Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vojtěch

Typy a kontinuitní grupy kollineací v S_3. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 4, 385--427

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121463

Typy a kontinuitní grupy kollineací v S_3.

Napsal dr. **Jan Vojtěch** v Brně.

(Pokračování.)

20. Hledajíce při kollineacích K^7 grupy složené z ${}^7G_2$, vyjdeme od invariantní roviny ϱ, na které může existovati buď ${}^4g_1$ nebo ${}^4g_2$ neb ${}^4\gamma_2$ nebo ${}^4g_3$ nebo ${}^4\gamma_3$, a vyšetřujeme, zdali v invariantních rovinách jdoucích přímkou s nebo aspoň v jedné, po příp. v invar. svazcích se středy na r (v jednom) existují dvourozměrné grupy ${}^2g_2$, resp. ${}^2g_3$, ${}^2g_4$, ${}^2g'_4$, ${}^2\gamma_3$, ${}^2\gamma_4$. Duální úvaha, jejíž základem jsou grupy obecných homologií dvourozměrných v invariantním svazku O vede ke grupám duálním, z nichž některé ostatně už při prvním rozboru se objevují.

Tak zjistíme tyto širší grupy: ${}^7\mathbf{G}_3$ s invariantní rovinou ϱ, na ní O, r, potom druhou invar. rovinou δ bodem O, v níž tvoří přímky s. invariantní při jednotlivých ${}^7G_2$ skládajících ${}^7G_3$, svazek paprskový, takže v δ jest ${}^2g_3$; a duální ${}^7\Gamma_3$ s invar. bodem O, incidentní ϱ, s, potom druhým invar. bodem na ϱ (středem svazku přímek r v ϱ). ${}^7\mathbf{G}_4$ $(\varrho O r)$ a duální ${}^7\Gamma_4$ $(O\varrho s)$; při oné tvoří přímky s prostorový svazek středu O, při této přímky r soustavu rovinnou v ϱ, ve svazcích se středem na r, resp. v rovinách skrze s jsou ${}^4\gamma_3$. ${}^7\mathbf{G}'_4$ $(\varrho r\delta)$, přímky s zaujmou ∞^2 poloh v rovině δ protínající r, na δ existuje ${}^2g_4$; ${}^7\Gamma'_4$ (OsD), přímky r mají při ní ∞^2 poloh ve svazku středu D. ${}^7\mathbf{G}_5$ $(\varrho r p)$, kde invariantní přímka p leží v ϱ; ${}^7\Gamma_5$ (Osp), p prochází bodem O; v rovinách skrze s při této, ve svazcích se středem na r v oné existuje obecně ${}^2\gamma_4$, pouze v jednom případě ${}^2\gamma_3$. ${}^7\mathbf{G}''_4$ $(\varrho O\delta D)$, soběduální, při níž s jednotlivých ${}^7G_2$ tvoří svazek středu O v δ (jež prochází také bodem D), r svazek středu D v ϱ; v ϱ existuje ${}^4\gamma_2$, v δ ${}^2g_3$. ${}^7\mathbf{G}'_5$ (ϱOD), přímky s tvoří prost. svazek středu O, r rovinný svazek v ϱ středu D; ${}^7\Gamma'_5$ $(O\varrho\delta)$, δ prochází bodem O; v D, resp. δ existuje podřazená ${}^2g'_4$. Konečně ${}^7\mathbf{G}_6$ (ϱ, r) a ${}^7\Gamma_6$ (O, s), na ϱ, resp. v O jest zde $^4g_3$, ve svazcích se středem na r, resp. v rovinách jdoucích přímkou s grupy $^2\gamma_4$.

Některé z uvedených grup nalezneme také pokládajíce K^7 za produkt $K^{10} . K^{13}$ a přihlížejíce ke grupám kollineací K^{10}.

Při základní grupě $^8G_2$ kollineací K^8 jest invariantní rovina ϱ_1 s přímkou r bodů jednotlivě samodružných, na ní existuje $^5g_1$ lim. homologií osy r středu O_2; přímkou r prochází druhá rovina invariantní ϱ_2, obsahující přímku s, jež jde bodem O_2, obsahuje druhý invar. bod O_1 a je osou svazku rovin jednotlivě samodružných; na ϱ_2 existuje $^4g_1$ osy r středu O_1, rovněž v O_2, tak jako v O_1 zase $^5g_1$. Na každé rovině jdoucí přímkou s a v každém prost. svazku se středem na r existuje $^2g_2$.

Širší grupy vyhledáme opět, připustíce na ϱ_2 (duálně v O_2) grupy $^4g_1$, $^4g_2$, $^4\gamma_2$, $^4g_3$, $^4\gamma_3$ a vyšetřujíce možné polohy roviny ϱ_1 a bodu O_2 (duálně bodu O_1 a roviny ϱ_2); na invar. rovinách přímkou s nebo ve svazcích se středy na r musí ovšem býti zajištěny známé grupy dvourozměrných kollineací [(00)0]. S druhé strany vyjdeme od grup lim. homologií v ϱ_1 (duálně v O_1), totiž od $^5g_1$, $^5g_2$ a $^5\gamma_2$. Tak nalézáme grupy:

$$^8\mathbf{G}_3\ (\varrho_2 r O_1 O_2) \text{ a } {}^8\Gamma_3\ (O_2 s \varrho_1 \varrho_2);$$
$$^8\mathbf{G}'_3\ (\varrho_2 r O_1 \varrho_1) \text{ a } {}^8\Gamma'_3\ (O_2 s \varrho_1 O_1);$$
$$^8\mathbf{G}_4\ (\varrho_2 r O_1) \text{ a } {}^8\Gamma_4\ (O_2 s \varrho_1);$$
$$^8\mathbf{G}'_4\ (\varrho_2 r O_2 \varrho_1) \text{ a } {}^8\Gamma'_4\ (O_2 s O_1 \varrho_2);$$

soběduální

$$^8\mathbf{G}''_4\ (\varrho_2 r s);$$
$$^8\mathbf{G}_5\ (\varrho_2 r \varrho_1) \text{ a } {}^8\Gamma_5\ (O_2 s O_1);$$
$$^8\mathbf{G}'_5\ (\varrho_2 r O_2) \text{ a } {}^8\Gamma'_5\ (O_2 s \varrho_2);$$
$$^8\mathbf{G}''_5\ (\varrho_1 r O_2) \text{ a } {}^8\Gamma''_5\ (O_1 s \varrho_2);$$
$$^8\mathbf{G}_6\ (\varrho_2 r) \text{ a } {}^8\Gamma_6\ (O_2 s);$$

konečně

$$^8\mathbf{G}'_6\ (\varrho_1 r) \text{ a } {}^8\Gamma'_6\ (O_1 s).$$

Ze základních grup $^9G_3$ kollineací K^9 složíme širší grupy, supponujeme-li na invariantní ϱ_2 (duálně v invar. O_1) grupy $^5g_1$, $^5g_2$ a $^5\gamma_2$. V prvém případě nalezneme $^9\mathbf{G}_4\ (\varrho_2 r O_1)$ s grupou $^5\gamma_2$ v O_1; v druhém $^9\mathbf{G}_5\ (\varrho_2 r)$, při níž přímky s jednotlivých $^9G_3$ v grupě obsažených zaujímají ∞^2 poloh v ϱ_2; v třetím případě $^9\Gamma_4\ (\varrho_2 O_1 s)$, kdy přímky r tvoří svazek rovinný v ϱ_2

středu O_1. Duální úvaha vede konečně ještě k duální ${}^9\Gamma_5$ $(O_1 s)$, při které mají r ∞^2 poloh bodem O_1.

21. Širší grupy typu K^2 složené z ${}^2G_3$ obdržíme, předpokládajíce na invariantní rovině ϱ_1 (nebo ϱ_2) všechny možné grupy rovinných kollineací typu [(00)0] a dávajíce bodu O_1 přípustné polohy; duálně pak ve svazku O_1 (nebo O_2). S druhé strany nutno vyšetřiti grupy dvourozměrných transformací na invariantní rovině ϱ_3 (duálně v O_3). Konečně zbývá supponovati mimoběžné přímky $p_{12} \equiv O_1 O_2$ a $p \equiv (\varrho_1 \varrho_2)$ invariantní, na p_{12} může býti grupa jednorozměrných transformací s 1, 2, 3 parametry, na p ovšem jen jednoparametrová, anebo jenom jednu z nich společnou všem ${}^2G_3$, skládajícím grupu; nerozšíříme však tím už počtu grup dříve nalezených.

Rozborem tím dojdeme k těmto grupám:

${}^2\mathbf{G}_4$ $(\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 O_2)$ a ${}^2\Gamma_4$ $(O_1 O_2 O_3 \varrho_2)$;

soběduální ${}^2\mathbf{G}'_4$ $(\varrho_1 \varrho_3 p p_{12})$;

${}^2\mathbf{G}_5$ $(\varrho_1 \varrho_3 p O_2)$ a ${}^2\Gamma_5$ $(O_1 O_3 p_{12} \varrho_2)$;

${}^2\mathbf{G}'_5$ $(\varrho_1 \varrho_2 O_2 O_3)$ a ${}^2\Gamma'_5$ $(O_1 O_2 \varrho_2 \varrho_3)$;

${}^2\mathbf{G}''_5$ $(\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3)$ a ${}^2\Gamma''_5$ $(O_1 O_2 O_3)$;

soběduální ${}^2\mathbf{G}'''_5$ $(\varrho_1 \varrho_3 p_{13} O_2)$;

soběduální ${}^2\mathbf{G}^{IV}_5$ $(\varrho_1 \varrho_3 O_3 O_1)$;

soběduální ${}^2\mathbf{G}^{V}_5$ $(\varrho_3 O_3 p p_{12})$;

${}^2\mathbf{G}_6$ $(\varrho_1 p O_2 O_3)$ a ${}^2\Gamma_6$ $(O_1 p_{12} \varrho_2 \varrho_3)$;

${}^2\mathbf{G}'_6$ $(\varrho_1 \varrho_3 p)$ a ${}^2\Gamma'_6$ $(O_1 O_3 p_{12})$;

${}^2\mathbf{G}''_6$ $(\varrho_1 \varrho_2 p_{23})$ a ${}^2\Gamma''_6$ $(O_1 O_2 p_{13})$;

${}^2\mathbf{G}'''_6$ $(\varrho_1 \varrho_3 O_3 p_{13})$ a ${}^2\Gamma'''_6$ $(O_1 O_3 p_{23})$;

soběduální ${}^2\mathbf{G}^{IV}_6$ $(\varrho_1 \varrho_3 O_2 O_3)$;

${}^2\mathbf{G}_7$ $(\varrho_1 O_2 O_3)$ a ${}^2\Gamma_7$ $(O_1 \varrho_2 \varrho_3)$;

${}^2\mathbf{G}'_7$ $(\varrho_1 p p_{23})$ a ${}^2\Gamma'_7$ $(O_1 p_{12} p_{13})$;

${}^2\mathbf{G}''_7$ $(\varrho_1 \varrho_2 O_3)$ a ${}^2\Gamma''_7$ $(O_1 O_2 \varrho_3)$;

${}^2\mathbf{G}'''_7$ $(\varrho_1 \varrho_3 O_3)$ a ${}^2\Gamma'''_7$ $(O_1 O_3 \varrho_3)$;

${}^2\mathbf{G}^{IV}_7$ $(\varrho_3 O_3 p_{12})$ a ${}^2\Gamma^{IV}_7$ $(O_3 \varrho_3 p)$;

${}^2\mathbf{G}_8$ $(\varrho_1 O_3 p)$ a ${}^2\Gamma_8$ $(O_1 \varrho_3 p_{12})$;

${}^2\mathbf{G}'_8$ $(\varrho_1 O_3 p_{23})$ a ${}^2\Gamma'_8$ $(O_1 \varrho_3 p_{13})$;

soběduální ${}^2\mathbf{G}''_8$ $(\varrho_1 O_2 p_{23})$;

${}^2\mathbf{G}_9$ $(\varrho_3 p_{12})$ a ${}^2\Gamma_9$ $(O_3 p)$.

Mnohem méně širších grup objeví se u kollineací typu K^3. Při ${}^3G_3$ existují na ϱ, ϱ' a v O, O' grupy ${}^2g_2$; postupem už několikrát naznačeným obdržíme grupy:

sobědualní ${}^3\mathbf{G}_4\,(r\varrho\varrho' O)$;

${}^3\mathbf{G}_5\,(r\varrho O' O)$ a ${}^3\Gamma_5\,(sO\varrho'\varrho)$;

sobědualní ${}^3\mathbf{G}'_5\,(\varrho\varrho' OO')$;

${}^3\mathbf{G}_6\,(\varrho OO')$ a ${}^3\Gamma_6\,(O\varrho\varrho')$;

sobědualní ${}^3\mathbf{G}'_6\,(r\varrho O' p)$, kde $p \equiv OO'$;

soběd. ${}^3\mathbf{G}_7\,(O\varrho' p)$ a soběd. ${}^3\mathbf{G}'_7\,(r\varrho O')$.

Konečně u kollineací typu K^4 sestrojíme širší grupy ze základní ${}^4G_4$; při této jest na ϱ_3 a v O_2 grupa kollineací ${}^2g_2$, na ϱ_1 a v O_1 však ${}^3g_3$. Nalezneme pouze grupy ${}^4\mathbf{G}_5\,(\varrho_1\varrho_3 O_2 p_{12})$ a ${}^4\Gamma_5\,(O_1 O_2 \varrho_3 p_2)$, kde p_{12} značí přímku $O_1 O_2$, p_2 přímku invariantní bodem O_2; ${}^4\mathbf{G}_6\,(\varrho_1\varrho_3 O_2)$ a ${}^4\Gamma_6\,(O_1 O_2 \varrho_3)$; soběd. ${}^4\mathbf{G}'_6\,(\varrho_3 p_{12} p_2)$; ${}^4\mathbf{G}_7\,(\varrho_3 O_1 p_{12})$ a ${}^4\Gamma_7\,(O_2\varrho_1 p_2)$; ${}^4\mathbf{G}'_7\,(\varrho_3 O_2 p_{12})$ a ${}^4\Gamma'_7\,(\varrho_3 O_2 p_2)$.

D) Užší grupy kollineací v S_3.

22. Základní grupa ${}^1G_3$, jež má ∞^3 kollineací K^1 v souhlase s počtem všech možných hodnot tří nezávislých konstant k_1, k_2, k_3, obsahuje užší grupy dvouparametrové a jednoparametrové.

Na hranách invariantního čtyrstěnu existují při ${}^1G_3$ jednoparametrové grupy projektivních transformací; v bodové řadě na hraně $O_1 O_2$ je grupa s parametrem $k_1 . k_2^{-1}$, v řadě $O_1 O_3$ s parametrem $k_1 . k_3^{-1}$, v řadě $O_1 O_4$ je parametr k_1, na $O_2 O_3$ $k_2 . k_3^{-1}$, na $O_2 O_4$ k_2, konečně na $O_3 O_4$ parametr k_3 (duálně ve svazku rovin osy $O_1 O_2$ grupa parametru k_3 atd.). Na stěnách čtyrstěnu (duálně ve vrcholech jeho jako středech prost. svazků) indukuje ${}^1G_3$ dvouparametrové grupy dvourozměrných kollineací: v rov. poli $O_1 O_2 O_4$ jest grupa ${}^1g_2$ s parametry k_1 a k_2, na stěně $O_2 O_3 O_4$ ${}^1g_2$ s parametry k_2 a k_3, na $O_1 O_3 O_4$ grupa taková s parametry k_1 a k_3, konečně na $O_1 O_2 O_3$ s parametry $k_1 . k_3^{-1}$ a $k_2 . k_3^{-1}$ (ve vrcholu O_1 grupa ${}^1g_2$ parametrů k_2 a k_3 atd.).

Supponujme $k_2 = k_1^r$, $k_3 = k_1^s$; parametry transformací na stranách invariantních trojúhelníků ve stěnách čtyrstěnu mají potom tvar

$$
\begin{array}{llll}
\text{v } O_1O_2O_4 \text{ na} & O_1O_2 \ldots k_1^{1-r} & \text{v } O_1O_3O_4 \text{ na} & O_1O_3 \ldots k_1^{1-s} \\
& O_2O_4 \ldots k_1^r & & O_3O_4 \ldots k_1^s \\
& O_4O_1 \ldots k_1^{-1}, & & O_4O_1 \ldots k_1^{-1}, \\
\text{v } O_2O_3O_4 \text{ na} & O_2O_3 \ldots k_1^{r-s} & \text{v } O_1O_2O_3 \text{ na} & O_1O_2 \ldots k_1^{1-r} \\
& O_3O_4 \ldots k_1^s & & O_2O_3 \ldots k_1^{r-s} \\
& O_4O_2 \ldots k_1^{-r}, & & O_3O_1 \ldots k_1^{s-1}.
\end{array}
$$

Jestliže r je konstantní, k_1 a s (totiž k_1 a k_3) proměnlivé parametry, existují na všech stěnách invariantního čtyrstěnu grupy ${}^1g_2$, pouze na $O_1O_2O_4$ jest jednoparametrová užší grupa ${}^1g_{1(2)}$. Existuje tedy užší grupa ${}^1\mathbf{G}_{2(3)}$, obsahující ∞^2 kollineací prostorových s invar. čtyrstěnem $O_1O_2O_3O_4$ a s parametry k_1, k_3, kdežto $k_2 = k_1^r$ s konstantním r. Při grupě ${}^1g_{1(2)}$ na $O_1O_2O_4$ jest invariantních ∞^1 rovinných křivek; protože bod O_3 jest také samodružný, jest při ${}^1G_{2(3)}$ invariantních ∞^1 ploch kuželových s vrcholem v O_3. Grupa ${}^1G_3$ obsahuje ∞^1 užších grup ${}^1G_{2(3)}$ ve shodě s ∞^1 hodnot konstanty r.

Podobně při konstantním s, proměnlivých k_1 a r (čili k_1 a k_2) existuje ${}^1G_{2(3)}$, ke které přísluší svazek ∞^1 invariantních kuželů s vrcholy v O_2, jenž protíná rovinu $O_1O_3O_4$ v ∞^1 křivkách, invariantních při ${}^1g_{1(2)}$ na $O_1O_3O_4$.

Význam konstant r a s jest obdobný jako při ${}^1g_{1(2)}$; r jest dvojpoměr čtyř rovin, jichž osa jest povrchová přímka inv. kužele s vrcholem v O_3, tři roviny procházejí přímkami O_1O_3, O_2O_3, O_4O_3, čtvrtá je tečná rovina kužele; s je dvojpoměr čtyř rovin, z nichž tři jdou povrchovou přímkou kužele vrcholu O_2 a body O_1, O_3, O_4, čtvrtá je tečná rovina kužele toho s touže přímkou jako dotyčnou.

Ještě ve dvou případech existují ${}^1G_{2(3)}$, každá se svazkem ∞^1 invariantních ploch kuželových se společným vrcholem v O_4, resp. O_1. Jsou-li totiž k_1, r i s proměnlivé, platí-li však relace $\frac{r-s}{1-r} =$ konstantě, máme zase ${}^1G_{2(3)}$, při které jest invariantní každý kužel ze soustavy ∞^1 kuželů s vrcholem v O_4; neboť zvolíme-li $k_1^{1-r} = l$ a $\frac{r-s}{1-r} = \varkappa$, máme na $O_1O_2O_3$ grupu ${}^1g_{1(2)}$ s parametry na $O_1O_2 \ldots l$, na $O_2O_3 \ldots l^{\varkappa}$, na $O_1O_3 \ldots l^{1+\varkappa}$, tedy s jediným volně proměnlivým l. Konečně máme na $O_2O_3O_4$ grupu ${}^1g_{1(2)}$ a v prostoru ${}^1G_{2(3)}$ se svazkem kuželových ploch vrcholu O_1, jestliže platí $\frac{s}{r} = \varkappa$; píšeme-li totiž zase stručněji $k_1^r = k_2$, existuje na O_2O_4 grupa proj. transformací dvojpoměru k_2, na O_3O_4 parametru $k_2^{\varkappa}$, na $O_2O_3 \ldots k_2^{1-\varkappa}$.

Jiné vztahy mezi proměnnými třemi parametry k_1, k_2, k_3 charakterisují dvouparametrové grupy druhého typu, obsažené v ${}^1G_3$. Jestliže zvolíme $\frac{1-r}{s} = \varkappa$ konstantní, vyjímáme z ${}^1G_3$ ∞^2 kollineací, jež skládají grupu ${}^1G'_{2(3)}$. Neboť na O_3O_4 jest jednoparametrová grupa jednorozměrných transformací s proměnlivým parametrem k_3, na O_1O_2 pak grupa parametru $k_3^{\varkappa}$. Kollineace grupy ${}^1G'_{2(3)}$ mají ∞^1 invariantních přímkových ploch svazku se společnými O_1O_2 a O_3O_4; libovolná přímka totiž, protínající hrany O_1O_2 a O_3O_4 nabývá při kollineacích těch ∞^1 poloh (v souhlasu s ∞^1 hodnotami jediného parametru k_3 na obou osách), kterážto soustava je vzhledem k spojitosti grupy kontinuitní a představuje plochu přímkovou. Bodem jedné z obou uv. hran jde ∞^1 příček k druhé, odtud ∞^1 přímkových ploch, při ${}^1G'_{2(3)}$ jednotlivě invariantních. Grupa ${}^1G_3$ obsahuje ∞^1 subgrup ${}^1G'_{2(3)}$ (∞^1 hodnot $\varkappa$).

Mimo to dostaneme ${}^1G'_{2(3)}$, stanovíme-li buď $\frac{1-s}{r}$ jako konstantní nebo $r-s$. V prvém případě má příslušná grupa soustavu invar. přímkových ploch s řídícími přímkami O_2O_4 a O_1O_3, na nichž existují grupy parametru k_2, resp. $k_2^{\varkappa}$

$$\left(\varkappa = \frac{1-s}{r}\right);$$

v druhém soustavu s říd. přímkami O_1O_4 a O_2O_3 s grupami parametru k_1, resp. $k_1^{\varkappa}$ ($\varkappa = r - s$).

Jestliže volíme při kollineacích grupy ${}^1G_3$ veličiny r i s konstantní, rozpadá se ${}^1G_3$ na ∞^2 jednoparametrových subgrup

${}^1G_{1(3)}$. Jediný proměnlivý parametr takové ${}^1G_{1(3)}$ jest k_1, na všech stěnách invar. čtyrstěnu existují ${}^1g_{1(2)}$; poněvadž konstantám r a s lze dáti ∞^2 hodnot, jest týž počet subgrup ${}^1G_{1(3)}$ v ${}^1G_3$. Grupě ${}^1G_{1(3)}$ přísluší 4 svazky invariantních ploch kuželových se společnými vrcholy ve 4 vrcholech čtyrstěnu a 3 svazky invariantních ploch přímkových s mimoběžnými hranami čtyrstěnu jako přímkami řídícími. Těchto 7 soustav, každá s ∞^1 plochami, protíná se v systému ∞^2 křivek prostorových. Každé soustavě ∞^2 křivek jednotlivě invariantních patří jedna dvojice hodnot r, s; význam těchto konstant lze teď spolu takto vyjádřiti: Vedeme-li tečnou v některém bodě některé z invariantních prostorových křivek oskulační rovinu a čtyři roviny, jež tečnu tu spojují s vrcholy invar. čtyrstěnu, máme pět rovin, které určují dvojpoměry hodnot r a s. Nebo duálně: Bod dotyčný na tečně k invar. křivce stanoví se čtyřmi průsečíky tečny se stěnami čtyrstěnu dvojpoměry r a s. Platí na př. $(214\,A) = r$, $(314\,A) = s$, kde A značí bod dotyčný na invar. křivce, 1, 2, 3, 4 pak průsečíky bodu toho se stěnami čtyrstěnu, ležícími resp. proti vrcholům O_1, O_2, O_3, O_4. Tečny invar. křivek patří tetraedrálnímu komplexu, jehož konstanta $(1234) = \frac{r(s-1)}{s-r}$ (jak nalezneme z hořejších vztahů nebo z výrazu pro konstantu, uvedeného při ${}^1G_3$).

Spolu se soustavou ∞^2 prostorových křivek jsou ovšem při ${}^1G_{1(3)}$ invariantní rozvinutelné plochy tvořené jich oskulačními rovinami; dále komplexy přímek protínajících jednotlivé křivky a pod.*).

Z užších grup ${}^1G_{1(3)}$, ${}^1G_{2(3)}$, ${}^1G'_{2(3)}$ základní grupy ${}^1G_3$ lze konstruovati zase grupy širší; tyto příslušejí pouze některým

*) Výsledky zde nalezené lze odvoditi analyticky na základě rovnic kollineace K^1. Volíme-li invariantní čtyrstěn za čtyrstěn souřadnic a označíme-li bod původní (x_1, x_2, x_3, x_4), transformovaný (y_1, y_2, y_3, y_4), jest K^1 dána vztahy $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = k_1x_1 : k_2x_2 : k_3x_3 : x_4$. Jednotlivé homologie, skládající K^1 mají totiž rovnice $y_\mu : k_\mu x_\mu = y_\nu : x_\nu$, kde $\mu = 1$ nebo 2 nebo 3, $\nu = 1, 2, 3, 4$, ale $\nu \neq \mu$. Při ${}^1G_{1(3)}$ platí $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = k_1x_1 : k_1^r x_2 : k_1^s x_3 : x_4$; eliminací proměnného k_1 dostaneme rovnice invar. útvarů.

z uvedených dříve grup širších, vytvořených grupami ${}^1G_3$. Mají ovšem počet parametrů o 2 nebo 1 menší.

Dotčené širší grupy, složené z ${}^1G_{1(3)}$, nalezneme, majíce na zřeteli všechny možné užší grupy kollineací dvourozměrných a starajíce se, aby byly zajištěny ve dvou rovinách (nebo svazcích prost.). Podobně širší grupy ku ${}^1G_{2(3)}$ dostaneme v případech, kdy na jedné rovině (v prost. svazku) existuje užší grupa buď ${}^1g_{1(2)}$ nebo ${}^1g_{2(3)}$ neb ${}^1g_{3(4)}$, ${}^1\gamma_{3(4)}$, ${}^1g_{4(5)}$; ${}^1G'_{2(3)}$ skládají grupy širší, pokud na dvou mimoběžných řadách bodových nebo na jedné řadě a ve svazku rovin téže osy existují grupy jednorozměrných transformací, charakterisované touž konstantou $\varkappa$.

Ze subgrup ${}^1G_{1(3)}$ (r, s konst.) lze složiti tyto nové: soběduální ${}^1G_{2(4)}$, ${}^1G_{3(5)}$ a ${}^1\Gamma_{3(5)}$, sd. ${}^1G'_{3(5)}$, ${}^1G_{4(6)}$ a ${}^1\Gamma_{4(6)}$, sd. ${}^1G'_{4(6)}$, sd. ${}^1G''_{4(6)}$, ${}^1G'_{5(7)}$ a ${}^1\Gamma'_{5(7)}$, sd. ${}^1G''_{5(7)}$, ${}^1G'_{6(8)}$ a ${}^1\Gamma'_{6(8)}$. Označení grup je takové jako u původních, jimž jednotlivé z těchto korrespondují; počet parametrů oněch připojen v závorkách.

Ze subgrup ${}^1G_{2(3)}$ a ${}^1G'_{2(3)}$ můžeme složiti širší: sd. ${}^1G_{3(4)}$, ${}^1G_{4(5)}$ a ${}^1\Gamma_{4(5)}$, sd. ${}^1G'_{4(5)}$, ${}^1G_{5(6)}$ a ${}^1\Gamma_{5(6)}$, sd. ${}^1G'_{5(6)}$, sd. ${}^1G''_{5(6)}$, ${}^1G'_{6(7)}$ a ${}^1\Gamma''_{6(7)}$, sd. ${}^1G''_{6(7)}$, ${}^1G'_{7(8)}$ a ${}^1\Gamma'_{7(8)}$, sd. ${}^1G''_{7(8)}$ a sd. ${}^1G'_{8(9)}$. U některých grup jsou možny i dvě.

Existují patrně v uvedených případech grupy jednotlivých složek, totiž homologií, jichž produkt tvoří kollineaci K^1; tedy z každé homologie (všech tří nebo dvou) buď rovina osová nebo střed.

23. Základní grupa ${}^2G_3$ indukuje na samodružných paprscích společného invariantního útvaru svých kollineací jednoparametrové grupy proj. transformací jak řad bodových, tak svazků rovin, jichž jsou osami: na O_1O_3 a O_2O_3 existují grupy proměnlivého parametru k_1, resp. k_2 (k_2, resp. k_1), v řadě bodové na O_1O_2 (a ve svazku rovin osy p) grupa transformací [OO] dvojpoměru $k_1 \,.\, k_2^{-1}$, v bodové řadě na p (a ve svazku rovin osy O_1O_2) grupa transformací [(OO)] parametru α. Na ϱ_1 a ϱ_2 (v O_2 a O_1) máme ${}^2g_2$, na ϱ_3 (a v O_3) však ${}^1g_2$.

Položme $k_1 = m^\alpha$, $k_2 = n^\alpha$. Jestliže jest m konstantní, existuje na ϱ_2 užší jednoparametrová grupa ${}^2g_{1(2)}$ prom. parametru α, v prostoru pak užší dvouparametrová ${}^2\mathbf{G}_{2(3)}$ prom. parametrů α, k_2. Poněvadž při ${}^2g_{1(2)}$ jest soustava rovinných křivek invariantních, přísluší k ${}^2G_{2(3)}$ svazek ∞^1 invariantních ploch kuželových se společným vrcholem v O_2. Podobně při konstantním n a proměnlivých a, k_1 máme grupu ${}^2G_{2(3)}$, při které jest invariantní každý kužel svazku s vrcholem v O_1.

Jestliže mimo a jsou m i n proměnlivé, platí však mezi nimi relace $n = m^r$ s konstantním r, máme sice na ϱ_1 i na ϱ_2 dvouparametrovou grupu ${}^2g_2$ rovinných kollineací, kdežto na ϱ_3 jenom jednoparametrovou ${}^1g_{1(2)}$ s proměnným parametrem k_1; podél O_1O_3 jest totiž parametr k_1, podél O_2O_3

$$k_2 = n^a = (m^r)^a = k_1^r,$$

na O_1O_2 pak

$$\left(\frac{m}{n}\right)^a = k_1^{1-r}.$$

Dle toho jest v prostoru užší grupa druhého typu ${}^2\mathbf{G}'_{2(3)}$, jež indukuje na ϱ_1 a ϱ_2 grupy ${}^2g_2$, na ϱ_3 však ${}^1g_{1(2)}$. Na ϱ_3 existuje svazek ∞^1 invariantních křivek a duálně v O_3 svazek ∞^1 invariantních kuželů.

Platí-li konečně při proměnlivých a, m, n vztah $\dfrac{m}{n} =$ konstantě, existují na rovinách ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 dvouparametrové grupy, na mimoběžkách O_1O_2 a $(\varrho_1\varrho_2) \equiv p$ máme však jednoparametrové grupy proj. transformací s týmž proměnlivým parametrem a. Odtud plyne existence užší grupy dvouparametrové třetího druhu ${}^2\mathbf{G}''_{2(3)}$, při jejíž kollineacích jest invariantní ve všech svých členech svazek ∞^1 přímkových ploch s řídícími přímkami O_1O_2 a p. Grupa ${}^2G_3$ obsahuje ∞^1 dvouparametrových subgrup každého druhu.

Jsou-li m i n konstantní, jest jediným prom. parametrem a, učiněnou supposicí vyjímáme z ${}^2G_3$ užší grupu jednoparametrovou ${}^2\mathbf{G}_{1(3)}$; ${}^2G_3$ rozpadá se v ∞^2 takových subgrup. Grupa ${}^2G_{1(3)}$ indukuje na ϱ_1 a ϱ_2 grupy ${}^2g_{1(2)}$, na ϱ_3 ovšem ${}^1g_{1(2)}$; patří k ní 3 svazky ∞^1 invariantních rovinných křivek dvojího druhu, duálně 3 svazky ∞^1 invariantních ploch kuželových, soustava ∞^1 inv. ploch přímkových, opírajících se o O_1O_2 a p, konečně soustava ∞^2 prostorových křivek jednotlivě invariantních jako průseků uvedených ploch.

Z užších grup ${}^2G_{1(3)}$, ${}^2G_{2(3)}$, ${}^2G'_{2(3)}$, ${}^2G''_{2(3)}$ možno složiti opět řadu grup širších obdobně jako z ${}^2G_3$ vznikají uvedené širší grupy kollineací typu K^2. Na invariantním útvaru širších grup dříve vypočtených, totiž na společné části invariantních útvarů grup ${}^2G_3$, jež grupy ty skládají, snadno vyšetříme, ke kterým z nich patří užší grupy s počtem parametrů o 1 resp. o 2menším. Grupy sestrojené z ${}^2G_{1(3)}$ patrně existují, jestliže na dvou invar. rovinách nebo ve 2 inv. prost. svazcích nebo konečně na inv. rovině a ve svazku, jenž k ní duálně nepřísluší, existují užší grupy kollineací dvourozměrných. Tak nalezneme mimo ${}^2G_{1(3)}$ tyto grupy užší: ${}^2G_{2(4)}$ a ${}^2\Gamma_{2(4)}$; sd. ${}^2G'_{2(4)}$; ${}^2G_{3(5)}$ a ${}^2\Gamma_{3(5)}$; ${}^2G'_{3(5)}$ a ${}^2\Gamma'_{3(5)}$; ${}^2G''_{3(5)}$ a ${}^2\Gamma''_{3(5)}$; sd. ${}^2G'''_{3(5)}$; ${}^2G_{4(6)}$ a ${}^2\Gamma_{4(6)}$; ${}^2G'_{4(6)}$ a ${}^2\Gamma'_{4(6)}$; ${}^2G''_{4(6)}$ a ${}^2\Gamma''_{4(6)}$; sd. ${}^2G^{IV}_{4(6)}$; ${}^2G_{5(7)}$ a ${}^2\Gamma_{5(7)}$; ${}^2G'_{5(7)}$ a ${}^2\Gamma'_{5(7)}$; ${}^2G''_{5(7)}$ a ${}^2\Gamma''_{5(7)}$; konečně ${}^2G_{6(8)}$ a ${}^2\Gamma_{6(8)}$.

Podobně vyhledáme užší grupy složené z ${}^2G_{2(3)}$ resp. ${}^2G'_{2(3)}$ nebo ${}^2G''_{2(3)}$; zjistíme-li totiž, při kterých širších existuje na ϱ_1 nebo ϱ_3 (nebo v duálně příslušných svazcích prost.) užší grupa kollineací dvourozměrných nebo konečně, kdy na O_1O_2 a na p (neb v řadě na jedné z nich a ve svazku rovin, jehož je tato osou) existují transformace téže povahy. Ke grupám ${}^2G_{2(3)}$ a ${}^2G''_{2(3)}$ nalezneme nové u týchž širších jako prve ke ${}^2G_{1(3)}$, totiž u ${}^2G_4$ a ${}^2\Gamma_4$, sd. ${}^2G'_4$, ${}^2G_5$ a ${}^2\Gamma_5$, ${}^2G'_5$ a ${}^2\Gamma'_5$, ${}^2G''_5$ a ${}^2\Gamma''_5$, sd. ${}^2G'''_5$, ${}^2G_6$ a ${}^2\Gamma_6$, ${}^2G'_6$ a ${}^2\Gamma'_6$, ${}^2G''_6$ a ${}^2\Gamma''_6$, sd. ${}^2G^{IV}_6$, ${}^2G_7$ a ${}^2\Gamma_7$, ${}^2G'_7$ a ${}^2\Gamma'_7$, ${}^2G''_7$ a ${}^2\Gamma''_7$, ${}^2G_8$ a ${}^2\Gamma_8$ s počtem parametrů ovšem o 1 menším. Ke grupě ${}^2G'_{2(3)}$ obdržíme však nové mimo to u grup ${}^2G^{IV}_5$ sd., ${}^2G'''_6$ a ${}^2\Gamma'''_6$, ${}^2G'''_7$ a ${}^2\Gamma'''_7$ a u ${}^2G'_8$ s ${}^2\Gamma'_8$.

24. Při základní grupě ${}^3G_3$ kollineací K^3 existují na invariantních paprscích r a s jednoparametrové grupy transformací [(00)] s parametry a resp. b (totiž v řadách bodových osy r a s, duálně ve svazcích rovin osy s a r), kdežto na OO' jest grupa transformací [00] parametru k. Na invar. rovinách ϱ a ϱ', taktéž v prost. svazcích O a O', jsou grupy ${}^2g_2$ s parametry a, k resp. b, k.

Položme $k = m^a$, $b = na$. Supponujeme-li m konstantní, vzniká na ϱ užší grupa ${}^2g_{1(2)}$ proměnlivého parametru a, na ϱ' zůstává ${}^2g_2$ s parametry b, k; z ${}^3G_3$ vybíráme tím ∞^2 kollineací, jež tvoří grupu ${}^3G_{2(3)}$, kterých ovšem ${}^3G_3$ obsahuje ∞^1, jednu ke každé hodnotě konstantního m. Při ${}^3G_{2(3)}$ máme na ϱ svazek ∞^1 invariantních křivek rovinných, v O pak svazek ∞^1 invar. ploch kuželových. Podobně jsou-li m i n sice (spolu s a) proměnné, ale platí-li vztah

$$m^{\frac{1}{n}} = konst.,$$

existuje na ϱ grupa ${}^2g_2$, na ϱ' však ${}^2g_{1(2)}$ s parametrem b, neboť druhý

$$k = m^a = m^{\frac{b}{n}} = \left(m^{\frac{1}{n}}\right)^b;$$

v prostoru jest v tomto případě opět ${}^2G_{2(3)}$.

Jestliže však jest n konstantní, parametry k, a volně proměnlivé, jsou na ϱ i ϱ' grupy ${}^2g_2$, na paprscích r i s jednoparametrové grupy proj. transformací téhož parametru a, v prostoru tedy nový druh užší grupy ${}^3G'_{2(3)}$. Při této ${}^3G'_{2(3)}$ jest invariantních ∞^1 ploch přímkových se společnými řídícími přímkami r a s; plochy ty jsou 2. stupně. Jsou totiž bodové řady na r a s spolu projektivní, přiřadíme-li bodům O', A', B' na r body O, A, B na s; body O' a O jsou invariantní. A' libovolný na r, B' jemu přiřazený v transformaci [(OO)] parametru a, bod A libovolný na s, B jemu korrespondující v [(OO)] parametru na na s; volbou dvojic AB resp. $A'B'$ jsou stanoveny transformace na r a s, spojnice OO', AA', BB' určují přímkovou plochu 2. stupně, ∞^1 polohám bodu A přísluší ∞^1 takových ploch jednotlivě při ${}^2G'_{2(3)}$ invariantních. ${}^3G_3$ obsahuje zase ∞^1 subgrup ${}^3G'_{2(3)}$ v souhlase s ∞^1 hodnotami veličiny n.

Jsou-li m i n konstantní, a pak jediný proměnlivý parametr, vznikají na ϱ i ϱ' grupy ${}^2g_{1(2)}$, v prostoru užší ${}^3G_{1(3)}$, jichž obsahuje ${}^3G_3$ ∞^2. Ku ${}^3G_{1(3)}$ patří dvě soustavy po ∞^1 invar. křivek rovinných v ϱ a ϱ', dvě soustavy invariantních kuželových ploch s vrcholy v O a O', svazek invariantních ploch 2. stupně se spol. řídícími přímkami r a s, konečně ∞^2 invariantních křivek prostorových, průseků ploch oněch soustav.

Stejným vyšetřováním jako prve při kollineacích K^1 a K^2 nalezneme užší grupy k širším grupám kollineací K^3, složené z užších ${}^3G_{2(3)}$, ${}^3G'_{2(3)}$ a ${}^3G_{1(3)}$. Ze subgrup ${}^3G_{2(3)}$ skládají se grupy, příslušné jako užší ku sd. ${}^3G_4$, ${}^3G_5$ a ${}^3\Gamma_5$, sd. ${}^3G'_5$, ${}^3G_6$ a ${}^3\Gamma_6$, sd. ${}^3G'_6$, sd. ${}^3G_7$ a sd. ${}^3G'_7$; mají ovšem vesměs o jeden parametr méně než tyto. Z ${}^3G_{1(3)}$ lze konstruovati pouze grupy sd. ${}^3G_{2(4)}$, ${}^3G_{3(5)}$ a ${}^3\Gamma_{3(5)}$, sd. ${}^3G'_{3(5)}$; podobně ze subgrup ${}^3G'_{2(3)}$.

25. Základní grupa kollineací K^4 je čtyřparametrová ${}^4G_4$; na invar. rovině ϱ_1 a ve svazku O_1 indukuje grupu ${}^3g_3$, na rovině ϱ_3 a ve svazku O_2 grupu ${}^2g_2$, v řadě bodové $p_{12} \equiv O_1 O_2$ a ve svazku rovin osy $p_2 \equiv (\varrho_1 \varrho_3)$ grupu proj. transformací [00] parametru k, v řadě p_2 a ve svazku rovin osy p_{12} jednoparam. grupu transformací limitních [(00)].

Při ${}^3g_3$ jest na ϱ_1 invariantní (v celku) soustava ∞^3 kuželoseček dotýkajících se přímky p_2 v bodě O_2, v O_1 jest invariantní systém ∞^3 ploch kuželových, procházejících oněmi kuželosečkami. Jestliže čtvrtý parametr k je závislý na parametrech grupy ${}^3g_3$, vzniká v ϱ_2 a v O_2 užší grupa ${}^2g_{1(2)}$, při které existuje na ϱ_2 svazek ∞^1 invariantních křivek rovinných, v O_2 svazek inv. ploch kužėlových; v prostoru máme užší grupu ${}^4\mathbf{G}_{3(4)}$.

Grupa ${}^3g_3$ má užší grupy ${}^3g_{2(3)}$ a ${}^3g_{1(3)}$; při oné jest v celku invariantní na ϱ_1 systém ∞^2 kuželoseček s dotykem 2. stupně v O_2, při této máme svazek ∞^1 kuželoseček invar. s dotykem 3. stupně v O_2; v O_1 jsou souhlasně plochy kuželové, dotýkající se podél p_{12}. Přistoupí-li k parametrům grupy ${}^3g_{2(3)}$ nový volně proměnlivý parametr k, vzniká v prostoru ${}^4\mathbf{G}'_{3(4)}$; je-li však k parametr závisle proměnný, máme ${}^4\mathbf{G}_{2(4)}$. V případě grupy ${}^3g_{1(3)}$ existuje v prostoru buď ${}^4\mathbf{G}'_{2(4)}$ nebo ${}^4\mathbf{G}_{1(4)}$ dle toho, je-li k parametr nezávislý nebo závisle proměnný.

Jako při ${}^4G_4$ vznikají užší grupy ${}^4G_{3(4)}$, ${}^4G'_{3(4)}$, ${}^4G_{2(4)}$, ${}^4G'_{2(4)}$ a ${}^4G_{1(4)}$, podobně při širších ${}^4G_5$ a ${}^4\Gamma_5$, ${}^4G_6$ a ${}^4\Gamma_6$, ${}^4G_7$ a ${}^4\Gamma_7$ odvodíme užší grupy s počtem parametrů o 1 resp. 2 a 3 menším.

Kollineace K^5 tvoří v počtu ∞^6 základní grupu ${}^5G_6$, jejíž invariantní útvar obsahuje pouze rovinu ϱ_3, incidentní bod O_1 a s oběma incidentní přímku $O_1 O_2 \equiv p$. Grupa ${}^5G_6$ indukuje na ϱ_3 grupu ${}^3g_3$, v O_1 pak zase ${}^3g_3$, jejíž parametry jsou nezávislé na parametrech uv. grupy kollineací v ϱ_3; na ϱ_3 jest invariantní soustava ∞^3 kuželoseček s dotykem v O_1, v O_1 soustava ∞^3 kuželových ploch, dotýkajících se vespolek a roviny ϱ_3 v přímce p.

Poněvadž obě tříparametrové grupy dvourozměrných kollineací na ϱ_3 a v O_1 mohou míti užší grupy ${}^3g_{2(3)}$ a ${}^3g_{1(3)}$, jsou možny tyto případy užších grup v prostoru: Na ϱ_3 existuje ${}^3g_3$, v O_1 grupa ${}^3g_{2(3)}$, v prostoru ${}^5\mathbf{G}_{5(6)}$, při níž jest invariantní soustava ∞^3 kuželoseček na ϱ_3 a systém ∞^2 kuželů s vrcholem v O_1 a dotykem 2. stupně podél p. Na ϱ_3 jest ${}^3g_3$, v O_1 grupa ${}^3g_{1(3)}$, v prostoru ${}^5\mathbf{G}_{4(6)}$, při které jest invar. systém ∞^3 kuželoseček na ϱ_3 a svazek ∞^1 invar. kuželových ploch s vrcholem v O_1 a dotykem 3. stupně podél p. Na ϱ_3 máme ${}^3g_{2(3)}$, v O_1 základní ${}^3g_3$, v prostoru ${}^5\Gamma_{5(6)}$ s invar. soustavou ∞^2 kuželoseček v ϱ_3 a soustavou ∞^3 ploch kuželových v O_1. Na ϱ_3 existuje ${}^3g_{2(3)}$, v O_1 rovněž ${}^3g'_{2(3)}$, v prostoru ${}^5\mathbf{G}'_{4(6)}$, k níž přísluší ∞^2 kuželoseček v ϱ_3 a ∞^2 kuželů v O_1, oba systémy s dotykem 2. stupně v celku invariantní. Na ϱ_3 může býti ${}^3g_{2(3)}$, v O_1 pouze ${}^3g_{1(3)}$, v prostoru ${}^5\mathbf{G}_{3(6)}$ s invar. systémem ∞^2 kuželoseček v ϱ_3 a soustavou ∞^1 invar. kuželů v O_1. Dále existují ${}^5\Gamma_{4(6)}$ s grupou ${}^3g_{1(3)}$ v ϱ_3 a ${}^3g_3$ v O_1, ${}^5\Gamma_{3(6)}$ s podřazenou grupou ${}^3g_{1(3)}$ v ϱ_3 a ${}^3g_{2(3)}$ v O_1; jestliže v ϱ_3 jest ${}^3g_{1(3)}$ a v O_1 také ${}^3g_{1(3)}$, máme v prostoru ${}^5\mathbf{G}_{2(6)}$, při které jest v ϱ_3 svazek ∞^1 invariantních kuželoseček, v O_1 pak svazek ∞^1 ploch kuželových. Je-li konečně na ϱ_3 i v O_1 grupa ${}^3g_{1(3)}$, avšak oba parametry těchto grup na sobě závislé, vzniká v prostoru ${}^5\mathbf{G}_{1(6)}$.

Má tedy v celku základní ${}^5G_6$ šest užších grup, z nich 3 soběduální (${}^5G'_{4(6)}$, ${}^5G_{2(6)}$, ${}^5G_{1(6)}$), ke třem ještě 3 duální (${}^5G_{5(6)}$ a ${}^5\Gamma_{5(6)}$, ${}^5G_{4(6)}$ a ${}^5\Gamma_{4(6)}$, ${}^5G_{3(6)}$ a ${}^5\Gamma_{3(6)}$).

26. Základní grupa kollineací K^6 jest, jak uvedeno, ${}^6G_2$ s invariantním útvarem, jenž obsahuje řadu r bodů vesměs samodružných, osu s rovin téže vlastnosti; v řadě s existuje jednoparametrová grupa transformací [00] s body samodružnými O_1 a O_2 parametru $k_1 \,.\, k_2^{-1}$, taktéž ve svazku rovin osy r se samodružnými rovinami $\varrho_1 \equiv (r,\, O_2)$, $\varrho_2 \equiv (r,\, O_1)$. Na ϱ_1 a v O_1 jest ${}^4g_1'$ s parametrem k_2, na ϱ_2 a v O_2 grupa ${}^4g_1$ parametru k_1, na každé invariantní rovině přímkou s a v každém prost. svazku se středem na r máme ${}^1g_2$ parametrů k_1 a k_2.

Můžeme položiti $k_2 = k_1^r$. Supposice konstantního r vede k užší grupě ${}^1g_{1(2)}$ na každé invar. rovině jdoucí přímkou s (a ve svazcích se středem na r); i existuje v prostoru užší grupa ${}^6\mathbf{G}_{1(2)}$, charakterisovaná konstantou r, s invar. útvarem týmž jako ${}^6G_2$. Na každé invar. rovině máme při ${}^6G_{1(2)}$ svazek ∞^1 křivek jednotlivě invariantních, duálně v každém svazku středu na r svazek ∞^1 ploch kuželových téže vlastnosti. Základní ${}^6G_2$ obsahuje ∞^1 subgrup ${}^6G_{1(2)}$.

Z užších grup ${}^6G_{1(2)}$ téže konstanty r možno sestrojiti mnoho grup širších, jež jsou užšími k širším grupám, konstruovaným z ${}^6G_2$, majíce o 1 parametr méně než tyto. Jest třeba, by na rovinách invariantních (aspoň na jedné) existovala některá z užších grup kollineací rovinných ${}^1g_{1(2)}$, ${}^1g_{2(3)}$, ${}^1g_{3(4)}$, ${}^1\gamma_{3(4)}$, ${}^1g_{4(5)}$ (duálně aspoň v jednom prost. svazku se středem na r). Tak nalezneme subgrupy ${}^6G_{2(3)}$ a ${}^6\Gamma_{2(3)}$, soběduální ${}^6G'_{2(3)}$, ${}^6G_{3(4)}$ a ${}^6\Gamma_{3(4)}$, ${}^6G'_{3(4)}$ a ${}^6\Gamma'_{3(4)}$, ${}^6G''_{3(4)}$ a ${}^6\Gamma''_{3(4)}$, ${}^6G^{IV}_{3(4)}$ a ${}^6\Gamma^{IV}_{3(4)}$, sd. ${}^6G^{V}_{3(4)}$, ${}^6G_{4(5)}$ a ${}^6\Gamma_{4(5)}$, ${}^6G'_{4(5)}$ a ${}^6\Gamma'_{4(5)}$, ${}^6G''_{4(5)}$ a ${}^6\Gamma''_{4(5)}$, sd. ${}^6G'''_{4(5)}$, ${}^6G_{5(6)}$ a ${}^6\Gamma_{5(6)}$, ${}^6G'_{5(6)}$ a ${}^6\Gamma'_{5(6)}$, ${}^6G''_{5(6)}$ a ${}^6\Gamma''_{5(6)}$, ${}^6G_{6(7)}$ a ${}^6\Gamma_{6(7)}$.

Grupa základní ${}^7G_2$ indukuje na invariantních rovinách jdoucích přímkou s grupy ${}^2g_2$ (rovněž ve svazcích se středem na r); jich parametry jsou a, k. Na invar. rovině ϱ máme ovšem ${}^4g_1$ s parametrem k, v bodové řadě na s a ve svazku rovin osy r grupu parametru a.

Předpokládáme-li ve vztahu $k = m^a$ veličinu m konstantní, vznikají na invar. rovinách užší grupy ${}^2g_{1(2)}$ parametru a, v prostoru pak užší ${}^7\mathbf{G}_{1(2)}$ téhož prom. parametru, konstanty m; ${}^7G_2$ rozpadá se v ∞^1 takových subgrup. Na invar. rovinách osy s existují svazky po ∞^1 invariantních křivkách, v prost. svazcích středu na r svazky invar. kuželů.

Užší grupy k širším dříve nalezeným dostaneme stejným výběrem jako u K^6; jsou to ${}^7G_{2(3)}$ a ${}^7\Gamma_{2(3)}$, ${}^7G_{3(4)}$ a ${}^7\Gamma_{3(4)}$, ${}^7G'_{3(4)}$ a ${}^7\Gamma'_{3(4)}$, soběd. ${}^7G''_{3(4)}$, ${}^7G_{4(5)}$ a ${}^7\Gamma_{4(5)}$, ${}^7G_{5(6)}$ a ${}^7\Gamma_{5(6)}$.

Základní ${}^8G_2$ indukuje na každé rovině jdoucí přímkou s a v každém svazku se středem na r grupu ${}^2g_2$, jejíž parametry jsou tytéž jako grupy ${}^8G_2$, totiž a, k. Na ϱ_1 a v O_1 existuje ${}^5g_1$ parametru a, na ϱ_2 a v O_2 grupa ${}^4g_1$ s parametrem k.

Vztah $k = m^a$ vede opět při konstantním m k užší grupě ${}^2g_{1(2)}$ na každé rovině osy s a v každém svazku středu na r, v prostoru tedy k užší ${}^8\mathbf{G}_{1(2)}$; při této je na každé invar. rovině ∞^1 invariantních křivek, v každém inv. svazku ∞^1 takových ploch kuželových.

Užší grupy k širším z ${}^8G_2$ složeným existují tehdy, zajištěna-li aspoň na jedné rovině resp. svazku prost. některá užší grupa ze známých ${}^2g_{1(2)}$, ${}^2g_{2(3)}$, ${}^2\gamma_{2(3)}$, ${}^2g_{3(4)}$, ${}^2\gamma_{3(4)}$. Nalezneme tak grupy ${}^8G_{2(3)}$ a ${}^8\Gamma_{2(3)}$, ${}^8G'_{2(3)}$ a ${}^8\Gamma'_{2(3)}$, ${}^8G_{3(4)}$ a ${}^8\Gamma_{3(4)}$, ${}^8G'_{3(4}$ a ${}^8\Gamma'_{3(4)}$, ${}^8G_{4(5)}$ a ${}^8\Gamma_{4(5)}$, ${}^8G''_{4(5)}$ a ${}^8\Gamma''_{4(5)}$, ${}^8G'_{5(6)}$ a ${}^8\Gamma'_{5(6)}$.

Při ${}^9G_3$ jest na každé invariantní rovině jdoucí přímkou s podřazená ${}^3g_3$, rovněž v každém inv. svazku, jichž středy leží na r. Jest tedy při ${}^9G_3$ na každé takové rovině (v celku) invariantní soustava ∞^3 kuželoseček, jež se spolu a přímky s dotýkají v O_1, v každém bodě na r pak invariantní systém ∞^3 kuželových ploch, které se dotýkají sebe a roviny ϱ_2 v přímce r.

Supponujeme-li na každé invar. rovině (mimo ϱ_2 ovšem) a v invar. svazcích (mimo O_1) subgrupy ${}^3g_{2(3)}$, máme v prostoru ${}^9\mathbf{G}_{2(\ )}$, k níž patří invariantní systémy ∞^2 kuželoseček s dotykem 2. stupně v invar. rovinách, rovněž takové systémy kuželů v invar. bodech. Při užší grupě ${}^3g_{1(3)}$ na inv. rovinách a v inv. bodech existuje v prostoru ${}^9\mathbf{G}_{1(3)}$ se svazky ∞^1 invar. kuželoseček a kuželů.

Při širších grupách, složených z ${}^9G_3$, existují obdobně dvojí subgrupy, a sice jak při ${}^9G_4$ a ${}^9\Gamma_4$, tak při ${}^9G_5$ a ${}^9\Gamma_5$.

Kollineace K^{11} tvoří, jak uvedeno, základní grupu ${}^{11}G_4$; tato indukuje na každé rovině, jdoucí invar. přímkou r, grupu ${}^5g_2$, rovněž v každém prost. svazku se středem na r grupu ${}^5g_2$, jejíž parametry jsou nezávislé na parametrech oné grupy limitních homologií rovinných.

${}^{11}G_4$ má několik subgrup. Předpokládáme-li na každé invar. rovině grupu sice ${}^5g_2$, v každém invar. bodě však pouze ${}^5g_1$, máme ${}^{11}\mathbf{G}_{3(4)}$; při duální ${}^{11}\Gamma_{3(4)}$ jest tomu naopak. Existuje-li na každé invar. rovině grupa ${}^5g_1$, rovněž v každém inv. svazku ${}^5g_1$ jiného parametru než ona, existuje v prostoru ${}^{11}\mathbf{G}_{2(4)}$. Při supposici konečně, že parametry obou grup ${}^5g_1$ (na inv. rovinách a v inv. bodech) jsou na sobě závislé, dostaneme subgrupu ${}^{11}\mathbf{G}_{1(4)}$.

E) Automorfní grupy kollineací kuželosečky, kubické křivky prostorové, plochy kvadratické a lineárního komplexu.

27. Grupu ${}^1G_{2(3)}$ připouští svazek ∞^1 invariantních ploch kuželových, jež protínají jednu rovinu invariantního čtyrstěnu

ve svazku invariantních křivek, majíce protilehlý vrchol čtyrstěnu společným vrcholem. Grupa, invariantní plochy i křivky charakterisovány jsou konstantou r nebo s nebo vztahem mezi r a s, jak bylo uvedeno; pro některé zvláštní hodnoty těchto konstant jsou křivky ty *kuželosečky.*

Dejme tomu, že grupa ${}^1G_{2(3)}$ je charakterisována konstantním r; v tomto případě existuje svazek invar. křivek v rovině $O_1O_2O_4$. Jestliže pak $r = -1$ nebo $\frac{1}{2}$ nebo 2, tvoří křivky svazek ∞^1 kuželoseček, jež se spolu dotýkají ve dvou z bodů O_1, O_2, O_4, majíce dvě strany trojúhelníka $O_1O_2O_4$ za společné tečny, třetí za společnou tětivu; pro $r = -1$ jest společnou tětivou O_1O_2, pro $r = \frac{1}{2}$ jest to O_1O_4, pro $r = 2$ pak O_2O_4. Zvolme jednu z ∞^1 invar. kuželoseček třebas svazku se společnými body O_1 a O_2; grupu ${}^1G_{2(3)}$, kterou tato kuželosečka k připouští, označme určitěji ${}^1\mathbf{G}^k_2$. Jest samozřejmo, že k připouští také užší grupu ${}^1G_{1(3)}$, kterou nazveme zase ${}^1\mathbf{G}^k_1$.

Z obou grup ${}^1G^k_2$ i ${}^1G^k_1$ možno sestrojiti širší grupy, při nichž je zvolená kuželosečka invariantní. V rovině kuželosečky $(O_1O_2O_4)$ může existovati buď ${}^1g^k_1$ nebo ${}^1g^k_2$ nebo ${}^1g^k_3$; širší grupy, při kterých máme v $O_1O_2O_4$ grupu ${}^1g^k_1$ s invar. trojúhelníkem, jehož dva vrcholy leží na kuželosečce, jsou zvláštní případy grup širších už dříve uvedených (a to pro $r = -1$). Protilehlý vrchol O_3 invar. čtyrstěnu jednotlivých ${}^1G^k_2$ nebo ${}^1G^k_1$ může totiž předně zaujmouti ∞^1 poloh na přímce jdoucí bodem kuželosečky nebo na přímce, jež prochází pólem kuželosečky (na O_3O_1 nebo na O_3O_4); dle toho nutno lišiti grupy ${}^1\mathbf{G}^k_{3(2)}$, ${}^1\mathbf{G}^k_{2(1)}$ a grupy ${}^1\mathbf{G}^{k'}_{3(2)}$, ${}^1\mathbf{G}^{k'}_{2(1)}$, jež oboje jsou spec. případem grup ${}^1G_{3(4)}$ a ${}^1G_{2(4)}$. Vrchol O_3 může dále zaujmouti ∞^2 poloh buď v rovině, jež se dotýká kužolosečky (třebas $O_1O_3O_4$) nebo v rovině, která kuželosečku protíná $(O_1O_2O_3)$; v souhlase s tím máme zase dva typy grup se 4, resp. 3 parametry, ${}^1\mathbf{G}^k_{4(2)}$ a ${}^1\mathbf{G}^k_{3(1)}$, potom ${}^1\mathbf{G}^{k'}_{4(2)}$ a ${}^1\mathbf{G}^{k'}_{3(1)}$. Jsou to zvláštní případy grup dříve nalezených ${}^1G_{4(5)}$ a ${}^1G_{3(5)}$. Konečně může vrchol O_3 nabýti ∞^3 poloh v prostoru; z ${}^1G^k_2$, resp. ${}^1G^k_1$ skládají se tu širší grupy ${}^1\mathbf{G}^k_{5(2)}$ a ${}^1\mathbf{G}^k_{4(1)}$, jež jsou spec. případy grup ${}^1G_{5(6)}$ a ${}^1G_{4(6)}$.

Jestliže dále supponujeme na $O_1O_2O_4$ grupu ${}^1g^k_2$, obdržíme v prostoru nové typy grup, při nichž jest invariantní kuželosečka a jeden bod na ní (třebas O_1, ovšem také tečna $t \equiv O_1O_4$

v bodě tom ke křivce). Má-li bod O_3 polohu pevnou, vytvořuje ∞^1 grup ${}^1G_2^k$, resp. ${}^1G_1^k$, jejichž invariantní čtyrstěny mají společnou stěnu $O_1O_2O_4$, body O_1 a O_3 a hranu O_1O_4 (také ovšem O_1O_3), proto i stěnu $O_1O_3O_4$, širší grupy ${}^1\mathbf{G}_{3(2)}^{k''}$ a ${}^1\mathbf{G}_{2(1)}^{k''}$. Vrchol O_3 čtyrstěnu jednotlivých ${}^1G_2^k$ a ${}^1G_1^k$ může však dále nabýti ∞^1 poloh na O_3O_1 nebo ∞^2 poloh v $O_3O_1O_4$ nebo ∞^3 poloh v prostoru; v těchto případech existují širší grupy ${}^1\mathbf{G}_{4(2)}^{k''}$ a ${}^1\mathbf{G}_{3(1)}^k$, ${}^1\mathbf{G}_{5(2)}^{k'}$ a ${}^1\mathbf{G}_{4(2)}^{k'}$, ${}^1\mathbf{G}_{6(2)}^k$ a ${}^1\mathbf{G}_{5(1)}^k$.

Existuje-li v $O_1O_2O_4$ grupa ${}^1g_3^k$ s invariantní kuželosečkou, může bod O_3 míti pouze buď pevnou polohu nebo zaujmouti ∞^3 poloh pro složky širších grup. Máme tedy ${}^1\mathbf{G}_{4(2)}^{k'''}$, při níž je invariantní rovina a na ní kuželosečka, mimo rovinu bod; každá složka ${}^1G_2^k$ má 2 vrcholy někde na kuželosečce (∞^2 voleb), třetí v pólu jejich spojnice vzhledem k invar. kuželosečce na rovině, čtvrtý v O_3. Konečně existuje nejširší grupa ${}^1\mathbf{G}_{7(2)}^k$, při které je invariantní pouze kuželosečka; invariantní čtyrstěn složek lze voliti ∞^5 způsoby (∞^1 O_1, ∞^1 O_2, obé na invar. kuželosečce, ∞^3 O_3).

Mimo uvedené četné grupy kollineací K^1 existují i grupy kollineací jiných typů s invariantní kuželosečkou. Aby totiž kuželosečka byla invariantní, musí grupa rovinných kollineací býti buď typu 1. nebo 3., totiž buď ${}^1g_{1(2)}$ čili ${}^1g_1^k$, po případě širší ${}^1g_2^k$, ${}^1g_3^k$, nebo ${}^3g_{1(3)}$ čili ${}^3g_1^k$. Z typů kollineací prostorových mají na invariantní rovině grupu ${}^1g_2$ (z níž ${}^1g_1^k$ vzniká) mimo K^1 ještě K^2 a K^6, grupu ${}^3g_3$ (z které vzniká ${}^3g_1^k$) typy K^4, K^5 a K^9. Mohou tedy býti grupy kollineací s invariantní kuželosečkou ještě u typů 2., 6., 4., 5. a 9. Vyšetříme je pořadem uvedeným.

Při grupě ${}^2G_{2(3)}$ jest v rovině $\varrho_3 \equiv O_1O_2O_3$ svazek ∞^1 invariantních křivek charakterisovaných konstantou r; pro $r = -1$ jsou křivky ty kuželosečkami se společnou tětivou O_1O_2, pro $r = \frac{1}{2}$ a $r = 2$ se společnou tětivou O_1O_3 resp. O_2O_3. Zvolíme ze svazku jednu kuželosečku, grupu pak, kterou připouští, nazveme ${}^2\mathbf{G}_2^k$; kuželosečka připouští ovšem také užší grupu ${}^2G_{1(3)}$, již označíme ${}^2\mathbf{G}_1^k$. Při těchto grupách máme na $O_1O_2O_3$ grupu ${}^1g_1^k$. Obou grup můžeme lišiti dva typy dle toho, leží-li bod O_3, jímž prochází invariantní přímka p kollineací K^2, na invar. kuželosečce nebo mimo ni, jsa pólem přímky O_1O_2.

Širší grupy odvodíme z ${}^2G_2^k$ a ${}^2G_1^k$ docela podobně jako při typu K^1; možno všude rozeznávati dva případy dle polohy bodu O_3, nejširší grupy mají 4 resp. 3 parametry, všechny jich kollineace mají společný pouze invar. trojúhelník $O_1 O_2 O_3$. U grup těchto jest na $O_1 O_2 O_3$ grupa ${}^1g_1^k$. Supponujeme-li na rovině ϱ_3 širší grupu ${}^1g_2^k$, nalezneme příslušné grupy v prostoru v případě, kdy $O_1 O_2$ je tečnou kuželosečky (grupa s 5 resp. 4 parametry) a v případě, kdy $O_1 O_3$ je tečnou, bod O_3 na kuželosečce, přímka p má polohu pevnou (grupa s 3 resp. 2 parametry).

Při užší grupě ${}^6G_{1(2)}$ kollineací K^6 existují ve všech invar. rovinách svazky invariantních křivek, charakterisovaných konstantním r; v případech $r = -1, \frac{1}{2}, 2$ jsou křivky ty opět kuželosečky. Na invar. rovinách máme tedy ${}^1g_1^k$, v prostoru ${}^6\mathbf{G}_1^k$; této grupy lze lišiti dva typy dle toho, procházejí-li invar. kuželosečky body O_1 a O_2 nebo bodem O_1 a bodem na ose r. Širší grupy, při kterých je zvolená kuželosečka invariantní, nalezneme týmž postupem jako u K^1 a K^2. Na rovině invar. kuželosečky může býti totiž buď ${}^1g_1^k$ nebo ${}^1g_2^k$. V prvém případě vznikají mimo ${}^6G_1^k$ grupy o 2 a 3 parametrech dle toho, tvoří-li osy r svazek ∞^1 nebo ∞^2 paprsků; střed svazku toho může býti buď na kuželosečce nebo ležeti mimo ni, rovina svazku může býti v prvém případě sečnou nebo tečnou kuželosečky. I máme celkem grupy ${}^6G_1^k$, ${}^6\mathbf{G}_1^{k'}$, ${}^6\mathbf{G}_2^k$, ${}^6\mathbf{G}_2^{k'}$, ${}^6\mathbf{G}_2^{k''}$, ${}^6\mathbf{G}_3^k$, ${}^6\mathbf{G}_3^{k'}$; jsou to spec. případy grup dříve nalezených. Je-li na rovině kuželosečky ${}^1g_2^k$, může invariantní tečna býti buď přímkou s nebo invariantní bod je bodem osy r; v prvém případě existuje grupa ${}^6\mathbf{G}_4^k$, v druhém ${}^6\mathbf{G}_2^{k'''}$.

U kollineací typu K^4 existuje při některých grupách svazek invariantních kuželoseček v rovině ϱ_1; tyto kuželosečky mají dotyk 3. stupně v bodě O_2 a společnou tečnu p_2, na rovině té existuje ${}^3g_{1(3)}$ čili ${}^3g_1^k$. Pokud kollineace u některé grupy kollineací K^4 mají společnou invariantní ϱ_1, na ní O_2 a p_2, existuje zmíněná ${}^3g_1^k$ a grupa taková má nejen jednu, nýbrž celý svazek invariantních kuželoseček. Sem patří grupy ${}^4G_{1(4)}$ a ${}^4G'_{2(4)}$, užší k základní ${}^1G_4$, jež bychom mohli tedy označit ${}^4\mathbf{G}_1^k$ a ${}^4\mathbf{G}_2^k$; dále grupy ${}^4\mathbf{G}_2^{k'}$ a ${}^4\mathbf{G}_3^k$, při nichž je invariantní také přímka $O_2 O_1$, grupy ${}^4\mathbf{G}_3^{k'}$ a ${}^4\mathbf{G}_4^k$, jež mají mimo ϱ_1, O_2, p_2 invariantní ještě rovinu ϱ_3, konečně grupy ${}^4\mathbf{G}_4^{k'}$ a ${}^4\mathbf{G}_5^k$, při kterých je pouze ϱ_1

a na ní O_2, p_2 invariantní. Posledních šest grup jsou užší grupy ke grupám dříve nalezeným ${}^4G_5$, ${}^4G_6$ a ${}^4G_7$.

Při nejužší grupě kollineací typu K^5, totiž při ${}^5G_{1(6)}$, máme v invar. rovině grupu ${}^3g_1^k$ se svazkem invariantních kuželoseček; grupu tu lze tedy označiti ${}^5\mathbf{G}_1^k$. Avšak ještě při třech jiných grupách kollineací K^5 máme v invar. rovině ${}^3g_1^k$, totiž při ${}^5G_{2(6)}$, ${}^5\Gamma_{3(6)}$ a ${}^5\Gamma_{4(6)}$; v invar. bodě kollineací těchto grup existuje totiž buď ${}^3g_{1(3)}$ nebo ${}^3g_{2(3)}$ nebo ${}^3g_3$. Grupy ty můžeme nazvati ${}^5\mathbf{G}_2^k$, resp. ${}^5\mathbf{G}_3^k$, ${}^5\mathbf{G}_4^k$.

Z grup kollineací K^9 vykazuje v invar. rovině grupu ${}^3g_1^k$ především ${}^9G_{1(3)}$, užší k základní ${}^9G_3$; označíme ji ${}^9\mathbf{G}_1^k$. Dále grupy užší ku ${}^9\Gamma_4$ a ${}^9\Gamma_5$ s počtem parametrů o 2 menším, tedy ${}^9\mathbf{G}_2^k$ a ${}^9\mathbf{G}_3^k$; přímky r invariantních bodů, příslušné k jednotlivým ${}^9G_{1(3)}$, skládajícím uvedené grupy, tvoří tu svazek ∞^1 resp. ∞^2 paprsků.

Všechny zde uvedené grupy typů K^4, K^5 a K^9 byly už při stanovení užších grup jednotlivých typů vytčeny. Konečně můžeme ke grupám s invariantní kuželosečkou počítati také některé grupy kollineací K^{12} a K^{13}. Při kollineaci K^{12} i K^{13} jsou invariantní všechny body v osové rovině, tedy i všechny křivky v ní ležící; pokud tato rovina je společnou rovinou homologií grupy, lze čítati grupu takovou ke grupám zde vyšetřovaným. Patří sem tedy grupy ${}^{12}G_1$, ${}^{12}G_2$, ${}^{12}G_3$, ${}^{12}G_4$, ${}^{13}G_1$, ${}^{13}G_2$, ${}^{13}G_3$, nikoli ovšem jich duální.

Několik grup, při nichž existuje invariantní kuželosečka, bude ještě uvedeno.

28. Grupy *prostorové křivky 3. stupně.* Při ${}^1G_{1(3)}$ existují systémy ∞^1 invariantních křivek rovinných v stěnách invar. čtyrstěnu, svazky ∞^1 invariantních ploch kuželových ve vrcholech čtyrstěnu, konečně svazky invar. ploch přímkových se společnými protějšími hranami čtyrstěnu; invariantní plochy protínají se v soustavě ∞^2 invariantních křivek prostorových, procházejících vždy dvěma vrcholy čtyrstěnu. Všechny tyto systémy invar. útvarů charakterisovány jsou jako příslušná grupa konstantami r a s, jež se objevují ve vztazích parametrů základní grupy ${}^1G_3$, totiž v relacích $k_2 = k_1^r$, $k_3 = k_1^s$. Pro některé hodnoty konstant r a s jsou invariantní rovinné křivky kuželosečky; na př. v rovině $O_1 O_3 O_4$ existují svazky invar. kuželo-

seček pro $s = -1,\ 2,\ \frac{1}{2}$, v rovině $O_2O_3O_4$ pro $r = -s$, $r = 2s$, $r = \frac{s}{2}$. Spolu jsou v těchto případech invariantní svazky kuželů 2. stupně se společným vrcholem v O_2, resp. O_1. Kdy jsou současně v obou uvedených rovinách svazky invariantních kuželoseček?

V rovině $O_1O_3O_4$ jest na př. pro $s = -1$ svazek invar. kuželoseček, jež se vespolek dotýkají v bodech O_1 a O_3, majíce O_1O_3 za společnou tětivu; v rovině $O_2O_3O_4$ existuje zároveň svazek kuželoseček se společnou tětivou O_2O_3, jestliže $r = -s$, tedy $r = 1$; i redukuje se, jak patrno, v tomto případě ${}^1G_{1(3)}$ na ${}^6G_{1(2)}$ s osou O_1O_2 invariantních bodů a osou O_3O_4 invariantních rovin. Jestliže platí $r = \frac{s}{2}$, máme v $O_2O_3O_4$ svazek kuželoseček se společnou tětivou O_3O_4, proto pro $s = -1$ a $r = -\frac{1}{2}$ existují v obou rovinách uvažovaných svazky inv. kuželoseček; příslušné svazky inv. kuželů 2. stupně protínají se v ∞^2 invar. křivkách 4. stupně. Jestliže konečně platí $r = 2s$, jest v $O_2O_3O_4$ svazek kuželoseček se společnou tětivou O_2O_4, i máme v případě $s = -1$, $r = -2$ v rovinách $O_1O_3O_4$ a $O_2O_3O_4$ svazky ∞^1 invar. kuželoseček, jimž příslušné svazky inv. kuželů 2. stupně s vrcholy v O_2, resp. v O_1 dotýkají se podél společné přímky O_1O_2; průsek obou svazků kuželů těch rozpadá se tedy v přímku O_1O_2 a ∞^2 prostorových křivek, jež jsou následkem toho jen 3. stupně. Podobné jsou výsledky v případě $s = 2$ a $s = \frac{1}{2}$; existuje ještě jeden systém ∞^2 invariantních křivek 3. stupně se společnými body O_1 a O_2 a to pro hodnoty $s = \frac{1}{2}$ a $r = -\frac{1}{2}$.

Mimo uvedené dva systémy se společnou sečnou O_1O_2 nalezneme ke každé z ostatních 5 hran invar. čtyrstěnu dvě soustavy po ∞^2 invar. prostorových křivkách 3. stupně, celkem tedy 12 systémů. Při hraně O_1O_2 existují tyto soustavy, jak nalezeno, pro $r = -2$, $s = -1$ a pro $r = -\frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{2}$; při hraně O_1O_3 pro $r = -1$, $s = -2$ a pro $r = \frac{1}{2}$, $s = -\frac{1}{2}$; při O_1O_4 pro $r = \frac{1}{3}$, $s = \frac{2}{3}$ a pro $r = \frac{2}{3}$, $s = \frac{1}{3}$; při O_2O_3 pro $r = 2$, $s = -1$ a pro $r = -1$, $s = 2$; při O_2O_4 pro $r = 3$, $s = 2$ a pro $r = \frac{3}{2}$, $s = \frac{1}{2}$; konečně při O_3O_4 pro $r = 2$, $s = 3$ a pro $r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{3}{2}$.

Týchž výsledků dojdeme, pokládajíce křivku 3. st. za řez tří projektivně přiřazených svazků rovinných; osami svazků zvolíme 3 hrany inv. čtyrstěnu, dvojpoměry transformací ve svazcích musí býti sobě rovny, tak ovšem, aby korrespondující roviny nekoincidovaly. Na př. inv. kubika vzniká, platí-li ve svazcích s osami O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 vztahy

$$k_3 = k_1^{-1} = k_1 \,.\, k_2^{-1} \quad \text{čili } s = -1 = 1 - r,$$

odkudž $r = 2$, $s = -1$; a duálně.*)

Zvolme pro další úvahu jednu kubickou křivku třebas ze systému, jenž vzniká průsekem dvou svazků kuželů 2. stupně o vrcholech O_2 a O_1, které se dotýkají vespolek podél hran O_2O_1 a O_2O_3, resp. O_1O_2 a O_1O_4. Ze vzniku křivky vysvítá, že hrana O_1O_2 je sečnou invariantní kubické křivky, spojující její body O_1 a O_2, hrany O_1O_4 a O_2O_3 jsou tečnami křivky v bodě O_1, resp. O_2, roviny $O_1O_4O_3$ a $O_2O_3O_4$ jsou rovinami oskulačními; i tvoří $O_1O_2O_3O_4$ t. zv. oskulační čtyrstěn křivky kubické. Grupu ${}^1G_{1(3)}$, při níž (zde pro $r = -2$, $s = -1$) je kubika invariantní, nazveme přiměřeněji ${}^1\mathbf{G}_1^c$.

Dejme tomu, že jest pouze jeden bod na invariantní křivce kubické samodružný, třebas O_1; protože jest křivka sama (v celku) invariantní, jest invariantní také tečna její O_1O_4 v bodě tom a oskulační rovina $O_1O_3O_4$. Dvě kollineace K^1, při nichž je invariantní kubika a jeden její bod, mají za produkt kollineaci téže vlastnosti; obě kollineace indukují totiž v bodové řadě na křivce proj. transformace se společným jedním bodem samodružným, jichž produkt je opět taková transformace, její druhý samodružný bod je bodem, který spolu s O_1 a invar. tečnami i oskulačními rovinami určuje invariantní čtyrstěn výsledné kollineace. Tak vzniká z ∞^1 grup ${}^1G_1^c$ grupa ∞^2 kollineací pro-

---

*) Je snadno na základě předešlého dokázati, že dvojpoměry proj. transformací na třech hranách inv. čtyrstěnu z bodu inv. kubiky vycházejících (z nichž první je tečnou, třetí bisekantou křivky) jsou v poměru $l^1 : l^2 : l^3$. Rovněž větu, že tečny systému ∞^2 invariantních křivek 3. stupně patří tetraedrálnímu komplexu, jehož dvojpoměr $(M'N'P'Q') = \frac{1}{4}$, když označíme písmeny M', N', P', Q' průsečíky tečny se stěnami čtyrstěnu, ležícími proti vrcholům M, N, P, Q, a zvolíme-li M, N za inv. body křivky, MP, NQ pak za invar. tečny.

storové křivky kubické $^1\mathbf{G}^c_2$, při níž je invar. křivka 3. stupně a jeden bod na ní.

Všechny kollineace, při kterých je prostorová kubika invariantní, tvoří v počtu ∞^3 grupu $^1\mathbf{G}^c_3$. Tato je složena z ∞^2 grup $^1G^c_1$; samodružné body jednotlivých $^1G^c_1$ na křivce jsou samodružnými body složek tříparametrové grupy proj. transformací, kterou $^1G^c_3$ v bodové řadě na křivce indukuje; z existence této plyne existence oné. Jest to nejširší grupa kollineací, kterou křivka kubická připouští; jednotlivé kollineace této vlastnosti jsou určeny volbou oskulačního čtyrstěnu jako invariantního čtyrstěnu kollineace (∞^2 voleb bodů O_1 a O_2) a volbou jedné dvojice korrespondujících bodů (∞^1 způsobů) na křivce.

Při grupách, které připouští kubická křivka prostorová, jest invariantní také útvar duální, rozvinutelná její plocha 4. stupně 3. třídy; tato protíná invariantní oskulační roviny v invariantních kuželosečkách. Při $^1G^c_1$ jest ovšem ∞^2 rozvinutelných ploch invariantních; jsou vytvořeny společnými rovinami tečnými dvou svazků invar. kuželoseček ve dvou stěnách inv. čtyrstěnu.

Projektivní transformace bodové řady na invariantní křivce 3. stupně může býti také typu [(00)]; příslušná kollineace prostorová jest K^5. Při grupě $^5G_{1(6)}$ jest invariantních ∞^2 prostorových kubik na ∞^1 invariantních kuželích, křivky ty mají společný bod O_1, společnou tečnu v invar. přímce, společnou oskulační rovinu ϱ_3; rozvinutelné plochy jejich protínají ϱ_3 ve svazku invar. kuželoseček s dotykem 3. stupně. Grupu tuto můžeme označiti $^5\mathbf{G}^c_1$.

Při grupě $^1G^c_2$ je invariantní také kuželosečka, v níž inv. rozvinutelná plocha kubiky protíná oskulační rovinu křivky v bodě invariantním; na kuželosečce je ovšem také invar. zmíněný bod a tečna v něm.

29. Grupy, které připouští (nedegerovaná) *plocha 2. stupně.* Bylo uvedeno, že subgrupy $^1G'_{2(3)}$ a $^1G_{1(3)}$ základní grupy $^1G_3$ kollineací typu K^1 mají svazek ∞^1 invariantních ploch přímkových, opírajících se o dvě mimoběžné hrany invar. čtyrstěnu. Podmínkou zde jest, aby buď $\dfrac{1-r}{s}$ nebo $\dfrac{1-s}{r}$ nebo $r - s$ bylo konstantní ($= \varkappa$); existují pak na mimoběžných hranách

(O_3O_4 a O_1O_2, O_2O_4 a O_1O_3, O_1O_4 a O_2O_3) jednoparametrové grupy proj. transformací parametru k_3 a $k_3^\varkappa$ resp. k_2 a $k_2^\varkappa$ resp. k_1 a $k_1^\varkappa$.

Jestliže ve zvláštním případě jest $\varkappa = \pm 1$, jsou invariantní přímkové plochy plochami 2. stupně; neboť každé dva body sobě v kollineaci přiřazené tvoří tu s oběma body invariantními na obou mimoběžkách čtveřinu téhož dvojpoměru, spojnice projektivních řad bodových na těchto přímkách tvoří jednu soustavu vytvořujících přímek kvadratické plochy. Každá invariantní plocha je stanovena volbou jednoho z ∞^1 bodů na jedné z mimoběžek, jejž spojíme s libovolným na druhé; tato spojnice spolu s dvěma spojnicemi invariantních bodů představuje tři přímky vytvořující téže soustavy. Uvedená podmínka redukuje se na př. v případě řídících přímek O_1O_2 a O_3O_4 na tvar $k_1 = k_2k_3$ nebo $k_2 = k_1k_3$; v prvním případě leží také hrany O_1O_3 a O_2O_4 na ploše, v druhém O_1O_4 a O_2O_3. Jestliže konečně platí $k_3 = k_1k_2$, leží hrany čtyrúhelníka $O_1O_3O_2O_4$ na ploše; zbývající dvojice hran je v každém ze tří možných případů dvojicí reciprokých polár.

Zvolme z ploch svazku jednu k dalším úvahám; tato připouští tedy grupu ${}^1G_{1(3)}$, již nazveme ${}^1\mathbf{G}_1^q$, potom grupu ${}^1G'_{2(3)}$, které dáme určitější označení ${}^1\mathbf{G}_2^q$. Hledejme širší grupy, složené buď z ${}^1G_1^q$ nebo z ${}^1G_2^q$, při nichž je zvolená plocha 2. stupně invariantní.

Invariantní plocha kvadratická obsahuje při ${}^1G_2^q$ i při ${}^1G_1^q$ čtyři hrany invariantního čtyrstěnu, jež tvoří prostorový čtyrúhelník; jestliže na př. hrany O_1O_2 a O_3O_4 patří ploše a jest $\frac{1-r}{s} = 1$, pak platí také $\frac{1-s}{r} = 1$ a hrany O_1O_3, O_2O_4 leží rovněž na ploše. První dvojice přímek, stručněji a_1, a_2, patří jedné soustavě, druhá b_1, b_2 druhé soustavě přímek vytvořujících. Jsou-li pouze a_1, a_2, b_1 invariantní, b_2 však nabývá ∞^1 poloh v řadě b, tvoří ∞^1 příslušných grup ${}^1G_2^q$ širší grupu kollineací, při nichž je plocha 2. stupně invariantní; označíme ji ${}^1\mathbf{G}_{3(2)}^q$. Grupy ${}^1G_1^q$ v témž počtu vytvořují za stejných okolností grupu ${}^1\mathbf{G}_{2(1)}^q$. Jestliže jsou invariantní přímky a_1, b_1, tedy jedna z každé řady, druhá však (a_2 a b_2) jest při každé složce jiná v příslušné řadě, vzniká z ∞^2 grup ${}^1G^q_2$ širší ${}^1\mathbf{G}^q_{4(2)}$, z ∞^2 grup ${}^1G^q_1$ zase ${}^1\mathbf{G}^q_{3(1)}$; při obou jest invariantní plocha 2. stupně a na ní dvě přímky se protínající.

Supponujeme-li dvě přímky z téže soustavy, tedy mimoběžné a_1, a_2 invariantní, opisují b_1, b_2 druhou řadu vytvořujících přímek, z grup ${}^1G^q_2$ vzniká tu ${}^1\mathbf{G}^{q'}_{4(2)}$. Avšak z grup ${}^1G^q_1$ nevzniká už širší grupa, poněvadž při ${}^1G^q_1$ jsou na rozdíl od ${}^1G^q_2$ parametry na protínajících se přímkách invariantních na př. $O_1O_2 \equiv a_1$ a $O_1O_3 \equiv b_1$ na sobě závislé a není-li na každé aspoň jeden invariantní bod společný při dvou zvolených kollineacích, není zajištěno, že při produktu kollineací těch existuje táž závislost. Dvě kollineace, při nichž je plocha 2. st. invariantní a jichž invar. prostorové čtyrúhelníky mají jednu stranu (a_1) společnou, mají produktem kollineaci těchže vlastností; všechny kollineace toho druhu vytvořují ${}^1\mathbf{G}^q_{5(2)}$, složenou z ∞^3 grup ${}^1G^q_2$. Konečně všechny automorfní kollineace plochy kvadratické tvoří nejširší grupu ${}^1\mathbf{G}^q_{6(2)}$; jest složena z ∞^4 grup ${}^1G^q_2$, jichž prostorové čtyrúhelníky invariantní lze zvoliti ∞^4 způsoby na invariantní ploše, každou stranu totiž ∞^1 způsoby v jedné z obou řad vytvořujících přímek (nebo ze dvou vrcholů každý ∞^2 způsoby).

Celkem připouští plocha 2. stupně 9 grup kollineací K^1, z nichž 6 složeno jest z grup dvouparametrových, 3 skládají se z grup o 1 parametru.

30. U kollineací typu K^3 má základní grupa ${}^3G_3$ dvě subgrupy, totiž ${}^3G'_{2(3)}$ a ${}^3G_{1(3)}$, při kterých existuje svazek ∞^1 invariantních ploch 2. stupně. ${}^3G'_{2(3)}$ je totiž definována vztahem $b = na$ s konstantním n mezi parametry grupy základní, při ${}^3G_{1(3)}$ platí nad to ještě jiný vztah $(k = m^a)$. Invariantní přímky mimoběžné r a s (pojímané jako osy řad bodových) lze ∞^1 způsoby učiniti řídícími přímkami přímkové soustavy 2. stupně; přiřadíme-li totiž jeden z ∞^1 bodů na jedné z nich k určitému na druhé, jest spojnicí jich ve spojení se spojnicí OO' invariantních bodů a se spojnicí obou bodů, ve které body prve zmíněné na r a s se transformují některou kollineací, určena jedna invar. plocha 2. stupně. Z invariantního útvaru grupy ${}^3G_3$ patří tedy přímky r a s jedné soustavě, přímka $t = OO'$ druhé soustavě přímek vytvořujících.

Z uvedených grup o 1 a 2 parametrech, jež stručněji označíme ${}^3\mathbf{G}_2^q$ a ${}^3\mathbf{G}_1^q$, možno složiti některé širší. Supponujeme-li, že přímky r a t jsou společny grupám, při nichž je táž plocha 2. stupně invariantní, vzniká z ∞^1 grup ${}^3G_2^q$ širší ${}^3\mathbf{G}_{3(2)}^q$, z ∞^1 grup ${}^3G_1^q$ grupa ${}^3\mathbf{G}_{2(1)}^q$, obě s invar. plochou 2. st. a dvěma protínajícími se invar. přímkami na ní. Jestliže pouze přímka t jest společna invariantním útvarům dvou automorfních kollineací plochy 2. stupně, jest tato přímka také částí invar. útvaru jich produktu; tento produkt jest však kollineací téže povahy jako složky pouze tehdy, platí-li o parametrech jejich pouze vztah $b = na$ (a nikoli také druhý $k = m^a$). To znamená, že z ∞^2 grup ${}^3G_2^q$ vzniká širší grupa ${}^3\mathbf{G}_{4(2)}^q$, při které je invar. plocha 2. st. a přímka na ní.

Při kterých ještě typech kollineací existují kontin. grupy s invar. plochou 2. st.? Z typu K^1 dostaneme typ K^6 na př. pro $k_3 = 1$, t. j. pro $s = 0$; v tomto případě jest přímka $O_1O_2 \equiv s$ osou invariantních rovin, $O_3O_4 \equiv r$ osou invar. bodů. Jestliže do podmínek u K^1 uvedených

$$\left(\frac{1-r}{s} = \pm 1, \quad \frac{1-s}{r} = \pm 1, \quad r - s = \pm 1\right)$$

vložíme $s = 0$, obdržíme v prvním případě $r = 1$, v druhém a třetím $r = \pm 1$. Supponujeme-li tedy, že přímky O_1O_2 a O_3O_4 patří při uvažované kollineaci invariantní ploše 2. st., jest vedle r také s osou invariantních bodů (parametr její transformace je totiž $k_1 . k_2^{-1} = k_1 . k_1^{-r} = k_1 . k_1^{-1} = 1$), čili kollineace je typu K^{10}. Supponujeme-li však, že invariantní prostorový čtyrúhelník, ležící na invar. ploše, jest O_1AO_2B, jsa tvořen spojnicemi bodů O_1 a O_2 s dvěma body A, B na ose r (O_1O_2 a r jsou tedy jeho diagonály), jsou invar. křivky na rovinách vedených osou s kuželosečkami, kuželové plochy invariantní s vrcholy na r pak kuželi 2. stupně. Při této kollineaci K^6 jest tedy jediný proměnlivý parametr k_1, neboť $k_2 = k_1^{-1}$; invar. kuželosečky zmíněné dotýkají se v bodech O_1 a O_2 přímek, spojujících průsek jich roviny s osou r a body O_1 resp. O_2, a leží na invariantních plochách 2. stupně. Ke každé dvojici zvolených bodů A, B patří svazek ∞^1 ploch 2. st., celkem tedy při kollineaci K^6 jest invariantní soustava ∞^3 ploch kvadratických.

Plocha 2. st. jest dle předešlého invariantní při kollineacích grupy ${}^6G_{1(2)}$ pro $r = -1$; nazveme ji ${}^6\mathbf{G}_1^q$. Grupa tato jeví se jako zvláštní případ grupy ${}^1G_1^q$, a to pro $s = 0$. Obdobně ke grupám ${}^1G_{2(1)}^q$ a ${}^1G_{3(1)}^q$ nalezneme zde širší grupy ${}^6\mathbf{G}_{2(1)}^q$ a ${}^6\mathbf{G}_{3(1)}^q$. Jestliže totiž přímky vytvořující O_1A, AO_2, O_2B zůstávají pevnými, osy s pak opisují svazek paprskový středu O_2 v rovině O_1O_2A, osy r svazek středu A v rovině AO_2B, tvoří příslušné kollineace v počtu ∞^2 grupu ${}^6G_{2(1)}^q$, složenou z ∞^1 grup ${}^6G_1^q$. Jestliže konečně zůstávají společnými přímkami invariantními pouze O_1A a AO_2, tedy jedna z každé soustavy, vzniká ${}^6G_{3(1)}^q$, složená z ∞^2 grup ${}^6G_1^q$; osy s jednotlivých těchto složek vyplňují rovinu O_1AO_2, osy r pak prostorový svazek středu A.

Při ${}^6G_1^q$ tvoří osy s a r dvojici reciprokých polár vzhledem k invariantní ploše 2. stupně; ke každému bodu na r patří polární rovina jdoucí osou s. Zvolme určitý pól P na r a příslušnou rovinu polární π; na π existuje při ${}^6G_1^q$ grupa ${}^1g_{1(2)}$ s konstantou $r = -1$ čili grupa $g_{1(3)}^k$ s invariantní kuželosečkou a dvěma body na ní (O_1 a O_2). Při pevném P a π lze z uvažovaných ${}^6G_1^q$ složiti další dvě širší grupy, a to dvouparametrovou ${}^6\mathbf{G}_{2(1)}^{q'}$ a tříparametrovou ${}^6\mathbf{G}_{3(1)}^{q'}$; stačí rozšířiti grupu ${}^1g_{1(3)}^k$ na rovině π na grupy ${}^1g_{2(3)}^k$ a ${}^1g_3^k$. Grupy ${}^6G_1^q$ totiž, jichž osy s tvoří svazek středu O_2 na π, osy r pak svazek středu P na rovině tečné k invariantní ploše v bodě O_2, skládají v počtu ∞^1 grupu ${}^6G_{2(1)}^{q'}$; na π existuje zde ${}^1g_{2(3)}^k$. Rozšíříme-li grupu rovinných kollineací, při které je invar. kuželosečka na π, na ${}^1g_3^k$, obdržíme v prostoru ${}^6G_{3(1)}^{q'}$, složenou z ∞^2 grup jednoparametrových, jichž osy s vyplňují rovinu π, osy r pak prost. svazek P.

Při grupách ${}^6G_{2(1)}^{q'}$ a ${}^6G_{3(2)}^{q'}$ jest invariantní kuželosečka na rovině π; jest tedy tyto grupy zařaditi mezi automorfní grupy kuželosečky, na níž existuje buď jeden nebo žádný bod, invariantní při všech kollineacích grupy.

Při kollineacích K^{10}, jež tvoří základní grupu ${}^{10}G_1$, existuje, jak bylo uvedeno, lineární kongruence invariantních přímek s řídícími přímkami r a s. Třemi přímkami této kongruence určena je plocha 2. stupně, při ${}^{10}G_1$ (${}^{10}\mathbf{G}_1^q$) invariantní tím způsobem, že všechny vytvořující přímky jedné soustavy jsou jednotlivě samodružné, z druhé soustavy pak jsou dvě přímky

(r a s) invariantní ve všech svých bodech. Takových ploch 2. st. jest ∞^3 invariantních při dané ${}^{10}G_1$, ježto projektivnost obou řad bodových (na r a s) jest stanovena třemi dvojicemi přiřazených bodů (nebo poněvadž v lin. kongruenci inv. přímek lze každou ze 3 přímek zvoliti ∞^2 způsoby a patří do řady ∞^1 vytvořujících přímek); každá invar. plocha je ostatně určena osami r, s a lib. paprskem (∞^{4-1}), jemuž přiřazený musí na ní také ležeti. Dvě kollineace K^{10}, jichž r jest táž, s však jsou různé přímky téže soustavy plošných přímek na invariantní ploše 2. st., mají za produkt opět kollineaci K^{10} s touže přímkou r, jejíž s je zase přímka této soustavy; tvoří tedy ∞^2 kollineací K^{10} téže r invar. bodů čili ∞^1 grup ${}^{10}G_1^q$ uvedené vlastnosti širší grupu ${}^{10}\mathbf{G}_2^q$. Konečně ∞^3 kollineací, jichž obě osy r i s nabývají každá ∞^1 poloh v téže soustavě přímek plošných, skládají grupu ${}^{10}\mathbf{G}_3^q$, při níž jest invariantní plocha 2. st., na ní pak všechny přímky jedné soustavy; přímky druhé soustavy jsou po dvou osami kollineací jednotlivých ${}^{10}G_1^q$, jež v počtu ∞^2 vytvořují ${}^{10}G_3^q$.

Z partikulárních typů, příslušných ku K^6 a K^{10}, vytvořují kontin. grupy kollineací, při nichž je plocha 2. st. invariantní, kollineace K^9 a K^{11}. Byla odvozena grupa ${}^9G_{3(1)}$, k níž patří svazek invar. kuželoseček v každé invar. rovině jdoucí přímkou s a svazek invar. kuželů 2. stupně v každém bodě na r; při této grupě, kterou zde označíme ${}^9\mathbf{G}_1^q$, jest invariantní soustava ∞^3 ploch 2. st., které mají společnou tečnou rovinu (s, r). Přímky r a s nepatří inv. ploše, jsouce však reciprokými polárami vzhledem k ní, oddělují harmonicky obě přímky vytvořující, ve kterých tečná rovina jimi určená protíná plochu invariantní. Zvolená invar. plocha 2. stupně připouští však také ∞^2 kollineací K^9, jichž osy r a s tvoří svazky téhož středu (r, s) a téže roviny, jež je tečnou rovinou plochy; každá dvojice os r a s představuje s oběma vytvořujícími přímkami plochy té harmonickou čtveřinu. Kollineace tyto vytvořují ${}^9\mathbf{G}_2^q$ s invar. plochou 2. stupně a dvěma plošnými přímkami na ní, jednou z každé soustavy.

Konečně k jednoparametrové grupě ${}^{11}G_{1(4)}$, svého času odvozené, patří systém ∞^3 invariantních ploch 2. st. Při kollineacích K^{11} jsou invariantní všechny paprsky speciální lineární kongruence s osou r; v každé rovině jdoucí osou r kollineací těchto existuje svazek invariantních paprsků, s různými středy pro různé roviny. Každá taková invar. rovina má s invar. plochou 2. st. společné 2 plošné přímky, a to osu r a jednu přímku ze svazku invariantních paprsků této roviny; třemi paprsky v uvedených svazcích (nebo v uv. kongruenci) zvolenými jest plocha určena. Grupu tuto v souhlase s ostatními nazveme $^{11}G_1^q$; jsou při ní invar. všechny paprsky jedné řady přímek plošných a jeden paprsek z druhé řady (osa r).

31. Shledali jsme, že ke grupě $^1G'_{2(3)}$ patří svazek invariantních ploch 2. stupně, splněna-li na př. podmínka $\frac{1-s}{r} = \pm 1$; v případě tom má svazek invar. ploch společné dvě invar. plošné přímky jednoho systému O_1O_3 a O_2O_4, také však dvě vytvořující přímky druhé soustavy, a to, zvolíme-li $1 - s = -r$, přímky O_1O_4 a O_2O_3, neboť platí $r - s = -1$; naproti tomu nepatří žádné invar. ploše 2. st. přímky O_1O_2 a O_3O_4, jsouce reciprokými polárami vzhledem k plochám svazku.

Při uvedené grupě kollineací $^1G_2^q$ jest invariantní dále svazek *lineárních komplexů přímek* s reciprokými polárami O_1O_2 a O_3O_4; ke každé invar. ploše 2. stupně přísluší 2 lineární komplexy invariantní. Neboť při $^1G_2^q$ jest (v celku) invariantní lineární kongruence přímek s řídícími přímkami O_1O_2 a O_3O_4; tato určuje spolu s jednou vytvořující přímkou invar. plochy 2. stupně, patřící třebas do soustavy, k níž náleží O_1O_3 a O_2O_4, lineární komplex. Kollineací grupy $^1G_2^q$ přechází zvolená přímka v jinou přímku téže soustavy (každá z obou soustav plošných přímek invariantní plochy 2. stupně je v celku invariantní); avšak komplex lineární obsahuje celou uvažovanou řadu plošných přímek, ježto obsahuje její paprsky O_1O_3, O_2O_4, patřící do dotčené kongruence, a zvolenou přímku. Jest proto tento lin. komplex v celku invariantní. Lineární kongruence řídících přímek O_1O_2 a O_3O_4 spolu s paprskem druhé soustavy, ku které náleží O_1O_4 a O_2O_3, určuje druhý invariantní komplex. V souhlase s ∞^1 inv. ploch 2. stupně máme svazek ∞^1 lineárních komplexů, invariantních při $^1G_2^q$.

Podobně svazek lin. komplexů s reciprokými polárami O_1O_3 a O_2O_4 jest invariantní (ve všech svých členech) při supposici

$r - s = 1$, svazek s reciprokými polárami $O_1 O_4$ a $O_2 O_3$ při podmínce $r + s = 1$. Podmínky uvedené lze také psáti v prvním případě (rec. poláry $O_1 O_2$ a $O_3 O_4$) $k_3 = k_1 k_2$, v druhém $k_2 = k_1 k_3$, v třetím $k_1 = k_2 k_3$.

Zvolme jeden invariantní komplex lineární ze svazku (třebas prvního), příslušnou grupu ${}^1G_2^l$, kterou připouští, označme nyní ${}^1\mathbf{G}_2'$; je charakterisována vztahem $s - r = 1$. Při této grupě jsou tedy jednotlivě invariantní 4 přímky komplexu, tvořící prostorový čtyrúhelník, a dvě reciproké poláry vzhledem ke komplexu, totiž $O_1 O_2$ a $O_3 O_4$. Jest patrno, že zvolený lineární komplex je invariantní také při užší grupě ${}^1\mathbf{G}_1'$ s proměnlivým parametrem k_1, jestliže r je libovolná konstanta, s pak $= 1 + r$.

Lineární komplex připouští mnohé širší grupy, složené z ${}^1G_2^l$ a ${}^1G_1^l$; vezměme předně za základ invariantní reciproké poláry, nepatřící komplexu. Na každé jsou dva invariantní body O_1, O_2 resp. O_3, O_4, jež jsou samodružnými body dvou jednoparametrových grup projektivních transformací bodových řad na přímkách těch. Tyto jednoparametrové grupy lze rozšířiti na grupy s 2 a třemi parametry. Vznikají tak z ${}^1G_2^l$ tyto automorfní grupy lineárního komplexu s invariantními rec. jeho polárami: ${}^1\mathbf{G}_{3(2)}^l$, při jejíž kollineacích jsou invariantní ještě body O_1 a O_2 na jedné, O_3 na druhé poláře; ${}^1\mathbf{G}_{4(2)}^l$, při které jest na každé poláře jeden bod invariantní, tedy O_1 a O_3; ${}^1\mathbf{G}_{4(2)}^{l'}$ s invariantními dvěma body na téže poláře, tedy O_1 a O_2; ${}^1\mathbf{G}_{5(2)}^l$ s jedním pouze bodem samodružným pevným O_1, konečně ${}^1\mathbf{G}_{6(2)}^l$ bez invariantních bodů. Z grup ${}^1G_1^l$ lze sestrojiti pouze širší grupy, jichž kollineace mají na každé poláře aspoň jeden samodružný bod společný, pokud totiž existuje na těchto grupa jednorozměrných transformací s 1 nebo 2 parametry; jinak není zajištěno, že produkt dvou kollineací charakterisovaných konstantami r a s je také charakterisován těmito veličinami. Tak dostaneme grupu ${}^1\mathbf{G}_{2(1)}^l$ s invariantními body O_1, O_2 a O_3 a ${}^1\mathbf{G}_{3(1)}^l$ s invariantními body O_1 a O_3.

Při ${}^1G_2^l$ i při ${}^1G_1^l$ jsou invariantní 4 přímky komplexu, tvořící prost. čtyrúhelník, $O_1 O_3$, $O_3 O_2$, $O_2 O_4$, $O_4 O_1$. Grupy ${}^1G_2^l$, jež mají společnou část tohoto invar. útvaru, skládají širší grupy; při tom jest míti na mysli, že s každým invariantním bodem jest zároveň invar. incidentní rovina, přiřazená bodu tomu involutorní t. zv. nulovou korrelací, která definuje uvažovaný komplex jako souhrn přímek při ní samodružných. Nalezneme tak grupy s inv. lineárním komplexem: $^1\mathbf{G}^{l'}_{3(2)}$, při které jsou 3 přímky komplexu samodružné (O_1O_3, O_3O_2, O_2O_4); $^1\mathbf{G}^{l''}_{4(2)}$ s invariantními dvěma paprsky komplexu O_1O_3, O_3O_2 a bodem na jednom z nich, třebas O_1, takže jest pevná také rovina $O_1O_3O_4$; $^1\mathbf{G}^{l'}_{5(2)}$ s invariantními dvěma paprsky, jež se protínají (O_1O_3 a O_3O_2, také ovšem O_3 a rov. $O_1O_3O_2$); $^1\mathbf{G}^{l'''}_{4(2)}$ s invariantními dvěma mimoběžnými přímkami komplexu O_1O_3 a O_2O_4, má ∞^4 kollineací, ježto lze voliti bod O_1 ∞^1 způsoby (tím určena i rovina $O_1O_3O_4$ a tedy i její průsečík O_4 na druhé inv. přímce), bod O_3 ∞^1 způsoby (tím určen i O_2), tedy ∞^2 grup $^1G^l_2$. Dále $^1\mathbf{G}^{l''}_{5(2)}$ s invariantní jedinou přímkou komplexu O_1O_3 a dvěma body na ní O_1 a O_3 (s dvěma rovinami inv. $O_1O_3O_4$ a $O_3O_1O_2$); $^1\mathbf{G}^{l'}_{6(2)}$, při níž je invar. přímka O_1O_3, incidentní bod O_1 a incid. rovina $O_1O_3O_4$; $^1\mathbf{G}^{l}_{7(2)}$ s invariantní přímkou; $^1\mathbf{G}^{l'}_{7(2)}$ s invar. bodem a incidentní rovinou jemu v komplexu přiřazenou. Konečně nejširší $^1\mathbf{G}^{l}_{10(2)}$, při které jest invariantní pouze lineární komplex; počet parametrů plyne odtud, že můžeme dvě komplexové přímky voliti libovolně (každou ∞^3 způsoby mezi ∞^3 přímkami komplexu), na každé pak stačí voliti jeden bod (∞^{1+1} způsoby), aby určen byl invar. prost. čtyrúhelník a tím i invar. čtyrstěn kollineace; ke každému čtyrstěnu patří pak $^1G^l_2$, tedy $\infty^{3+3+1+1+2}$ kollineací. Nebo lze počet ten nalézti takto: ∞^4 způsoby volíme přímku v prostoru mimo komplex, volbou její stanovena i její reciproká polára vzhledem ke komplexu; dále na každé z obou polár 4 body, každý ∞^1 způsoby; tím určen inv. čtyrstěn, ke každému $^1G^l_2$. Nebo zvolíme bod (∞^3 způsobů), tím i incid. rovinu, na této dva body (∞^{2+2}), tím i dvě roviny, na jich průsečnici bod (∞^1); k tomu $^1G^l_2$.

Z grup $^1G^l_1$ sestrojíme širší, pokud jest invariantní aspoň jedna přímka komplexu, incidentní bod a rovina; neboť v tomto případě existuje na rovině $^1g_{4(5)}$, čímž zajištěna společná konstanta r a ovšem i $s = r + 1$. Vyloučen ovšem případ dvou mimoběžných přímek komplexu. Dostaneme grupy: $^1\mathbf{G}^{l'}_{2(1)}$ s invar. třemi přímkami, $^1\mathbf{G}^{l'}_{3(1)}$ s invar. dvěma přímkami se protínajícími a ještě bodem na jedné z nich, $^1\mathbf{G}^l_{4(1)}$ s invar. dvěma přímkami komplexu, $^1\mathbf{G}^{l'}_{4(1)}$ s invar. přímkou komplexu a dvěma body incidentními, konečně $^1\mathbf{G}^l_{5(1)}$, při níž jest invar. přímka, inc. bod a inc. rovina.

Zvláštním případem grupy $^1G^l_1$ jest grupa, charakterisovaná (při naší volbě $r = konst.$, $s = r + 1$) hodnotami $r = -2$ nebo $-\frac{1}{2}$ a tedy hodnotami $s = -1$ resp. $s = \frac{1}{2}$. Jest to grupa $^1G^c_1$, při níž jsou invariantní v rovinách $O_1O_3O_4$ a $O_2O_3O_4$ svazky kuželoseček, v prostoru soustava ∞^2 křivek kubických se společnými body O_1 a O_2; podobně pro $r = 2$, $s = 3$ a pro $r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{3}{2}$ existuje systém ∞^2 invar. kubik se společnou tětivou O_3O_4. Při širších grupách této $^1G^c_1$, kterou možno označiti $^1G^{l(c)}_1$, jest také lin. komplex invariantní; jsou to dle předešlého grupa s 2 a 3 parametry $^1G^{l(c)}_2$ a $^1G^{l(c)}_3$.

Nejširší grupou automorfních kollineací speciálního lineárního komplexu jest grupa $^1G_{11}$.

32. Při grupě $^2G_{2(3)}$ kollineací K^2, která obsahuje ty kollineace ze základní $^2G_3$, jež vyhovují podmínce $r = konst.$ ve vztahu $k_2 = k_1^r$, jest pro speciální hodnotu konstanty $r = -1$ invariantní svazek lineárních komplexů se společnými reciprokými polárami O_1O_2 a p. Na přímce invariantní O_1O_3 (podobně na O_2O_3) indukuje totiž grupa $^2G_3$ jednorozměrnou grupu proj. transformací, a to v řadě bodové parametru k_1, ve svazku rovin s parametrem k_2; při grupě $^2G_{2(3)}$ a supposici $r = -1$ mají obě grupy týž parametr, každému bodu lze přiřaditi incidentní rovinu, jež tvoří dvojici sobě příslušných elementů v nulové korrelaci; tato korrelace definuje lineární komplex s invariantními paprsky O_1O_3 a O_2O_3. Dvoupar. grupu $^2G_{2(3)}$ nazveme přiměřeněji $^2\mathbf{G}^l_2$. Jako při této $^2G^l_2$ jest také při užší grupě $^2G_{1(3)}$, kde je proměnlivým parametrem a a platí $k_1 = m^a$, $k_2 = m^{-a}$ s konst. m, invariantní svazek lin. komplexů s reciprokými polárami O_1O_2 a p; tuto grupu označíme $^2\mathbf{G}^l_1$.

Z grup $^2G^l_2$ a $^2G^l_1$ sestrojíme zase širší grupy. Při $^2G^l_2$ existuje na poláře p jeden invariantní bod O_3 grupy transformací [(00)], na druhé poláře O_1O_2 dva invar. body grupy transformací [00]; v invar. rovině $O_3O_1O_2$ může existovati grupa s 1, 2 nebo 3 parametry. V souhlase s druhým a třetím případem máme v prostoru grupu $^2\mathbf{G}^l_{3(2)}$, při níž je invar. lin. komplex, jeho dvě rec. poláry, na každé jeden bod (O_3 a O_1), a grupu ${}^2\mathbf{G}^{l}_{4(2)}$ s invar. komplexem, jeho dvěma polárami a bodem na jedné z nich (O_3 na p). Z ${}^2G^l_1$ vzniká pouze ${}^2\mathbf{G}^l_{2(1)}$ s týmž invariantním útvarem jako ${}^2G^l_{3(2)}$.

Grupy ${}^2G^l_2$, skládající širší grupy, mohou však míti také různé invar. rec. poláry, za to společnou část invariantního útvaru patřícího do komplexu; tak nalezneme tyto grupy automorfních kollineací lineárního komplexu, složené z ${}^2G^l_2$: ${}^2\mathbf{G}^{l'}_{3(2)}$ s invariantními dvěma přímkami komplexu O_1O_3 a O_2O_3 a druhým bodem na jedné z nich, třebas O_1 (inv. je ovšem také příslušná rovina O_1p); ${}^2\mathbf{G}^{l'}_{4(2)}$ s invariantní přímkou O_1O_3 a dvěma body na ní O_1, O_3 (a s rovinami O_1p, ϱ_3); ${}^2\mathbf{G}^l_{5(2)}$ s invariantní přímkou komplexovou O_1O_3 a bodem na ní O_1 (s rovinou O_1p). Z jednoparametrových ${}^2G^l_1$ lze konstruovati širší grupy bez společných invar. rec. polár obdobně tyto: ${}^2\mathbf{G}^{l'}_{2(1)}$ s týmž invar. útvarem jako ${}^2G^{l'}_{3(2)}$, ${}^2\mathbf{G}^l_{3(1)}$ s invar. útvarem grupy ${}^2G^{l'}_{4(2)}$, konečně ${}^2\mathbf{G}^l_{4(1)}$, obdobná grupě ${}^2G^l_{5(2)}$, s invariantní přímkou komplexovou O_1O_3, bodem na ní O_1 a rovinou jemu v komplexu korrespondující O_1p; na rovině této existuje patrně ještě užší grupa ${}^2g_{3(4)}$ grupy ${}^2g_4$.

Bylo nalezeno, že při ${}^3G'_{2(3)}$ jest invariantní svazek ploch 2. stupně se společnými přímkami r, s; zároveň jest invariantní svazek lin. komplexů, obsahující speciální lineární kongruenci s koincidujícími řídícími přímkami v přímce $t \equiv OO'$. Přímka tato ovšem patří také ke komplexu. Lineární komplex připouští vedle uvažované ${}^3G'_{2(3)}$, kterou označíme ${}^3\mathbf{G}^l_2$, též užší ${}^3G_{1(3)}$ čili ${}^3\mathbf{G}^l_1$. Nalezneme širší grupy složené z ${}^3G^l_2$ i grupy složené z ${}^3G^l_1$, a to ${}^3\mathbf{G}^l_{3(2)}$ a ${}^3\mathbf{G}^l_{2(1)}$ s invar. lineárním komplexem a společnými invar. přímkami r, t a druhým bodem O' na t; ${}^3\mathbf{G}^l_{4(2)}$ a ${}^3\mathbf{G}^l_{3(1)}$ s invar. přímkou t a dvěma body na ní O, O'; ${}^3\mathbf{G}^{l'}_{4(2)}$ a ${}^3\mathbf{G}^{l'}_{3(1)}$ s invar. přímkami r a t; ${}^3\mathbf{G}^l_{5(2)}$ a ${}^3\mathbf{G}^l_{4(1)}$ s invariantní přímkou r a bodem O na ní (a přiřazenou rovinou).

Při kollineacích grupy ${}^5G_{1(6)}$ čili ${}^5G^c_1$, k nimž patří soustava ∞^2 invariantních kubik, jsou invariantní také lin. komplexy, kubikami určené; lze grupu tu označiti tedy ${}^5\mathbf{G}^l_1$. Lineární komplex jest dále invar. při ∞^1 takových grupách, jež tvoří ${}^5\mathbf{G}^l_2$ s invariantním kuželem, obsahujícím ∞^1 křivek kubických, a při ${}^5\mathbf{G}^l_3$, složené z ∞^2 grup ${}^5G^l_1$; při poslední grupě jest v celku invariantní svazek ∞^1 kuželů, na kterých leží ∞^2 křivek 3. st.

Podmínkou, aby kollineace K^1 s invariantním čtyrstěnem $O_1O_2O_3O_4$ a parametry k_1, $k_2 = k_1^r$, $k_3 = k_1^s$ měla invariantní lineární komplex s reciprokými polárami O_1O_2 a O_3O_4, a tedy svazek ∞^1 takových komplexů byl shledán vztah $1 = s - r$ (čili $k_1k_2 = k_3$). Nejobecnější typus K^1 přejde v K^6 s osou inv. bodů O_3O_4 pro $k_3 = 1$, t. j. $s = 0$; podmínka hořejší redukuje se zde na tvar $r = -1$. Kollineace K^6 má invariantní lin. komplex s rec. polárami $r \equiv O_3O_4$, $s \equiv O_1O_2$, platí-li o jejích parametrech $k_2 = k_1^{-1}$; existuje ∞^1 těchto komplexů Takový komplex obsahuje dva rovinné svazky paprsků jednotlivě samodružných, totiž svazky středů O_1, O_2 rovin ϱ_2, resp. ϱ_1.

Kdybychom místo poláry volili přímku komplexu, invariantního při K^1, za osu kollineace K^6, na př. přímku O_2O_4, platilo by $k_2 = 1$ a proto následkem uv. podmínky $k_1 = k_3$, což značí, že i přímka O_1O_3 obsahovala by rovněž jako O_2O_4 identickou transformaci; dostáváme tedy nikoli K^6, nýbrž K^{10}.

Kollineace grupy ${}^6G_{1(2)}$ nechávají invariantními lin. komplexy svazku s rec. polárami r a s; zvolíme jeden invariantní komplex k dalšímu vyšetřování, jeho grupu pak označíme ${}^6\mathbf{G}_1^l$. Na s může místo grupy s 1 parametrem nastoupiti grupa proj. transformací s 2 nebo 3 parametry; lin. komplex připouští dle toho širší grupy ${}^6\mathbf{G}_2^l$ a ${}^6\mathbf{G}_3^l$, složené z ${}^6G_1^l$, při kterých jsou invariantní buď jenom všechny paprsky jednoho svazku (středu O_1 roviny ϱ_2) nebo není paprsků komplexových při všech kollineacích grupy invariantních; rec. poláry zůstávají ovšem samodružnými. S druhé strany skládejme ${}^6G_1^l$ s různými polárami. Z ∞^1 grup ${}^6G_1^l$, jež mají společné všechny invariantní přímky jednoho rovinného svazku v lineárním komplexu (třebas O_1 v ϱ_2), z druhého takového svazku jen jednu přímku p, vzniká ${}^6\mathbf{G}_2^{l\prime}$; rec. poláry tvoří rovinné svazky, r v rovině ϱ_2 se středem D na p, s v rovině O_1p se středem O_1, body O_2 leží při různých ${}^6G_1^l$ na přímce p. Mají-li ${}^6G_1^l$ společné pouze invar. přímky jednoho svazku (O_1, ϱ_2), skládají buď ${}^6\mathbf{G}_3^{l\prime}$ s invar. rovinou ϱ_2, obsahující paprsky komplexu vesměs invariantní (středu O_1), na jedné z nich ještě invar. bod D, proto i invar. rovinu incidentní s bodem tím a s bodem O_1; rec. poláry opisují rovinné svazky, r v ϱ_2 středu D, s v druhé invar. rovině středu O_1; nebo konečně ještě širší ${}^6\mathbf{G}_4^l$. Tato obsahuje ∞^3

grup ${}^{6}G_1^l$ se společnými paprsky vesměs invariantními jednoho rov. svazku komplexového (O_1, ϱ_2); rec. poláry r vyplňují v počtu ∞^2 rovinu ϱ_2 zmíněného svazku, s pak prost svazek středu O_1. — Všech kollineací K^6, při nichž je lin. komplex invariantní, jest ∞^7 (∞^4 přímek s, tím i r, ∞^2 bodů O_1, O_2, ke každému útvaru ${}^{6}G_1^l$), netvoří však grupu.

Bylo v předešlém nalezeno, že kollineace K^{10}, jejíž osy r a s jsou přímky lin. komplexu, je automorfní transformací tohoto komplexu. Poněvadž jest komplex úplně určen pěti přímkami, nutno mimo r a s voliti 3 přímky; existuje tedy ∞^3 lineárních komplexů invariantních při určité kollineaci K^{10}. Při všech kollineacích grupy ${}^{10}G_1$ (${}^{10}\mathfrak{G}_1^l$) jsou invariantní lin. komplexy systému ∞^3 komplexů, jež mají obě osy kollineací společnými přímkami; že jest lin. komplex invariantní při ${}^{10}G_1^l$, patrno i odtud, že komplexová přímka protínající osy r a s je sama invariantní, komplexová přímka pak mimoběžná k osám přechází kollineacemi grupy v paprsky přímkové řady 2. stupně, kterou spolu s osami určuje a jež je celá v komplexu obsažena. Mohou osy kollineace K^{10} býti rec. polárami invar. komplexu? Aby tomu tak bylo, jest nutno (volíme-li O_1O_2 a O_3O_4 inv. čtyrstěnu kollineace K^1 za osy), by $\frac{k_1}{k_2} = 1$ a $k_3 = 1$, tedy dle hořejšího musí $k_1^2 = 1$, odkudž plyne, že kollineace K^{10} je identitou nebo involutorní kollineací dvojosou; neexistuje proto kontinuitní grupa dvojosých kollineací lin. komplexu, kde osy kollineací by byly rec. polárami vzhledem ke komplexu.

Z grup ${}^{10}G_1^l$ sestrojíme širší. Lin. komplex je předně invariantní při grupách ${}^{10}G_2^q$ a ${}^{10}G_3^q$, dříve nalezených, jež jsou automorfními grupami plochy 2. stupně. Při ${}^{10}G_2^q$ (${}^{10}\mathfrak{G}_2^l$) má komplex invariantní jednu osu kollineací grupy, druhá osa nabývá různých poloh v soustavě plošných přímek 2. st, ku které ona osa patří; druhá soustava je ve všech svých členech invariantní. Při ${}^{10}\mathfrak{G}_3^l$ (${}^{10}G_3^q$) jsou invariantní všechny přímky jedné řady vytvořujících přímek plochy 2. st., v komplexu obsažené. Řadu nových grup, při nichž je lin. komplex invariantní, nalezneme za supposice, že jednotlivé ${}^{10}G_1^l$ mají společnou jednu osu (r), druhá pak že nabývá různých poloh v komplexu. Jestliže mimo invariantní přímku r jest invariantní bod a tím i rovina jemu v komplexu přiřazená, má druhá osa s ∞^1 poloh ve svazku s invar. bodem jako středem v invar. rovině; příslušná grupa je ${}^{10}\mathbf{G}_2^{l'}$. Nebo jest mimo r invariantní přímka komplexová u, protínající osu r; zde jest invariantní průsečík obou přímek a rovina jich, osy s invariantní při jednotlivých ${}^{10}G_1^l$, zaujmou ∞^2 poloh v rovinách jdoucích přímkou u (v každé svazek ∞^1); obdržíme tak grupu ${}^{10}\mathbf{G}_3^{l'}$. Avšak mimo r může býti invariantní také přímka ji protínající, jež nepatří komplexu; tím jest invariantní i její reciproká polára, protínající rovněž r; grupa jest ${}^{10}\mathbf{G}_3^{l''}$. Nebo konečně jest grupám ${}^{10}G_1^l$ společná pouze invar. přímka r, osy s nabývají ∞^3 poloh v komplexu; vzniká ${}^{10}\mathbf{G}_4^l$. — Daný komplex je invariantní při ∞^7 kollineacích K^{10} (∞^3 přímek s, tolikéž přímek r, ke každé dvojici ${}^{10}G_1^l$), jež netvoří grupu.

Při ${}^{11}\mathbf{G}_1^l$ je invariantních ∞^3 komplexů, na každém 2 svazky paprsků jednotlivě invariantních; ke každé takové dvojici patří ∞^1 komplexů invar. Zvolíme-li jeden komplex k další úvaze, shledáme, že jest invariantní i při ∞^1 grupách ${}^{11}G_1^l$, jež tvoří ${}^{11}\mathbf{G}_2^l$ s jedním svazkem paprsků jednotlivě invariantních; každá složka ${}^{11}G_1^l$ má druhý svazek takový se středem na ose r a v rovině komplexem jemu přiřazené. Jestliže s druhé strany je invar. přímka nekomplexová (protínající ovšem osu r), tedy i její polára, máme grupu ${}^{11}\mathbf{G}_2^l$. Konečně, je-li pouze osa r invariantní, existuje grupa ${}^{11}\mathbf{G}_3^l$.

Lin. komplex je invariantní ještě při jednom typu kollineací, totiž při limitní homologii K^{13}. Není invariantní při homologii obecné K^{12}; neboť nulové body invariantních rovin homologie leží — jsouce invariantní — na osové rovině, musí proto průsečík těchto invar. rovin, totiž střed homologie, jenž je nulovým bodem roviny vyplněné nulovými body rovin těch, ležeti na rovině osové. Při kollineaci K^{13} jest invariantních ∞^3 lin. komplexů; existuje grupa ${}^{13}G_1$, kterou tyto lin. komplexy připouštějí, tedy ${}^{13}\mathbf{G}_1^l$. — Lin. komplex je invariantní při ∞^4 kollineacích K^{13}, jež netvoří grupu.

Existuje ještě několik grup užších, příslušných k širším grupám v odd. II. 3. sestrojeným, rovněž několik grup automorfních kollineací kuželosečky a lin. komplexu; jsou obdobny grupám ${}^1g''_3$, ${}^1g'_{3(4)}$ a ${}^1g_{5(6)}$ ($r = -1$) a vyžadují delšího rozboru.

III. Historické poznámky.

A) Klassifikace kollineací.

33. Klassifikaci (nedegerovaných) kollineací v *rovině* podali *Clebsch* a *Gordan*[1]), vyšetřujíce v theorii konnexu 1. stupně 1. třídy methodami theorie forem zvláštní případy kollineace, konnexem vyjádřené.

Všechny typy kollineací, také degenerovaných, v rovině i v prostoru vyšetřil několika způsoby G. *Loria*[2]), mimo jiné geometrickým výkladem dvojice forem bilineárních a applikací Weierstrassovy věty o významu elementárních dělitelů příslušného determinantu.

S. *Lie*[3]) odvozuje rozborem svého symbolu pro infinitesimální projektivní transformaci nejprve 8 typů infinit. affinních transformací, potom odtud 5 typů infin. proj. transformací čili 5 typů jednoparametrových proj. grup v rovině, což doplňuje G. *Scheffers* geometrickou úvahou, že pouze uvedených 5 útvarů sestávajících z invariantních bodů a přímek může se při proj. transformacích vyskytovati. Kratším podobným způsobem určil typy infinit. proj. transformací v rovině Lie na jiném místě[4]).

Synthetikové dělí kollineace především na homologické a nehomologické; pro podrobné roztřídění lze pokládati kollineaci dvou soumístných soustav rovinných za řez dvou proj. svazků prostorových nekoncentrických. Korrespondující paprsky takových dvou svazků protínají se dle věty Seydewitzovy v kubické křivce prostorové, stopy této v řezu rovinném jsou samodružné body kollineace; má-li rovina ona ke křivce obecnou polohu, vzniká 1. typus kollineace, dotýká-li se jí v 1. nebo 2. stupni, vychází 2. resp. 3. typus, jestliže pak kubická křivka se rozpadne v kuželosečku a přímku ji protínající, existuje buď 4. nebo 5. typ dle toho, veden-li řez přímkou nebo přímkou

---

[1]) A. Clebsch u. P. Gordan, Über biternäre Formen mit contragredienten Variabeln, Math. Annalen 1. 1869. pp. 360—400 (zvl. 390—400).

[2]) G. Loria, Sulle corrispondenze proiettive fra due piani e fra due spazii, Giornale di matem. 22. 1884. pp. 1—16.

[3]) S. Lie-G. Scheffers, Vorlesungen über continuierliche Gruppen, 1893. pp 56—67.

[4]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III. pp. 81—85.

a zároveň tečnou kuželosečky v průsečíku přímky a kuželosečky. V základě tímto způsobem klassifikuje *Reye* [5]), blíže Loria.

Jinak, nevybočujíce z roviny, obdržíme různé typy kollineací volbou vzájemné polohy dvou kuželoseček v kollineaci sobě příslušných, z nichž první jest vytvořena paprskovými svazky korrespondujícími středů S a S_1, druhá svazky středů S_1 a S_2, v téže kollineaci sobě přiřazenými; průsečíky paprsků jdoucích bodem S_1 s kuželosečkami jsou korrespondující body, průsečíky obou kuželoseček (vyjma S_1 v případě 1.—3.) jsou body samodružné. Tak v podstatě *Reye* [6]), soustavně Newson.

H. B. *Newson* vychází od dvojice duálních vět o projektivním vztahu křivých řad resp. svazků na kuželosečkách [7]): Dvě křivky 2. stupně, ležící v téže rovině a mající společný bod O, uvedou se ve vztah projektivní, přiřadíme-li sobě body jejich ležící na témž paprsku skrze O; neboť obě křivky jsou perspektivní k svazku paprskovému O. Dvě křivky 2. st., ležící v téže rovině a mající společnou tečnu t, uvedou se ve vztah projektivní, přiřadíme-li sobě každé jejich dvě tečny, protínající se v bodě na t; křivé svazky 2. stupně z nich sestávající jsou totiž perspektivní k řadě bodové t. Krátká úvaha ukazuje, že dána-li mezi dvěma rovinami kollineace, existují dvojice kuželoseček, dotýkajících se téže přímky, z jichž tečen sobě odpovídají ty, které se protínají na oné přímce; i lze konstruovati každou kollineaci pomocí tečen takových dvou kuželoseček. Z různých možných poloh vzájemných plynou tyto typy [8]): při obecné poloze obou kuželoseček typ K^1, mají-li kuželosečky dotyk 1. nebo 2. stupně v bodě mimo t, typus K^2 resp. K^3, konečně typus K^4 při dotyku 1. stupně na t a typ K^5 při dotyku 2. nebo 3. stupně tamtéž. Duálně lze konstruovati každou kollineaci v rovině také pomocí dvou kuželoseček protínajících

---

[5]) Reye, Geometrie der Lage, 2. Abth., 1. vyd. 1868 pp. 106—7. Loria na uv. místě.

[6]) Reye, Geom. d. Lage, 2. Abth., 3. (1892) nebo 4. (1907) vyd. pp. 69—70.

[7]) Reye, Geom. d. Lage, 1. Abth. 1. vyd. p. 104., 4. vyd. p. 133.

[8]) Newson, Continuous groups of projective transformations treated synthetically, Kansas Univ. Quarterly 4. 1896. pp. 243—249.

se v bodě O, jestliže přiřadíme sobě průsečíky každého paprsku skrze O s oběma křivkami [9]).

Klassifikace kollineací v rovině (ve svazku prostorovém) vyskytuje se ovšem také jako příklad klassifikace kollineací v S_n. Rozbor možných případů, zvl. analytický, bývá uváděn v obsáhlejších učebnicích, [10]) tamtéž metrické specialisace.

34. Obecné typy kollineací v *prostoru trojrozměrném* plynou z možných poloh spojnice dvou korrespondujících bodů vzhledem k invariantnímu čtyrstěnu; vypočítává je už *Staudt*, [11]) jenž podává také konstrukci kollineací těchto i partikulárních, dále na př. *Reye* [12]) a j. (typus K^6 nazván planární, typ K^{10} „geschaart"). Také G. *Battaglini* [13]) v úvaze o prostorovém konnexu 1. stupně, jenž ovšem definuje kollineaci v S_3, uvádí a charakterisuje algebraicky i geometricky obecné typy (nedegerované), nazývaje typy K^6, K^{10}, K^{12} perspektivností resp. 1. 2. 3. druhu (prospettiva, omologia di 1ª 2ª 3ª specie). Geometrický rozbor všech možných případů kollineace v S_3 (také v S_2) podává *Sannia* [14]), vycházeje jednak od přímky s body vesměs samodružnými, potom od přímky jako osy bodů i rovin samodružných, potom od invariantního bodu a roviny. O obecných typech kollineací jedná krátce též F. *Schur* [15]), srovnávaje Ponceletovo a Chaslesovo rozšíření Desarguesovy věty o perspektivních trojúhelnících na vzájemnou polohu dvou čtyrstěnů v S_3 a uváděje dvě analogické věty souvisící s typem K^6, který nazývá axiální kollineací.

Klassifikaci úplnou kollineací v S_3 podal na týchž základech jako pro rovinu *Loria* [2]); vykládá také souvislost jich

---

[9]) Newson, On the construction of collineations, Kansas Univ. Quart. 9. 1900 pp. 65—68.

[10]) Viz na př. Heffter-Koehler, Lehrbuch der analyt. Geometrie I. pp. 182—185. Lie-Scheffers, Vorl. über contin. Gruppen pp. 510—512.

[11]) Staudt, Beiträge zur Geom. d. Lage, Nürnberg, 3. Heft 1860. pp. 329—332.

[12]) Reye, G. d. Lage 2. Abth. 1. vyd. (1868) p. 108., 4. vyd. (1907) p. 71.

[13]) Battaglini, Sulla geometria proiettiva. Memoria terza. Giornale di matem. 14. 1876. pp. 110—138, viz pp. 114—116.

[14]) A. Sannia, Lezioni di geometria proiettiva, 2. vyd. Napoli 1895.

[15]) F. Schur, Über besondre Lagen zweier Tetraeder, M. A. 19. 1882 pp. 429 - 432.

s různými druhy tetraedrálního komplexu. Jako příklad své klassifikace kollineací v S_n uvádějí typy kollineací v S_3 (na místech dále uvedených) *Segre, Muth* a *Predella*; Loria a Muth uvádějí podrobně také typy degenerované (11 typů singulárních 1. druhu, 6 typů 2. druhu, 2 třetího druhu). Algebraickým rozborem přichází také R. le *Vavasseur*[16]) při stanovení jednoparametrových subgrup lineární homogenní grupy 4 proměnných k 14 (s identickou kollineací) typům.

Newson[17]) rozšířil uvedenou konstrukci kollineace rovinné pomocí dvou projektivně sobě korrespondujících kuželoseček na S_3. Dejme tomu, že v kollineaci přísluší bodu S bod S_1, tomuto bod S_2, tedy svazku prostorovému středu S svazek středu S_1, tomuto svazek středu S_2. Korrespondující paprsky svazků S a S_1 protínají se v bodech prostorové křivky kubické C, obdobně svazky S_1 a S_2 vytvořují kubiku C_1; v dané kollineaci přísluší křivce C křivka C_1. Obě kubické křivky leží na témž kvadratickém kuželi středu S_1, korrespondující body obou křivek leží na paprscích skrze S_1. Každou kollineaci prostoru lze úplně sestrojiti pomocí dvou kubických křivek C a C_1, protínajících se v bodě S_1 a ležících na témž kuželi kvadratickém s vrcholem v S_1. Křivky C a C_1 protínají se mimo bod S_1 obecně ještě ve čtyřech bodech, jež jsou ovšem samodružné body kollineace; jsou-li tyto čtyři průsečíky různé, máme typ K^1 : [0000], splynou-li dva nebo dva a dva nebo tři nebo konečně čtyři průsečíky, vzniká resp. K^2 : [(00)00], K^3 : [(00)(00)], K^4 : [(000)0], K^5 : [(0000)]. Splyne-li jeden nebo dva z průsečíků těch s bodem S_1, jest kollineace homologií obecnou K^{12} : [20] nebo limitní K^{13} : [(20)]. Degeneruje-li kvadratický kužel, na němž C i C_1 leží, ve dvě roviny se protínající, degeneruje každá kubika v kuželosečku a přímku; obě kužel-

[16]) R. le Vavasseur, Les sous-groupes du groupe linéaire homogène à quatre variables: sous-groupes à un et à deux paramètres. Annales de la Fac. d. Sc. de Toulouse (2) 8. 1906. — Při svých analytických vyšetřováních ustanovil typy K^1 až K^5 W. de Tannenberg (Sur les équations aux derivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes, qui admettent un groupe continu de transformations, Annales de Toulouse 5. 1891, pp. B 1—150, spec. pp. 115—126).

[17]) Newson, On the construction of collineations, Kansas Univ. Quart. 9. 1900. pp. 68—71.

sečky leží v téže rovině, v druhé leží obě přímky koincidujíce (p) a majíce s kuželosečkami jeden jich průsečík A společný. Tři z průsečíků obou kuželoseček (mimo S_1) jsou samodružné body příslušné kollineace, přímka p jedním z nich (A) je osou bodů samodružných; vzniká typus K^6 : [100]. Mají-li kuželosečky dotyk 1. stupně mimo S_1 i A, máme K^7 : [1(00)], mají-li dotyk takový v A, typus K^8 : [(10)0], při dotyku 2. stupně mimo S_1 existuje typ K^9 : [(100)]; splyne-li bod A s bodem S_1, jest kollineace typu K^{10} : [11], mají-li v bodě $A \equiv S_1$ kuželosečky dotyk 2. stupně, jest kollineace typu K^{11} : [(11)].

O obecných kollineacích, jež na dvou pevných mimoběžkách vytvořují dané proj. transformace, jedná E. *Meyer*[18]).

35. Pro klassifikaci kollineací v S_n navrhoval už *Cayley*[19]) (r. 1855) užíti rozboru determinantu, jehož členy jsou lin. funkce proměnné veličiny. Takový determinant $n+1$. stupně roven nule slouží totiž k stanovení samodružných elementů dané kollineace; Cayley opíraje se z části o úvahy Sylvestrovy udává rekurrentní algorithmus, jak nalézti možné případy struktury tohoto determinantu, užívá vhodného symbolu pro složení jeho a podává také vzorec pro počet symbolů, t. j. pro počet

---

[18]) E. Meyer, Über die Kollineationen, die auf zwei windschiefen Geraden vorgeschriebene Punktprojectivitäten erzeugen. M. A. 59. 1904. pp. 398—408. Některé věty jeho plynou snadno také z našeho rozboru; na př. věta, že existuje ∞^1 kollineací (typu K^1), jež mají dvě mimoběžné přímky invariantní a vytvořují na nich tytéž dané projektivní transformace. Neboť jestliže přímky ty jsou třebas O_1O_2 a O_3O_4, platí podmínky

$$\frac{k_1}{k_2} = c_1, \; k_3 = c_2,$$

t. j. při třech proměnných dva vztahy. Nebo že mezi ∞^1 kollineacemi (typu K^6), při nichž má daná projektivnost na přímce-ose samodružných rovin dva reálni body samodružné, existují dvě a pouze dvě homologie. Kollineaci dvojosou uvažuje také Em. Weyr, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse einzweideutiger Gebilde etc. (Note D: Die windschiefe Raumkollineation), Leipzig, 1870.

[19]) A. Cayley, Sept différents mémoires d'analyse: No. 7. Recherches sur les matrices dont les termes sont de fonctions linéaires d'une seule indéterminée. Crelle's Journal 50. 1855. pp. 313—317.

typů kollineací v S_n[20]. Jako příklad volí jenom rovinu, v níž nalézá 6 typů (s identickou kollineací); pro $n = 3$, ač počet typů udán 14, uvedeno (patrně nedopatřením tisku) pouze 12 symbolů, mezi nimiž na př. $\boxed{\begin{matrix}21\\2\end{matrix}}$ značí, že determinant má dva faktory dvojné, z nichž pouze jeden vyskytuje se ve všech prvních minorech jako faktor jednoduchý, nebo symbol $\boxed{\begin{matrix}321\\1\end{matrix}}$ značí, že determinant má jeden faktor trojnásobný, jejž mají všechny první subdeterminanty za faktor 2. stupně, všechny druhé minory jako faktor jednoduchý, druhý činitel pak že je v determinantu jednoduchý. Značil by tedy onen symbol typus K^7 : [1 (00)], tento homologii K^{12} : [20] v S_3[21]. Symbol Cayleyův souvisí úzce se Segreovým, jenž nezávisle připadl na na touž myšlenku a ji provedl.

Segre[22] (r. 1884) učinil základem své klassifikace kollineací v S_n důležitý theorém Weierstrassův[23] o ekvivalenci dvou řad forem bilineárních; k větě té se připínající theorie Weierstrassova došla ostatně jako dokonalý princip klassifikační i četných jiných applikací, zvl. v geometrii.

Kollineace mezi dvěma prostory soumístnými je totiž vyjádřena dvojicí bilineárních rovnic

$$\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0, \quad \Sigma b_{ik} x_i \xi'_k = 0,$$

---

[20]) Počet typů kollineací ustanovuje postupně až pro S_{11} E. B. Wilson, The number of types of collineations, Jahresber. d. deutschen Math.-Ver. 17. 1908. (říjen) pp. 341—344, »nemoha nikde nalézti otázku tu řešenu«. Výsledky jeho shodují se s čísly, jež udal už Cayley (až pro S_{10}); počet typů kollineací v S_n pro $n = 1$ až 10 jest (bez identické transformace) pořadem 2, 5, 13, 26, 57, 110, 222, 423, 816, 1526.

[21]) V svém příkladě rovinných kollineací interpretuje Cayley nesprávně symbol $\boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}}$ jako homologii, která však má symbol $\boxed{\begin{matrix}21\\1\end{matrix}}$, kdežto onen značí kollineaci [(00) 0].

[22]) C. Segre, Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. Memorie Acc. Lincei (3) 19., 1884. pp. 127—148.

[23]) Weierstrass, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsber. Akad. Berlin, 1868. pp. 310—338.

z nichž aspoň jedna má determinant koefficientů $\neq 0$; x $(i = 1, 2 \ldots n + 1)$ značí tu homogenní souřadnice bodu x' v lin. prostoru S_n, ξ'_k $(k = 1, 2, \ldots n + 1)$ pak hom. souř. roviny ξ', t. j. lin. prostoru S'_{n-1} v konjektivním S'_n. Dejme tomu, že jiná kollineace je dána dvojicí

$$\Sigma p_{ik} z_i \zeta'_k = 0, \quad \Sigma q_{ik} z_i \zeta'_k = 0;$$

i jest pro klassifikaci základní otázkou, co jest nutnou a dostatečnou podmínkou toho, by obě kollineace byly projektivně identické, t. j. aby jedna přecházela v druhou lineární transformací. Weierstrass dokázal, že podmínkou takovou jest, aby elementární dělitelé determinantu $| a_{ik} - \lambda b_{ik} |$ souhlasily s elem. děliteli determinantu $| p_{ik} - \lambda q_{ik} |$.

V jednodušším tvaru jest vztah kollineární mezi S_n a S'_n vyjádřen rovnicí s kontragredientními proměnnými

$$\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0,$$

z níž vypisujeme vzorce pro kollineární transformaci bodu

$$\varrho x'_k = \sum_i a_{ik} x_i$$

a roviny

$$\sigma \xi_i = \sum_k a_{ik} \xi'_k.$$

Aby kollineace nedegenerovala, musí $| a_{ik} | \neq 0$.

Pro samodružné body x platí $n + 1$ rovnic

$$\varrho x_k = \sum_i a_{ik} x_i;$$

jest řešiti nejprve charakteristickou rovnici

$$\Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho, & a_{21} & , \ldots a_{n+1,1} \\ a_{12} & , a_{22} - \varrho & , \ldots a_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{1,n+1} & , a_{2,n+1} & , \ldots a_{n+1,n+1} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

jež má obecně $n + 1$ různých kořenů ϱ_k. Dosadíme-li $\varrho = \varrho_k$ do hořejších rovnic, nalezneme souřadnice $n + 1$ bodů samodružných. Jestliže však některé z kořenů ϱ_k jsou násobné, třeba stanoviti, až do kterého stupně annuluje takový kořen všechny subdeterminanty derminantu $\Delta(\varrho)$; dejme tomu, že třebas pro $\varrho = \varrho_p$ jsou rovny nule všechny subdeterminanty až do stupně

$(n - h + 2)$., nikoli už všechny stupně $(n - h + 1)$.; pak z hořejších rovnic zbude pouze h nezávislých, existuje ∞^{h-1} samodružných bodů, jež vyplňují t. zv. základní prostor bodový $(h - 1)$. rozměru S_{h-1}; h, jak patrno, musí býti $\geqq 1$. Obdobně z transformačních rovnic pro rovinu plyne existence základních prostorů rovinových; zákl. prostor bodový a rovinový, příslušné k témuž kořenu, slují konjugované. (Dokončení.)

O jistém integrálu omezeném.

Dr. **Ant. Pleskot**, prof. v Plzni.

V XVI. ročníku časopisu „Monatshefte f. Mathematik u. Physik" (str. 141—160) zabýval se p. G. Huber vyčíslením integrálu:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{log\ sin\ \varphi}{a - b\ sin^2\ \varphi}\ d\varphi, \tag{1}$$

v němž a i b realná čísla značí; při tom se vyslovil, že integrál tento nelze vyčístiti obvyklými methodami, nýbrž jen použitím volné integrační cesty.

Ukážeme, že možno bez pomoci volné integrace obvyklými methodami předložený integrál vyčísliti a k závěrku pak jiným způsobem spočívajícím na volné integraci předložený integrál vyčíslíme.

V integrálu hořejším, který lze patrně též psáti ve tvaru:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{log\ sin^2\ \varphi}{a - b\ sin^2\ \varphi}\ d\varphi,$$

zaveďme substituci:

$$t = cot\ \varphi;$$

tím promění se v integrál;

$$J = -\frac{1}{2} \int_\infty^0 \frac{log \frac{1}{1+t^2}\ dt}{a(t^2+1) - b} = \frac{1}{2} \int_\infty^0 \frac{log(1+t^2)\ dt}{a(1+t^2) - b}.$$