ od řezu středního jest

$$p_1 = \overline{OM}\, tg\, \omega \,.\, cos\, \tau,$$

$$p_1^2 = \left[r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2\right] tg^2\, \omega\, cos^2\, \tau.$$

Položme nyní $s_1 = x$, $p_1 = y$ v soustavě souřadnic pravoúhlých. I bude, poněvadž nyní

$$\left[r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2\right] tg^2\, \omega = \frac{y^2}{cos^2\, \tau}, \quad x^2 = \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{cos^2\, \tau},$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{t}{2}\, cos\, \tau\right)^2} = 1,$$

neb

$$\frac{x^2}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} = 1,$$

což jest rovnice elipsy obecně, pro $\tau = 0$ pak rovnice kružnice o poloměru $\frac{t}{2}$; v jest výška prstenu, t. j. průmět tětivy t na osu rotační.

Kdyby se tato elipsa (kružnice) otáčela kolem osy y, vytvořila by rotační elipsoid (kouli) o poloosách $\frac{t}{2}$, $\frac{v}{2}$, (kouli o poloměru $\frac{t}{2}$). Dle principu Cavalieriho rovná se pak objem našeho prstenu objemu rotačního elipsoidu (koule), jenž vznikne rotací elipsy o poloosách $\frac{t}{2}$, $\frac{v}{2}$ kolem osy v. Je-li tětiva rovnoběžna s osou rotační, je prsten roven kouli o průměru t, což známo.

Na základě této úvahy lze objem rotačního elipsoidu (a, b) snadno vypočísti ($2b$ = osa rotační):

$$a > b, \quad t = 2a, \quad v = 2b, \quad E_b = \frac{\pi t^2 v}{6} = \frac{4\pi a^2 b}{3}.$$

Toť objem sféroidu. Pro objem rotačního elipsoidu podlouhlého ($2a$ = osa rotační) vychází podobný vzorec

$$E_a = \frac{4\pi a b^2}{3}.$$

b) Ze vzorce

$$F_1 = F_2 = \pi (r^2 - d_1^2)$$

obdržíme opět krychlový obsah rotačního hyperboloidu.

Učiňme

$$d_1 = OM_1 = \frac{\overline{OM}}{\cos \omega} = x,$$

a jako v případě *a*)

$$\overline{OM} \,.\, tg\, \omega \cos \tau = y, \quad OM = d.$$

I bude

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{d^2 \cos^2 \tau} = 1,$$

což jest rovnice hyperboly.

Na hyperbole té buďtež vrcholy A, A', $OA = OA'$, bod D měj souřadnice $OC = r$, $CD = \frac{v}{2}$. Nechť dále jest E bod souměrný s D vzhledem k ose x, body C', D' a E' nechť jsou souměrny s body C, D a E vzhledem k ose y. Na asymptotě leží bod B, takže $AB = d \cos \tau$.

Otáčí-li se plocha $EADD'A'E'E$ kolem osy y, vznikne rotační hyperboloid jednoplochý, obdélník pak $EDD'E'$ vytvoří válec. Objem prstenu rovná se rozdílu obou těles, t. j. tělesu, jež vznikne otáčením plochy $AECDA$ kolem osy y. Objem hyperboloidu rotačního jednoplochého jest tedy

$$H = \pi r^2 v - \frac{\pi t^2 v}{6} = \frac{\pi \,.\, v}{6} (6r^2 - t^2),$$

$$6r^2 - t^2 = (4r^2 - t^2) + 2r^2 = 4d^2 + 2r^2,$$

$$H = \frac{\pi v}{3} (2d^2 + r^2).$$

Položme

$$d = a = OA, \quad d \cos \tau = AB = b, \quad v = ED = 2CD = 2y_1,$$
$$r = OC = x_1.$$

I bude

$$H = \frac{2\pi y_1}{3}(2a^2 + x_1^2) = \frac{2\pi a^2 y_1}{3b^2}(y_1^2 + 3b^2).$$

30.

Sečísti řadu

$$\frac{2n+1}{n}\binom{n}{1} - \frac{2n}{n-1}\binom{n}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}(n+2)\binom{n}{n}.$$

Prof. Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení. Zaslal pan *F. Mádle,* stud. VII. tř. reálky v Rakovníce.

Rozložme součinitele u binomických koefficientů v dané řadě následujícím způsobem

$$\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n},$$

$$\frac{2n}{n-1} = 2 + \frac{2}{n-1},$$

$$\frac{2n-1}{n-2} = 2 + \frac{3}{n-2},$$

$$\vdots$$

Danou řadu můžeme pak psáti ve tvaru

$$S_n = 2\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\right]$$
$$+ \frac{1}{n}\binom{n}{1} - \frac{2}{n-1}\binom{n}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} n\binom{n}{n}.$$

Výraz v hranaté závorce má hodnotu 1, uvážíme-li, že dle binomické poučky jest

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0.$$

Výraz

$$\frac{1}{n}\binom{n}{1} - \frac{2}{n-1}\binom{n}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} n\binom{n}{n}$$

můžeme psáti ve tvaru

$$1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}$$

a je tedy jeho hodnota

$$-(-1)^n\binom{n}{n}$$

a konečně

$$S_n = 2-(-1)^n.$$

Je-li n číslo liché, jest $S_n = 3$, je-li sudé, jest $S_n = 1$.

Z deskriptivní geometrie.

1.

Určiti rotační ellipsoid vejčitý, dáno-li jedno jeho ohnisko, tři roviny tečné a bod povrchu.

Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal pan *Jan A. Novák*, stud. VII. tř. reálky v Uherském Brodě.

Geometrickým místem bodů souměrných dle tečných rovin s ohniskem F_1 elipsoidu jest řídící plocha kulová **P** o středu v druhém ohnisku F_2 a poloměru rovném velké ose elipsoidu $2a$. Sestrojme tedy body M_1, M_2, M_3 souměrné s daným ohniskem F_1 dle tečných rovin τ_1, τ_2, τ_3. Z bodu A, jímž elipsoid má procházeti, opišme jako ze středu kouli **K** o poloměru $\overline{AF_1}$. Řídící koule se jí bude dotýkati, neboť z rovnice $\overline{F_1A} + \overline{AF_2} = 2a$ vyplývá, že vzdálenost středů obou koulí **P** a **K** se rovná rozdílu jich poloměrů. Střed koule **P** leží na kolmici n vztyčené ve středu kružnice, jdoucí body M_1, M_2, M_3 k rovině (M_1, M_2, M_3). Rovina (A, n) protíná kružnici (M_1, M_2, M_3) v bodech X, Y a kouli **K** ve hlavní kružnici k. Kružnice p, ležící v rovině (A, n), jdoucí body X, Y a dotýkající se kružnice k, jest hlavní kružnicí na kouli **P**, její střed druhým ohniskem F_2 a její poloměr velkou osou elipsoidu. Sestrojíme tedy nejprve body M_1, M_2, M_3, pak kolmici n, pak průsečíky X, Y roviny (A, n) s kružnicí (M_1, M_2, M_3); dále opíšeme v rovině (A, n)

kol A poloměrem $\overline{AF_1}$ kružnici k a sestrojíme kružnici p (dle věty o chordálách tří kružnic). Jelikož sestrojení kružnice p je dvojznačné, dalo by se čekati, že úloha je dvojznačná. Pan Boh. Hummel, stud. VI. tř. reálky v Příbrami, podotýká, že pouze ono z obou řešení vyhovuje, v němž koule **K** leží zcela uvnitř **P**. Druhé řešení odpovídá patrně dvojdílnému rotačnímu hyperboloidu.

2.

Třemi danými body proložiti rotační plochu válcovou, protínající jednu danou rovinu v nejhezčí ellipse ($a^2 = 2b^2$) *a druhou danou rovinu ve dvou povrchových přímkách.*

Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal p. *Ludvík Havlíček*, stud. VI. tř. reálky na Kr. Vinohradech.

Seče-li rovina ϱ daný rotační válec v nejhezčí elipse, jest odchylka povrchových přímek jeho od ϱ rovna 45^0. Seče-li rovina σ týž válec ve dvou povrchových přímkách, jsou povrchové přímky rovnoběžny se σ. Tím úloha převedena na úlohu: Najíti směr přímek, jež s rovinou ϱ svírají úhel 45^0 a jsou rovnoběžny s rovinou σ. Úloha se řeší tak, že sestrojíme rotační kužel o libovolně zvoleném vrcholu (třeba v jednom z oněch tří daných bodů), jehož kruhová základna leží v ϱ a jehož povrchové přímky od ϱ mají odchylku 45^0, a tento kužel protneme rovinou vedenou vrcholem toho kužele rovnoběžně s rovinou σ. Dostáváme tak směr povrchových přímek rotačního válce. Další postup samozřejmý. Úloha je dvojznačná, je-li odchylka rovin $(\varrho, \sigma) > 45^0$, jednoznačná, je-li $\sphericalangle (\varrho, \sigma) = 45^0$ a nemožná při $\sphericalangle (\varrho, \sigma) < 45^0$.

3.

Dvěma body proložiti plochy kulové, dotýkající se dvou ploch kulových.

Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal p. *Jan A. Novák*, stud. VII. tř. reálky v Uherském Brodě.

K řešení úlohy užijeme inversní transformace daných prvků. Pro zobrazení jest výhodno voliti za střed inverse nejvyšší bod koule $\mathbf{K}_1$ vzhledem k některé průmětně, třeba π. Bod ten budiž O. Mocnost inverse volíme rovnou mocnosti bodu O ke druhé kouli $\mathbf{K}_2$. $\mathbf{K}_1$ se transformuje v rovinu τ kolmou na průměr bodu O; zde tedy je $\tau \parallel \pi$. $\mathbf{K}_2$ přejde sama v sebe. Bodům A, B odpovídají jisté body A', B'. Máme nyní řešiti úlohu: Sestrojiti kouli $\mathbf{K}$ jdoucí body A', B' a dotýkající se roviny τ a koule $\mathbf{K}_2$.

Geometrickým místem středů ploch kulových dotýkajících se roviny τ a koule K_2 jsou dva rotační paraboloidy o společném ohnisku ve středu S koule $\mathbf{K}_2$ a parametrech $(c + r)$ resp. $(c - r)$, značí-li r poloměr koule $\mathbf{K}_2$ a c vzdálenost středu S od τ, a ose kolmé k τ. Rovina souměrnosti úsečky $A'B'$ λ protíná paraboloid $\mathbf{P}_1$ v elipse, jež se promítá do τ do kružnice k_1. Na této kružnici bude ležeti průmět středu hledané koule $\mathbf{K}$ a tedy též dotyčný bod T koule $\mathbf{K}$ s rovinou τ. Je-li Q stopa přímky $(A'B')$ na τ, musí býti $\overline{QT}^2 = \overline{QA'} \cdot \overline{QB'}$, takže T leží též na kružnici k_2 kolem bodu Q jako středu poloměrem $\sqrt{\overline{QA'} \cdot \overline{QB'}}$ opsané. Obě kružnice se protínají ve dvou bodech T_1 a T_2, které jsou zároveň průměty středů hledaných koulí. Středy leží pak v rovině λ. Provedeme-li totéž s druhým paraboloidem, dostaneme celkem 4 řešení. Sestrojíme-li zpět k těmto čtyřem koulím plochy inversně sdružené, dostáváme hledané plochy kulové.

4.

V rovině ϱ dány body A, B, na přímce k ϱ kolmé body C, D. Najíti rotační plochu válcovou, procházející body A, B, C, D, jejíž osa je rovnoběžná s rovinou ϱ.

Josef Ždárek, assist. české techniky.

Nutno rozeznávati dva případy: *a*) budou-li body A, B ležeti na téže površce, *b*) budou-li ležeti na površkách různých. Většina pánů řešitelů uvažovala pouze alternativu *a*). V tomto případě spojnice AB je jednou površkou a řešení úlohy zcela jednoduché. Žádný z pánů, již uvažovali řešení alternativy *b*), neuvažoval současně alternativu *a*). Následující řešení alternativy *b*) podal pan *Bohumil Hummel*, stud. VI. tř. reálky v Příbrami.

Osa válce o leží v rovině souměrnosti σ úsečky $\overline{CD}$. Jest $\sigma \parallel \varrho$. Kolmice vztyčená ve středu úsečky $\overline{AB}$ na rovinu ϱ protíná osu válce o. (Pozn. redakce: To je správné pouze za předpokladu, že body A, B leží na různých površkách.) Průsečík S této kolmice s rovinou σ jest tedy jedním bodem osy válce o. Koule $\mathbf{K}$ o středu v S, jdoucí bodem C, protíná válec v řídící kružnici k jdoucí body C a D a promítající se do roviny ϱ do úsečky k' procházející stopou P přímky CD na ϱ. Rovinu ϱ protíná koule $\mathbf{K}$ v kružnici k_1, jejíž střed jest ve středu úsečky $\overline{AB}$. Obě povrchové přímky válce, jež procházejí body A a B, jsou kolmy na průmět k' řídící kružnice a protínají k' v bodech A_1, B_1, které leží na k_1. Sestrojme tedy nad úsečkou $\overline{PA}$ jako průměrem kružnici k_2. k_2 a k_1 se protnou v bodě A_1. AA_1 jest směr povrchových přímek a úloha jest dvojznačná.

Pozn. redakce: Úloha je trojznačná, neboť úplné řešení tvoří dvě řešení alternativy b) a jedno řešení alternativy a).

5.

Nalézti směr a nezávisle od něho rovinu orthogonálního promítání, tak aby průměty daných dvou mimoběžných úseček měly stejnou danou délku.

Josef Ždárek, assist. české techniky.

Řešení dle p. *Bohumila Hummela*, stud. VI. tř. reálky v Příbrami.

Má-li v orthogonální projekci úsečka $a = \overline{AB}$ promítati se směrem S do úsečky délky d, tu položíme-li si úsečkou $\overline{AB}$ libovolnou rovinu (třeba promítací), jest dán směr S jako druhá odvěsna pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsnou jednou jest d a přeponou $\overline{AB}$. Otočíme-li tento $\triangle$ kol přepony $\overline{AB}$, vytvoří tato odvěsna kužel $\mathbf{K}_1$, jehož každá površka udává takový směr orthogonálného promítání, že průmět úsečky $\overline{AB}$ se rovná d. Při tomto otáčení vytvoří odvěsna d kužel $\mathbf{K}_2$, jehož každá tečná rovina jest takovou průmětnou, že délka průmětu úsečky $\overline{AB}$ do ní jest d. Obdobně dostáváme pro úsečku $\overline{CD}$ dva kužele $\mathbf{K}'_1$ a $\mathbf{K}'_2$. Najděme na kuželích $\mathbf{K}_1$ a $\mathbf{K}'_1$ takové povrchové přímky, aby byly spolu rovnoběžny. (Pozn. redakce: stotožníme vrcholy obou kuželů a hledáme společné površky. Nejlépe opíšeme kol společného vrcholu libovolným poloměrem kouli, která protne K_1 v kružnici ležící v rovině α a kužel K'_1 v kružnici v rovině β. Rovina jdoucí společným vrcholem a průsečnicí rovin (α, β) seče oba kužely ve společných přímkách.) Tyto přímky udávají směr promítání.

Rovnoběžné tečné roviny kuželů K_2 a K'_2 pak udávají hledané průmětny.

Pozn. redakce: Úloha je dvojznačná!

Z fysiky.*)

1.

Dva podobné kuželové pláště jsou spojeny vrcholy, takže jejich osy spadají v tutéž přímku. Trigonometrická tangenta polovičního úhlu u vrcholu je rovna $\sqrt{2}$. Dokažte, že moment setrvačnosti dvojkužele kolem osy jest týž, jako moment kolem kterékoli přímky na ose kolmé a styčným bodem vrcholů procházející. *R.*

Řešení.

Mysleme si dvojkuželový plášť rozdělený v elementy — kruhové prsténce, které vytnou se z něho rovinami na ose kolmými a navzájem nekonečně blízkými. Uvažujme o kruhovém prsténci, jehož střed jest od vrcholu vzdálen o x. Jeho hmota budiž m a poloměr $r = x \, . \, tg\, \alpha = x\sqrt{2}$, označíme-li poloviční vrcholový úhel kužele písmenou α. Ježto všechny body prsténce jsou od osy kužele stejně vzdáleny, jest jeho moment setrvačnosti, nebo lépe příspěvek k celkovému momentu setrvačnosti kolem osy kužele roven $mr^2 = 2mx^2$.

Moment setrvačnosti téhož prsténce kolem přímky na ose kužele kolmé a vrcholem procházející jest dle § 4. a věty Steinerovy v § 7. článku „O pohybu otáčivém" roven

$$\frac{mr^2}{2} + mx^2 = 2mx^2 = mr^2,$$

*) Všechny úlohy připínají se k výv odům článku »O pohybu otáčivém«, uveřejněném v předcházejícím dvojčísle.

čili jest týž. Ježto platí tento vztah o každém elementu pláště zvlášť, platí také o jejich součtu a tím jest tvrzení úlohy dokázáno.

Nepůsobí obtíží vypočísti přímo moment setrvačnosti pláště kuželového. Počítejme příspěvek od prsténce vytčeného dvěma na ose kolmými rovinami ve vzdálenostech x a $x + dx$ od vrcholu.

Jeho poloměr jest jako nahoře $r = x \,.\, tg\, \alpha$, a jeho hmotu m vyjádříme vhodně hmotou μ plošné jedničky pláště. Jestiť povrch prsténce roven obdélníku o základně $2\pi r$ a výšce $\frac{dx}{\cos \alpha}$, takže hmota $m = \mu \,.\, 2\pi r \,.\, \frac{dx}{\cos \alpha}$, a příspěvek dK_1 k momentu setrvačnosti K_1 jest

$$dK = mr^2 = \mu \,.\, 2\pi r^3 \frac{dx}{\cos \alpha} = 2\pi\mu \frac{tg^3\, \alpha}{\cos \alpha} \,.\, x^3 dx.$$

Celý moment setrvačnosti K_1 kuželového pláště výšky (od vrcholu počítané) h kolem osy jest dán integrálem

$$K_1 = 2\pi\mu \frac{tg^3\, \alpha}{\cos \alpha} \int_0^h x^3 dx = \frac{\pi}{2} \mu \frac{tg^3\, \alpha}{\cos \alpha} h^4.$$

Příspěvek dK_2 téhož kruhového prsténce k momentu setrvačnosti K_2 kolem přímky na ose kolmé a vrcholem procházející jest

$$dK_2 = m\left(\frac{r^2}{2} + x^2\right) = mx^2\left(\frac{tg^2\, \alpha}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} mx^2\, (tg^2\, \alpha + 2)$$

$$= \pi\mu \frac{tg^3\, \alpha + 2\, tg\, \alpha}{\cos \alpha} x^3 dx.$$

a celý moment K_2

$$K_2 = \frac{\pi}{4} \mu \,.\, \frac{tg^3\, \alpha + 2\, tg\, \alpha}{\cos \alpha} \,.\, h^4.$$

Vidíme, že $K_1 = K_2$, když

$$\tfrac{1}{2}\, (tg^3\, \alpha + 2\, tg\, \alpha) = tg^3\, \alpha,$$

čili $tg^2\, \alpha = 2$.

Moment setrvačnosti dvojkuželového pláště jest složen additivně ze dvou výrazů obdobných K_1, resp. K_2.

2.

Z tenkého kovového plechu jest zhotovena krychle strany l; určete její moment setrvačnosti kolem osy procházející středy dvou protilehlých stran, je-li hmota krychlové skřínky rovna M.

R.

Řešení.

Moment setrvačnosti krychlového pláště jest složen additivně z momentů všech šesti stran. Každá ze základen hmoty $\frac{M}{6}$ má kolem osy vertikální moment setrvačnosti K_1, jenž jest dle § 8. roven

$$K_1 = \frac{M}{6} \cdot \frac{2l^2}{12} = \frac{Ml^2}{36}.$$

Každá ze čtyř stran vertikálního pláště přispívá momentem K_2, který jest dle § 2. a věty Steinerovy

$$K_2 = \frac{M}{6} \cdot \frac{l^2}{12} + \frac{M}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{18}.$$

Moment celkový jest tudíž

$$K = 2K_1 + 4K_2 = \frac{5}{18} Ml^2.$$

3.

Těžká homogenní tyč hmoty M a délky l jest zavěšena na jednom konci, takže může volně kývati ve vertikální rovině. Tyč držíme v poloze vodorovné a pak vypustíme. Určete její úhlovou rychlost, když prochází polohou vertikální, v níž se její těžiště nachází nejníže.

R.

Řešení, jež zaslal p. *J. Páter*, stud. č. g. v Kroměříži.

Kinetická energie tyče, procházející vertikální polohou, jest $\frac{1}{2}K\omega^2$, kde ω jest hledaná úhlová rychlost. Byla získána na útraty energie polohy $Mg\frac{l}{2}$, neboť v poloze vodorovné nalézalo se těžiště ve středu tyče ležící o délku $\frac{l}{2}$ výše. Dle principu zachování energie musí

$$\tfrac{1}{2}K\omega^2 = Mg\,\frac{l}{2}.$$

K jest moment setrvačnosti tyče kolem osy na jejím konci, kterýž dle § 2. a věty Steinerovy jest

$$K = M\frac{l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}.$$

Dosazením do hoření rovnice

$$\frac{Ml^2}{3}\omega^2 = Mgl,$$

čili

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

4.

Těleso může se valiti po nakloněné rovině sklonu α. Dokažte, že těleso právě se počne smýkat, je-li $tg\,\alpha = \mu\left(1 + \frac{r^2}{\varrho^2}\right)$, kde r je poloměr křivosti a ϱ poloměr setrvačnosti tělesa valícího se; μ je koefficient tření mezi tělesem a nakloněnou rovinou.

Poznámka. Tlačí-li těleso na rovinu kolmou na ní silou F, začne se smýkati, působí-li naň s rovinou rovnoběžná síla μF. Jest tedy μF maximální tangenciální síla, která smí vzniknout ve styčném bodu tělesa a roviny. *R.*

Řešení.

Síla F, jež tlačí těleso hmoty M kolmo k nakloněné rovině, jest $Mg\cos\alpha$. Začíná-li právě smýkání, je tangenciálná síla v bodě styčném $\mu F = \mu\,Mg\cos\alpha$, kterážto působí otáčivým momentem $r \cdot \mu\,Mg\cos\alpha$ kolem středu tělesa. Je-li lineární zrychlení tělesa, rovnoběžné s nakloněnou plochou, rovno γ, jest jeho zrychlením úhlovým

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\gamma}{r}$$

a vzrůst otáčivého impulsu $K\omega$ za jedničku časovou dle § 11.

$$K\frac{d\omega}{dt} = M\varrho^2\frac{\gamma}{r} = \mu\ Mg\ r\cos\alpha.$$

Lineární zrychlení jest však

$$\gamma = g\sin\alpha - \mu\ g\cos\alpha,$$

takže dosazením

$$\frac{\varrho^2}{r^2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \mu\cos\alpha,$$

čili jak bylo dokázati

$$tg\ \alpha = \mu\left(1 + \frac{r^2}{\varrho^2}\right).$$

Bezprostředně plyne řešení, srovnáme-li (jako p. *Fr. Friedmann* a p. *Vl. Dýcka*, stud. VII. g. v Benešově, nebo p. *Jar. Mareš*, stud. VI. r. v Praze-III.) daný příklad s § 12. výše citovaného článku, jehož výsledky applikujeme.

Působící síly jsou

$$F = Mg\cos\alpha$$

a

$$\mu\ F = M\gamma\frac{\varrho^2}{r^2},$$

čili

$$\gamma = \frac{r^2}{\varrho^2}\mu\ g\cos\alpha.$$

Dle § 12. jest také

$$\gamma = \frac{g\sin\alpha}{1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2},$$

z čehož srovnáním plyne okamžitě vztah, jejž bylo dokázati.

5.

Obruč průměru 1 *m váží* 1 *kg. Jak veliká jest její kinetická energie, valí-li se po horizontální rovině postupnou rychlostí středu* 12 *km za hodinu.* *R.*

Řešení.

Energie obruče sestává jednak z energie pohybu postupného, která pro hmotu M a rychlost v jest $\frac{1}{2}Mv^2$, jednak z energie pohybu otáčivého, která je rovna $\frac{1}{2}K\omega^2$. Moment setrvačnosti K obruče jest dán součinem Mr^2, kde r její poloměr, rychlost úhlová ω pak podílem $\frac{v}{r}$. Celkový obnos energie je

$$\tfrac{1}{2}M\left(v^2 + \frac{v^2}{r^2}r^2\right) = Mv^2,$$

a jak je patrno, nezávisí vůbec na poloměru, který z počtu vypadl. Energie pohybu postupného i rotačního jsou navzájem stejné.

V numerických počtech nejsnáze objevují se chyby, nezvolíme-li především vhodné jednotky základní, jichž důsledně se v celém počtu musíme přidržeti. Počítejme v absolutní soustavě měr se základními jednotkami: centimetr, gramm, sekunda.

Pak $M = 1\ kg = 1000\ g$, a

$$v = 12\,\frac{km}{hod} = 12\,\frac{10^5\ cm}{3600\ sec} = \frac{10^3}{3}\,\frac{cm}{sec}.$$

$$Mv^2 = \frac{10^9}{9}\,\frac{g\ cm^2}{sec^2} = \frac{10^9}{9}\,erg = \frac{10^2}{9}\,Joule.$$

Ježto $1\ kgm = 9{\cdot}8\ Joule$, jest práce nutná k rozehnání obruče o málo větší jednoho kgm.

6.

Moment setrvačnosti kladky u Atwoodova padostroje jest roven $m\varrho^2$ a každá z hmot po obou stranách na niti zavěšených je rovna M. Položíme-li na jednu z nich přívažek hmoty μ, vznikne lineární zrychlení (a) pohyblivého systému dané vztahem

$$a\left(2M + \mu + m\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right) = \mu g,$$

kde r jest poloměr kladky, po němž běží nit. Dokažte to! *R.*

Řešení, jež zaslal p. *J. Páter*, stud. g. v Kroměříži.

Síla, jež uvádí na padostroji v pohyb závaží $2M$, přívažek μ i kladku, jest váha přívažku μg. Kdyby veškerá hmota kladky m^* byla rozložena po jejím obvodě, bylo by výsledné urychlení a celé soustavy stejné a mohli bychom psáti

$$\mu g = (2M + \mu + m^*)\,a.$$

Má-li ideální kladka hmoty m^* zastupovati v dynamickém ohledu danou skutečnou kladku hmoty m, musí jejich momenty setrvačnosti býti stejné, t. j.

$$m^* r^2 = m\varrho^2, \qquad m^* = m\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2,$$

čímž je tvrzení úlohy dokázáno.

Jinak lze uvažovati také takto: Nechť proběhne přívažek v poli zemské tíže v čase τ dráhu h, čímž vykonal práci $\mu g h$. Hmoty $2M$ a μ nabyly tím konečné rychlosti postupné v a kladka rychlosti úhlové $\frac{v}{r}$. Dle principu zachování energie musela se práce přívažku úplně změniti v kinetickou energii všech hmot, t. j.

$$\mu g h = \tfrac{1}{2}(2M + \mu)\, v^2 + \tfrac{1}{2} m\varrho^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \tfrac{1}{2}\left(2M + \mu + m\frac{\varrho^2}{r^2}\right) v^2.$$

Bylo-li lineární zrychlení při pohybu a, je patrně $v = a\tau$, $h = \frac{1}{2}a\tau^2$ a tedy $v^2 = 2ah$. Dosazením do napsané rovnice potvrzuje se po zkrácení h, na němž jak patrno tedy nezáleží, vztah, jejž bylo dokázati.

7.

Veliká homogenní olověná koule hmoty M a poloměru R spočívá na horizontální rovině. Do ní vnikne ve výši jejího středu projektil hmoty m, vystřelený horizontální rychlostí V.

Dokažte, že se koule počne pohybovati (valiti) po rovině s postupnou rychlostí středu v, rovnou

$$v = V\frac{m}{M}\frac{1}{1 + \frac{\varrho^2}{R^2}},$$

předpokládajíce, že se koule po rovině nesmýká. R.

Řešení, jež zkrácené zaslali pp. *J. Páter*, stud. g. v Kroměříži, a *Jar. Mareš* ze VI. g. v Praze III.

Pohyb veliké koule po nárazu sestává z postupného pohybu rychlosti v a z pohybu otáčivého rychlosti úhlové $\omega = \frac{v}{R}$. Její původní pohyb postupný byl roven nulle; aby tedy vznikl pohyb rychlostí V, musela působit po jistý velmi krátký čas τ síla zrychlující f_1 daná součinem z hmoty a okamžitého zrychlení a_1, kteréž samo jest $a_1 = \frac{dv_1}{dt}$, kde nám v_1 znamená okamžitou rychlost tělesa, kteráž se ovšem neustále mění. Z toho plyne

$$f_1 = m\frac{dv_1}{dt}.$$

Síla f_1, která působí na těžiště koule po dobu τ měníc neustále svoji velikost, jest patrně částí tlaku, kterým působí na kouli jí zachycený projektil. Podobnou úvahu musíme provésti také pro pohyb otáčivý. I jeho původní úhlová rychlost byla rovna nulle, a musela k vzniku $\omega = \frac{v}{R}$ po týž čas τ působit proměnlivá síla f_2, druhá část tlaku od projektilu, jejíž otáčivý moment vzhledem k rameni R jest

$$f_2 R = K\frac{d\omega_1}{dt},$$

(viz § 11. cit. článku), čili píšeme-li za moment setrvačnosti $K = M\varrho^2$ a za okamžitou měnící se rychlost úhlovou $\omega_1 = \frac{v_1}{R}$,

$$f_2 = M\frac{\varrho^2}{R^2}\cdot\frac{dv_1}{dt}.$$

Síla $f_1 + f_2$ jest celkovým, s časem ovšem proměnlivým tlakem projektilu na kouli. Dle principu stejné akce a reakce působila od koule na projektil po týž čas τ síla stejné velikosti a opačného směru, která způsobila, že jeho počáteční rychlost postupná V klesla na konečnou v. Byla-li v určitém okamžiku rovna v_2, můžeme zmíněnou sílu psát jakožto součin hmoty a zrychlení ve tvaru $m\frac{dv_2}{dt}$.

Géometrický součet veškerých sil, které sestávají jen z tlaků a stejných protitlaků, musí se v každém okamžiku rovnati nulle. Ježto zde veškeré síly působí v jediném, horizontálním směru, redukuje se geometrický součet na algebraický a plyne vztah

$$M\left(1 + \frac{\varrho^2}{R^2}\right)\frac{dv_1}{dt} + m\frac{dv_2}{dt} = 0.$$

Násobme tuto rovnici přírůstkem času dt a integrujme ji mezi časy 0, kdy projektil narazil na kouli a τ, kdy nabyl i s koulí konečné stálé rychlosti v. Pak máme, ježto M, m, ϱ i R jsou hodnoty neproměnné

$$M\left(1+\frac{\varrho^2}{R^2}\right)\int_0^\tau dv_1 + m\int_0^\tau dv_2;$$

čili

$$M\left(1+\frac{\varrho^2}{R^2}\right).(v-0)+m(v-V)=0,$$

neboť patrně rychlost v_1 v čase τ jest rovna v, v čase 0 rovna 0 a rychlost v_2 v čase τ jest rovna v, v čase 0 rovna V.

Zanedbáme-li vzhledem k malému m i v oproti M a V součin mv, plyne v úloze udaný vztah

$$v=V.\frac{m}{M}\frac{1}{1+\frac{\varrho^2}{R^2}}.$$

Poznámka: Zcela obdobným, ještě poněkud jednodušším počtem mohli byste dokázati vztah $m_1c_1+m_2c_2=(m_1+m_2)u$ v učebnici Jeništa-Mašek-Nachtikalově I. část, kapitola o rázu, který platí, béřeme-li v úvahu pouze rychlosti postupné. Jak tam tak i zde mohli byste dokázati analyticky, že při takovémto dokonale nepružném rázu se část původní kinetické energie ztrácí, měníc se v teplo. V prvém případě jest ztracená část rovna

$$\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(c_1-c_2)^2,$$

tedy podstatně kladnou veličinou. V našem příkladě jest to část

$$\frac{1}{2}mV^2\left[1-\frac{1}{2}\frac{m}{M}\frac{1}{1+\frac{\varrho^2}{R^2}}\right],$$

která pro malé m (resp. $m<2M$) vychází také kladnou. Tento vztah nemá však všeobecnosti prvého, ježto jsme výraz pro v odvodili zanedbavše součin mv a nevzavše ohled na kinetickou energii rotačního pohybu projektilu, který spolu s velikou koulí vykonává.

8.

Malé těžké těleso (hmotný bod) jest zavěšeno na dlouhé bezvážné niti. Držíme je nejprve tak, že napiatá nit je horizontální, a pak je vypustíme. Dokažte, že v nejnižším bodě dráhy je napětí niti rovno trojnásobné váze tělesa. *R.*

Řešení, jež zaslal p. *Vl. Dýcka* a *F. Friedmann*, ze VII. g. v Benešově.

Označíme-li délku niti písmenou l, hmotu tělesa m, moment setrvačnosti K a úhlovou rychlost ω, platí pro nejnižší bod dráhy dle principu zachování energie

$$\tfrac{1}{2}K\omega^2 = mgl$$

a

$$K = ml^2$$

čili

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}.$$

V nejnižším bodě dráhy napíná nit reakce tělesa proti síle dostředivé $ml\omega^2$ a vlastní váha tělesa, takže napětí niti je

$$S = 2mg + mg = 3mg.$$

Nezávislost na tvaru dráhy před nejnižším bodem proběhnuté plyne ze vztahu

$$S = mg + \frac{mv^2}{l}$$

a

$$v^2 = 2gl.$$

(P. *J. Páter.*)

9.

Je-li místo tělesa na niti (úloha 8.) podobně otáčivě upevněna tyč (jako v úloze 3.), a nakládáme-li s ní obdobným způsobem, je síla působící na závěsnou osu během pohybu nejnižší polohou rovna $\frac{5}{2}$-násobné váze tyče. *R.*

Řešení.

Dle výpočtu v úloze 3. jest úhlová rychlost tyče délky l a hmoty M v nejnižším bodě dráhy rovna $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$, čili

$\omega^2 = \frac{3g}{l}$. Reakce proti síle dostředivé jest dle známého vzorce $Mr\omega^2$, kde $r = \frac{l}{2}$ jest vzdálenost těžiště od bodu závěsného. Síla S působící na osu závěsnou jest tedy, připojíme-li vlastní váhu tyče,

$$S = M \frac{l}{2} \frac{3g}{l} + Mg = \frac{5}{2} Mg,$$

jak bylo dokázati.

10.

Řešte „Cvičení" v § 6. článku „O pohybu otáčivém".

R.

Řešení.

1. Kulová vrstva.

Rovina k rotační ose kolmá a středem kulové vrstvy celkové hmoty M_1 procházející, rozdělí ji na dvě stejné části. Uvažujme o jediné z nich. Hmota jedničky povrchové jest $\mu = \frac{M_1}{4\pi r^2}$, je-li r poloměr vrstvy. Dvěma rovinnými na ose kolmými řezy ve vzdálenostech x a $x + dx$ od středu vytne se z vrstvy prstenec poloměru $\varrho = \sqrt{r^2 - x^2}$, jehož hmota m jest rovna součinu z hmoty jedničky povrchové, obvodu a šířky jeho čili

$$m = \mu \,.\, 2\pi\varrho \,.\, \frac{r}{\varrho}\, dx = 2\pi\mu r dx.$$

Příspěvek prsténce k momentu setrvačnosti jest

$$m\varrho^2 = 2\pi\mu r(r^2 - x^2)\, dx.$$

Celkový moment polokulové vrstvy obdržíme, dáme-li vzrůstati x od 0 do r_1 jakožto

$$2\pi\mu r \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi\mu r^3 \int_0^r dx - 2\pi\mu r \int_0^r x^2\, dx$$

$$= 2\pi\mu r^4 - 2\pi\mu \frac{r^4}{3} = \frac{4}{3} \pi\mu r^4.$$

Moment setrvačnosti celé kulové vrstvy je dvojnásobný a tedy po dosazení hodnoty za μ roven

$$\frac{8}{3}\pi \frac{M_1}{4\pi r^2} r^4 = \frac{2}{3} M_1 r^2,$$

jak bylo nalezeno v § 6.

Jinak mohli jsme zvoliti za proměnnou veličinu středový úhel φ, definovaný vztahem $\cos\varphi = \frac{\varrho}{r}$. Pak se píše hmota prsténce šířky $r\,d\varphi$ jakožto

$$m = \mu \,.\, 2\pi\varrho \,.\, r\,d\varphi = 2\pi\mu r^2 \cos\varphi\, d\varphi.$$

a příspěvek k momentu setrvačnosti

$$m\varrho^2 = 2\pi\mu r^4 \cos^3\varphi\, d\varphi.$$

Ježto u polokulové vrstvy roste φ od 0 do $\frac{\pi}{2}$, je její moment setrvačnosti

$$2\pi\mu r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi = 2\pi\mu r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi) \cos\varphi \cos\varphi\, d\varphi$$

čili ježto

$$\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi) = \cos\varphi \quad \text{a} \quad \frac{d}{d\varphi}(\sin^3\varphi) = 3\sin^2\varphi\, d\varphi$$

$$2\pi\mu r^4 \left(\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{4}{3}\pi\mu r^4,$$

jako nahoře.

2. Koule plná.

Hmota celková jest M, poloměr R, tedy hmota jedničky objemové $\sigma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Roviny x a $x + dx$ vytnou kruhovou desku poloměru $\varrho = \sqrt{R^2 - x^2}$ a tloušťky dx, takže její hmota $m = \sigma \,.\, \pi\varrho^2 \,.\, dx$, a příspěvek k momentu setrvačnosti dle § 3.

$$\tfrac{1}{2} m\varrho^2 = \tfrac{1}{2}\pi\sigma\varrho^4\, dx = \tfrac{1}{2}\pi\sigma (R^2 - x^2)^2\, dx$$

Moment setrvačnosti polokoule jest dle toho

$$\tfrac{1}{2}\pi\sigma \int_0^R (R^2 - x^2)^2\, dx = \tfrac{1}{2}\pi\sigma \left[R^4 \int_0^R dx - 2R^2 \int_0^R x^2\, dx + \int_0^R x^4\, dx \right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\sigma\, [R^5 - \tfrac{2}{3} R^5 + \tfrac{1}{5} R^5] = \tfrac{4}{15}\pi\sigma\, .\, R^5.$$

Moment setrvačnosti celé koule jest dvojnásobný a po dosazení za σ roven $\frac{2}{5} MR^2$, jak uvedeno v § 6.

Přechod od plné koule ke kulové vrstvě mohli bychom provést následovně: Vyřízněme z plné koule poloměru $R_2 = r + dr$, plnou koncentrickou kouli poloměru $R_1 = r$. Moment setrvačnosti zbývající kulové vrstvy tloušťky dr jest pak

$$\tfrac{2}{5}\left[\tfrac{4}{3}\pi R_2^5 - \tfrac{4}{3}\pi R_5^1 = \tfrac{8}{15}\pi\,(R_2^5 - R_1^5) = \tfrac{8}{15}\pi\, .\, 5r^4\, dr,\right.$$

zanedbáme-li v rozvoji binomické poučky členy obsahující vyšší mocniny velmi malé veličiny dr. Ježto je hmota M_1 kulové vrstvy daná součinem základny a výšky rovna $M_1 = 4\pi r^2\, .\, dr$, plyne pro její moment setrvačnosti jako dříve $\frac{2}{3} M_1 r^2$.

11.

Řešte „Cvičení“ v § 8. článku „O pohybu otáčivém“.

R.

Řešení.

1. Hmota jedničky plošné daného plochého pravoúhlého rovnoběžnostěnu délky l a šířky b je $\frac{M}{lb}$, je-li M hmota celková. Tyč vytnutá řezy ve vzdálenostech $x_1 = x$ a $x_2 = x + dx$ (viz obr. 8. článku) má hmotu

$$m = \frac{M}{lb}\, .\, bdx = \frac{M}{l}\, dx.$$

Její příspěvek k momentu setrvačnosti jest dle § 2 a věty Steinerovy

$$dK = \frac{1}{12}\, mb^2 + mx^2\, \frac{1}{12}\, b^2\, \frac{M}{l}\, dx + \frac{M}{l}\, x^2 dx.$$

Celkový moment setrvačnosti K obdržíme, roste-li x od $-\frac{l}{2}$ do $+\frac{l}{2}$, jakožto

$$K = \frac{1}{12}\frac{Mb^2}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx + \frac{M}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} M (l^2 + b^2),$$

jak bylo dokázati.

2. Rozdělme válec rovinnými řezy na ose válce kolmými v samé kruhové desky a uvažujme o oné, jež leží mezi řezy ve vzdálenostech x a $x + dx$ od osy rotační. Hmota jedničky objemové jest $\frac{M}{\pi R^2 l}$ a tudíž hmota zmíněné desky

$$m = \frac{M}{\pi R^2 l} \,.\, \pi R^2 \,.\, dx = \frac{M}{l}\, dx.$$

Její moment setrvačnosti kolem průměru jakožto osy jest dle § 4. $m\frac{R^2}{4}$, tedy $\frac{MR^2}{4l}\, dx$. Dle věty Steinerovy jest její příspěvek k momentu setrvačnosti válce

$$dK = \frac{MR^2}{4l}\, dx + mx^2 = \frac{MR^2}{4l}\, dx + \frac{M}{l}\, x^2 dx$$

a tento sám jest roven

$$K = \frac{MR^2}{4l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx + \frac{M}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{MR^2}{4l}\, l + \frac{M}{l} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3$$

$$= M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right),$$

jakož bylo dokázati.

Moment setrvačnosti trubice obdržíme jakožto rozdíl momentů dvou válců o poloměrech R_2 a R_1. Ježto $M_1 = \pi R_1^2 l$, $M_2 = \pi R_2^2 l$, předpokládáme-li specif. hmotu rovnou jedničce, plyne pro žádaný moment výraz

$$\pi l\,(R_2^2 - R_1^2)\left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right),$$

nebo ježto hmotě trubice
$$\pi l\,(R_2^2 - R_1^2) = M,$$

$$K = M\left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right).$$

Případ $R_2 = R$, $R_1 = 0$ je hořením případem válce plného.

12.

Řešte „Cvičení" v § 10. článku „O pohybu otáčivém".

R.

Řešení.

Tento úkol řešíme úplně obdobně s § 10. vycházejíce z principu o zachování energie. Nechť klesne šroub v době t_1 o jistou výšku h_1, při čemž nabyl jistou konečnou rychlost postupnou v_1 a úhlovou ω_1.

Na délce v_1 jest obsaženo nv_1 celých otoček, takže rychlost úhlová ω_1 odpovídající postupné v_1 jest $\omega_1 = 2\pi n v_1$. Děje-li se, jak předpokládáme, pohyb bez tření, tu se proměnila v kinetickou energii obou pohybů práce Mgh_1, kde M jest hmota matice, jejíž gyrační poloměr budiž ϱ, čili

$$Mgh_1 = \tfrac{1}{2} Mv_1^2 + \tfrac{1}{2} Kw_1^2 = \tfrac{1}{2} Mv_1^2\,(1 + 4\pi^2\varrho^2 n^2).$$

Po uplynutí kratinké další doby $t_2 - t_1$ změnily se veličiny h_1 a v_1 v nové h_2 a v_2, takže lze psáti odečtením dvou obdobných rovnic

$$Mg\,(h_2 - h_1) = \tfrac{1}{2} M\,(v_2^2 - v_1^2)\,(1 + 4\pi^2\varrho^2 n^2).$$

Ježto lze postupný pohyb v okamžiku $t_2 - t_1$ pokládati za rovnoměrný s rychlostí $\frac{v_1 + v_2}{2}$, můžeme psáti

$$h_2 - h_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}\,.\,(t_2 - t_1)$$

a přepsati hoření rovnici v

$$Mg\,.\,\frac{v_2 + v_1}{2}\,(t_2 - t_1) = M\,(v_2 - v_1)\,.\,\frac{v_2 + v_1}{2}\,(1 + 4\pi^2\varrho^2 n^2).$$

Zrychlení γ jest dáno výrazem $\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ jakožto

$$\gamma = g \cdot \frac{1}{1 + 4\pi^2\varrho^2 n^2},$$

jenž danou úlohu řeší. Jeho správnost můžeme zkusiti na zvláštním případě $n = 0$, kdy se jedná o volný pád, kde, jak nutno, vychází $\gamma = g$. Čím větší je n, tím menší jest γ, neboť tím větší část práce spotřebuje se na kinetickou energii pohybu otáčivého.

Seznam řešitelů úloh.

Pánové:

Karel Böhm, VI. r. v Bučovicích, m. 3., 5., 11., 19., 26., 28.

Jan Císař, r. v Č. Budějovicích, m. 2., 3., 4., 5.

Jiří Dědek, VII. g. v Přerově, m. 2., 3., 5., 7., 19., 26.

Fr. Doubek, r. g. v Domažlicích, d. 2.

Vladimír Dýcka, VII. g. v Benešově, f. 1.—10.

Frant. Friedmann, VII. g. v Benešově, m. 2., 4., 7., 8., 9., 11., 19., f. 1.—10.

Miloslav Hampl, VIII. g. v Č. Budějovicích, m. 1.—9., 11., 18.—20., 22., 23.

Ludvík Havlíček, VIa r. na Král. Vinohradech, m. 2., 3., 5., 9., 13., 16., 19., 20., 26., 27., 28., d. 2.. 4.

Jan Hladík, VI. r. ve Velkém Meziříčí, m. 2., 3., 5., 7., 8., 19.

Bohumil Hummel, VI. r. v Příbrami, m. 2., 3., 4., 7., 16., d. 1.—5.

Vladimír Chrástek, IV. g. v Přerově, m. 7.

František Chytil, V. g. v Kroměříži,
m. 6., 7., 8., 9., 11.—16., 19., 20., 25.—29.

Jan Jandera, VI. r. v Kutné Hoře,
m. 1., 2., 4., 5., 7., 8., 11., 16., 18.—20., 22., 26., 27., 28.

Josef Janko, IV. g. v Třebíči,
m. 1., 3., 4., 19., 26.

Jan Kodl, VI*a* r. v Písku,
m. 1.—5., 7., 9., 10., 11., 16., 19., 20., 22., 26., 28.

Aug. Korvas, VI. g. v Přerově,
m. 19.

Karel Koutský, VII. r. v Kutné Hoře,
m. 1.—20., 22., 23., 26.—28., d. 1.—5.

Karel Květ, VI*a* r. v Č. Budějovicích,
m. 2., 5., 6., 7., 19., 22.

František Lunga, VI. r. v Prostějově,
m. 2., 3., 4., 5., 9.

Fr. Mádle, VII. r. v Rakovníce,
m. 1.—5., 7.—10., 13., 15.—20., 22.—25., 28., 30.

Jaromír Mareš, VI*a* r. v Praze III.,
m. 1.—28., d. 1.—5., f. 2.—7., 10., 11.

František Merhaut, VII. g. v Praze v Křemencově ul.,
m. 2.—7., 9., 19., 20., 28.

Ludvík Mikeš, VIII*b* g. v Č. Budějovicích,
m. 1.—9., 11., 16., 18., 19., 22., 25., 26., 28., 29.

Hugo Novák, VII. r. v Praze I.,
m. 3., f. 5.

Jan A. Novák, VII. r. v Uh. Brodě,
m. 1.—10., 13., 16.—20., 22.—24., 26.—28., d. 1.—5., f. 8.

Ladislav Novák, stud. něm. obch. akad. v Praze,
m. 1.—11., 13., 16., 18.—20., 22.—30.

Miroslav Očenášek, VI*b* r. v Praze VII.,
m. 2., 5., 7., 9., 11., 19., 26.

Jindřich Páter, VIII. g. v Kroměříži,
m. 2.—6., 8.—12., 16., 18.—20., 23., 26.—29., f. 1.—12.

Augustin Pavlík, IV. g. v Přerově,
m. 7.
Bohdan Plichta, VI*b* r. v Holešovicích,
m. 2., 7., 11., 19., 26.
Alfons Polzer, VI. r. v Litovli,
m. 2.—7., 19., 20., 22., 23., 26.—29., d. 5., f. 2., 3., 5., 8., 12.
Bohuslav Procházka, VI. r. ve Velkém Meziříčí,
m. 2., 3., 5., 7., 19., 20.
Antonín Roháč, V. g. v Praze III.,
m. 2., 3., 4., 19.
Eugen Rzimann, VII. g. v Opavě,
m. 2.—5., 10., 19., 20.
Alois V. Říman, VIII. g. v Opavě, t. č. jednoroční dobrovolník,
m. 2.—5., 16., 19., 22.
Karel Sablík, IV. g. v Přerově,
m. 7.
Antonín Srovnal, VI. g. v Praze III.,
m. 2., 3., 4., 9.
Ladislav Šalek, VI. g. v Přerově,
m. 19., 20.
Vladimír Šeda, IV. g. v Přerově,
m. 7.
Bedřich Šindelář, VI. r. v Praze II.,
m. 3., 5.—9., d. 4., 5.
J. Uřídil, V. r. v Rakovníce,
m. 1.—5., 8., 11., 16.—19., 23., 26., 29.
Josef Vodička, VII. r. v Č. Budějovicích,
m. 7., d. 2.—5.
Ant Zapletal, VI. r. v Bučovicích,
m. 2., 5., 9.
Josef Žďarský, VII. r. v Pardubicích,
m. 3., 5., 19., 20., 28.

Udělení cen.

Redakce úloh, přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto pp. řešitelům ceny, vypsané výborem „Jednoty českých mathematiků a fysiků“:

Z mathematiky:

Ceny první:

Karel Koutský, VII. r. v Kutné Hoře,
Fr. Mádle, VII. r. v Rakovníce,
Jaromír Mareš, VIa. r. v Praze-III.,
Jan A. Novák, VII. r. v Uh. Brodě,
Ladislav Novák, stud. něm. obch. akad. v Praze.

Ceny druhé:

Miloslav Hampl, VIII. g. v Č. Budějovicích,
František Chytil, V. g. v Kroměříži,
Jan Jandera, VI. r. v Kutné Hoře,
Jan Kodl, VIa. r. v Písku,
Ludvík Mikeš, VIIIb. g. v Č. Budějovicích,
Jindřich Páter, VIII. g. v Kroměříži.

Ceny třetí:

Frant. Friedmann, VII. g. v Benešově.
Ludvík Havlíček, VIa. r. na Král. Vinohradech,
František Merhaut, VII. g. v Praze, v Křemencově ul.,
Adolf Polzer, VI. r. v Litovli,
J. Uřidil, V. r. v Rakovníce.

Spis Fr. J. Studnička: Úvod do nauky o determinantech (Sborník J. Č. M. č. III.) obdrží pánové *Fr. Mádle* a *Jaromír Mareš*.

Z deskriptivní geometrie:

Spis J. Sobotka: Deskriptivní geometrie promítání parallelního (Sborník J. Č. M. č. X.) obdrží pánové

Jan A. Novák, VII. r. v Uh. Brodě,
Bohumil Hummel, VI. r. v Příbrami.

Spis F. Machovec: Zobrazování tečen a středů křivosti křivek obdrží pánové:

Jaromír Mareš, VIa. r. v Praze-III.,
Ludvík Havlíček, VIa. r. na Král. Vinohradech.

Z fysiky:

Spis dvor. rady prof. Dra. *V. Strouhala*: Akustika (Sborník J. Č. M. č. VI.) byl udělen p. *Jindř. Páterovi*, stud. VIII. g. v Kroměříži.

Spis *Briot-Pšeničkův*: Mechanická theorie tepla obdrží pánové:

Vladimír Dýcka, stud. VII. g. v Benešově,
Frant. Friedmann, stud. VII. g. tamže,
Jaromír Mareš, stud. VIa. r. v Praze-III.