

J. Najman

Lom světla v čočkách a centrických systémech. [III.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 4, 491--511

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121454>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1909

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

počátek nemá; neboť pro $x = 0$ vychází $y^4 = -2l^2y^2$ čili $y^2(y^2 + 2l^2) = 0$; tedy buď $y = 0$ nebo $y = \pm l\sqrt{-2}$. Řešíme-li rovnici křivky dle y^2 , nalézáme

$$y^2 = -(x^2 + l^2) \pm l\sqrt{4x^2 + l^2};$$

aby y bylo reální, musí býti y^2 kladné, tedy může platiti jen znaménko $+$ v druhém členu a vedle toho musí býti

$$x^2 + l^2 \leq l\sqrt{4x^2 + l^2}$$

čili — umocníme-li a upravíme — $x^2 \leq 2l^2$, tedy abs. hodnota úsečky $x \leq l\sqrt{2}$. — První derivace určí se třeba z rovnice

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2l^2x^2 + 2l^2y^2 = 0,$$

jež derivováním přechází v rovnici

$$4x^3 + 4xy^2 + 4x^2y \cdot y' + 4y^3 \cdot y' - 4l^2x + 4l^2yy' = 0,$$

odtud

$$y' = -\frac{x(x^2 + y^2 - l^2)}{y(x^2 + y^2 + l^2)}.$$

Vrcholy dostaneme pro $x(x^2 + y^2 - l^2) = 0$; vychází jednak $x = 0$, jednak $x^2 + y^2 = l^2$. Pro $x = 0$ jest však také $y = 0$

a $y' = \frac{0}{0}$, bod tedy singulární. Pro $x^2 + y^2 = l^2$ ve spojení

s rovnicí křivky dostaneme $l^4 = 2l^2(2x^2 - l^2)$, tedy $x^2 = \frac{3l^2}{4}$

a $x = \pm \frac{l}{2}\sqrt{3}$, $y = \pm \frac{l}{2}$; i má křivka 4 vrcholy souměrně

položené dle obou os. Pro $(l\sqrt{2}, 0)$ jest $y' = \infty$, rovněž pro $(-l\sqrt{2}, 0)$; v průsečících těchto s osou X má křivka vedlejší vrcholy. (Dokonč.)

Lom světla v čočkách a centrických systémech.

Napsal prof. J. Najman z Rakovníka.

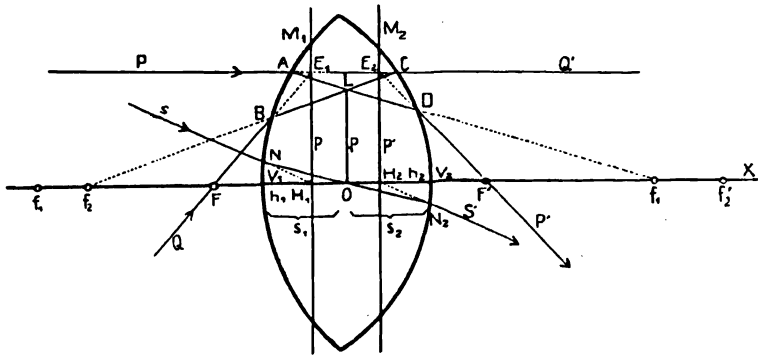
(Pokračování.)

3. Lom světla v čočkách.

Výsledky, ku kterým jsme dospěli v úvahách předešlých, mají obecnou platnost a dají se pohodlně aplikovati na čočky. Čočkou rozumíme optický systém centrováný o dvou sférických

plochách. Poněvadž lom světla v čočkách tenkých je v učebnici Reiss-Theurerově s dostatek probrán, omezíme se jen na ten případ, kdy třeba bráti ohled také na tloušťku čočky

Jako při centrickém systému optickém existují také u čočky dvě ohniska hlavní F a F' , jež patří čočce jako celku; poněvadž však čočka je omezena dvěma sférickými plochami, máme zde ještě čtyři ohniska vedlejší, z nichž první pár f_1 a f'_1 patří pouze prvé lámavé ploše a druhý pár f_2 a f'_2 jen druhé lámavé ploše. Je-li prvé prostředí se třetím totožno, jsou dle rovnice (14) hlavní ohniskové dálky stejně veliké a směru opačného



Obr. 12.

$F' = -F$, to jest, jsou položeny na různých stranách čočky. Tyto ohniskové dálky počítáme jako dříve od hlavních rovin čočky, t. j. takových dvou k ose kolmých a k sobě sdružených rovin, ve kterých je obraz s předmětem stejně veliký a téhož znamení. Odvození jich je zcela obdobné jako při obecném centrickém systému (obr. 12.).

Paprsek $P \parallel X$ láme se na prvé ploše směrem AD a na druhé směrem DP' procházejí druhým ohniskem F' . Lomenému paprsku Q' , který by vycházel z čočky v prodloužení paprsku P přísluší paprsek dopadový Q jdoucí prvním ohniskem F a mající takový směr, že po lomu na prvé ploše jde bodem C . Konvergentní paprsky P a Q tvoří svítící bod E_1 , který lze považovati za předmět (ve výkresu ovšem předmět virtuální, poněvadž se paprsky protínají v něm jen v prodloužení); předmět ten

patří prostředí prvému, poněvadž je tvořen paprsky P a Q v prvém prostředí probíhajícími. Poněvadž se však oba paprsky po dvojím lomu znova protínají v bodě E_2 , jest bod E_2 (zde opět zdánlivý a patřící do prostředí třetího, ježto je tvořen paprsky P' a Q') obrazem bodu E_1 . Oba body leží na spojnici rovnoběžné s osou a jsou k sobě sdruženy. Roviny body E_1 a E_2 k ose kolmo položené jsou rovinami hlavními. Hlavnímu bodu H_1 přísluší jako obraz druhý hlavní bod H_2 a obrazem úsečky $\overline{H_1 E_1}$ je úsečka $\overline{H_2 E_2}$ s ní stejně veliká a téhož směru.

Když by prvé prostředí bylo stejné se třetím (ku př. čočka byla s obou stran obklopena vzduchem), budou ohniskové dálky stejně veliké. Poněvadž pak první uzlový bod je vzdálen od prvního ohniska o druhou ohniskovou dálku (obr. 11.), splyne pro ten případ, že prostředí prvé má týž index lomu jako třetí, první uzlový bod s prvním hlavním bodem a druhý uzlový bod s druhým hlavním bodem.

Jsou-li obě krajní prostředí stejná, lze mluvit u čočky též o tak zvaném optickém středu. Bodu E_1 utvořenému paprsky P a Q patří po lomu na první sférické ploše bod L jako obraz, poněvadž se v něm paprsky AD a BC protínají. Bod L je pak na druhé sférické ploše zobrazen bodem E_2 , neboť, volíme-li bod L za svítící zdroj, protínají se P' a Q' v bodě E_2 . To platí ovšem též obráceně. Ku př. bod L je na první ploše zobrazen bodem E_1 atd. Podobně jest bod O obrazem bodu H_1 na první ploše a obrazem bodu H_2 na druhé ploše. Rovněž úsečky p a p' tvoří obrazy úsečky q na první resp. druhé sférické ploše. Bod O je bodem pevným, ježto i body H_1 a H_2 v dané čočce jsou body pevnými a nazývá se optickým středem čočky.

Míří-li tedy paprsek S vycházející z prvního prostředí ku bodu H_1 , lze bod H_1 považovati za předmět v prvém mediu, a tomuto v druhém mediu přísluší jako obraz bod O ; musí tedy paprsek S v čočce samotné procházeti středem optickým, aby pak po druhém lomu zdánlivě vycházel z obrazu bodu O na druhé sférické ploše, t. j. z bodu H_2 směrem S' , který jest rovnoběžný s S . Optický střed O má tedy tu vlastnost, že paprsky jím procházející jsou po výstupu z čočky spolu rovnoběžny, tak že se paprsek neuchýlí, nýbrž jen sám k sobě rovnoběžně posune, jako by prošel deskou planoparalelní. Není-li třetí

prostředí stejné s prvním, nesplývají uzlové body s body hlavními; pak přestává též existence optického středu.

Z obrazu (12) je patrné, že zadní ohnisko čočky F' je obrazem zadního ohniska přední lámavé plochy f'_1 vzhledem ke druhé sférické ploše, neboť paprsek \overline{AD} mířící do f'_1 láme se druhou plochou do F' . Podobně jest přední ohnisko druhé sférické plochy f_2 obrazem předního ohniska čočky F na první sfér. ploše.

Lom světla v čočce závisí v podstatě od těchto veličin: poloměrů křivosti obou ploch sférických R_1 a R_2 , indexů lomu všech tří prostředí a tloušťky čočky e . Tyto veličiny dlužno pokládati za známé. V předešlých úvahách o lomu světla centrickým systémem bylo zjištěno, že dovedeme k paprsku dopadajícímu najít vždy paprsek lomený tehda, je-li známa poloha obou hlavních rovin (ku př. jich vzdálenosti od vrcholů sférických ploch čočky V_1 a V_2) a poloha obou ohnisek systému F a F' (ku př. jsou-li známy jich distance od obou hlavních rovin). Poněvadž je čočka zvláštním případem centrického systému, třeba u ní znáti také podobné čtyři veličiny, k jichž určení potřebujeme obecně čtyři rovnice, a ty lze získati takto:

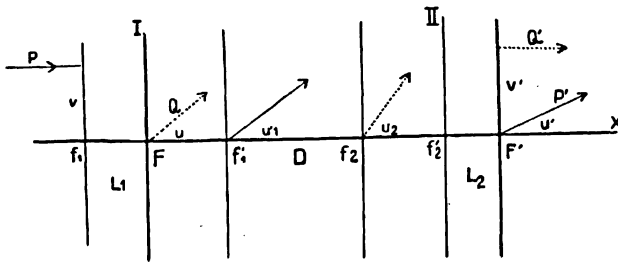
Lom světla na jediné sférické ploše je úplně určen dvěma ze základních rovnic (4), (5), (7). U čočky však máme k dispozici dvě sférické plochy. Najdeme-li pak vhodný předmět a obraz příslušící si lomem na přední sférické ploše (ku př. úsečky p , q nebo body f_2 a F) a jiný vhodný předmět a obraz příslušící si lomem na druhé sférické ploše (ku př. úsečky q a p' nebo body f'_1 a F'), a aplikujeme-li na ně dvě ze základních rovnic ku př. (4) a (5) nebo (4) a (7), dostaneme vždy čtyři rovnice, z nichž lze hledané čtyři veličiny vypočísti. Jsou-li ohniskové dálky u čočky stejné, pak ovšem postačí už tři rovnice. Kromě toho musí býti přivedena k platnosti definice ohniskové dálky; to je úsečka příslušná k bodu, který je sdružen s bodem ∞ vzdáleným.

Předpokládejme zatím obecně, že prostředí třetí je různé od prvního (tu není $F' = F$), a představme si k vůli přehlednosti, že obě sférické plochy u čočky jsou od sebe značně vzdáleny (obr. 13.).

Vzdálenost vnitřních ohnisek obou sférických ploch $f'_1 f_2 = D$ zoveme optickým intervallem. Paprsek $P||X$, který protíná

první ohniskovou rovinu přední sfér. plochy ve vzdálenosti v od osy, vystupuje pod určitým úhlem u'_1 z druhého ohniska téže plochy f'_1 , když se lomil na přední sférické ploše; po výstupu z druhé sférické plochy musí procházeti zadním ohniskem čočky F' pod úhlem ku př. u' (ježto $P \parallel X$). Podobně paprsek Q probíhající předním ohniskem čočky F , jde po prvému lomu ohniskem f_2 a pak vystupuje z druhé sférické plochy paralelně s osou ve vzdálenosti v' od ní.

Naším úkolem nyní bude najít obě ohniskové dálky čočky F a F' a vzdálenosti L_1 a L_2 ohnisek čočky od prvního ohniska prvé sférické plochy, resp. od druhého ohniska druhé sférické plochy (obr. 13.).



Obr. 13.

Pro lom na každé sférické ploše užitíme rovnic:

$$\omega\omega' = ff' \quad (\alpha)$$

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{f}{\omega'} = -\frac{\omega}{f'}, \quad (\beta)$$

kdež f je přední a f' zadní ohnisko sfér. plochy.

Ohniskové dálky čočky definujeme jako u centrovaného systému

$$F = \frac{v'}{\operatorname{tg} u}, \quad F' = \frac{v}{\operatorname{tg} u'};$$

podobně ohniskové dálky sférických ploch

$$f'_1 = \frac{v}{\operatorname{tg} u'_1}, \quad f_2 = \frac{v'}{\operatorname{tg} u_2}.$$

Všechny úsečky ω , ω' , L_1 , L_2 , D a všechny ohniskové dálky počítáme od příslušných ohnisek sfér. ploch na pravo kladně. Tu pak:

1. F a f_2 jsou sdruženými body při první sférické ploše. Aplikujeme-li na ně rovnici (α), jest:

$$L_1 \cdot D = f_1 \cdot f'_1, \quad L_1 = \frac{f_1 f'_1}{D}. \quad (15)$$

Užijeme-li rovnice (β) platí

$$\frac{\operatorname{tg} u_2}{\operatorname{tg} u} = -\frac{f_1}{D};$$

jest tedy přední ohnisková délka:

$$F = \frac{v'}{\operatorname{tg} u_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} u_2}{\operatorname{tg} u} = -f_2 \cdot \frac{f_1}{D} = -\frac{f_1 \cdot f_2}{D}. \quad (16)$$

2. f'_1 a F' jsou sdruženými body při druhé sférické ploše. Bude tedy dle rovnice (α)

$$L_2 \cdot -D = f_2 \cdot f'_2, \quad L_2 = -\frac{f_2 \cdot f'_2}{D}, \quad (17)$$

a dle rovnice (β)

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u'_1} = -\frac{-D}{f'_2};$$

jest tedy zadní ohnisková délka

$$F' = \frac{v}{\operatorname{tg} u'_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u'_1} = f'_1 \cdot \frac{f'_2}{D} = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{D}. \quad (18)$$

Je-li čočka o indexu n' z obou stran obklopena týmž prostředím o indexu n , tu

$$\frac{f'_1}{f_1} = -\frac{n'}{n}$$

při prvé, a

$$\frac{f'_2}{f_2} = -\frac{n}{n'}$$

při druhé sférické ploše; pak bude

$$f_1 f_2 = f'_1 f'_2 \quad \text{a} \quad F' = -F.$$

Z výkresu (12) vidíme, že optický intervall

$$D = \overline{f'_1 f_2} = \overline{f'_1 V_1} + \overline{V_1 V_2} + \overline{V_2 f_2} = f'_1 - f_2 + e.$$

Dají se tudíž ohniskové dálky čočky a úsečky L_1 a L_2 vyjádřiti pomocí ohniskových dálek ploch sférických a tloušťky čočky. Fokální distance přední sférické plochy jsou :

$$f_1 = \frac{nR_1}{n' - n} = \frac{R_1}{N - 1}, \quad f'_2 = -\frac{n'R_1}{n' - n} = -\frac{NR_1}{N - 1},$$

kde $N = \frac{n'}{n}$ je relativní index lomu skla čočky. Analogicky u druhé plochy :

$$f_2 = \frac{n'R_2}{n - n'} = -\frac{NR_2}{N - 1}; \quad f'_2 = -\frac{nR_2}{n - n'} = \frac{R_2}{N - 1}.$$

Píšeme-li místo N raději n a dosadíme-li uvedené zde výrazy, bude po krátké úpravě

$$D = \frac{n(R_2 - R_1) + e(n - 1)}{n - 1}$$

$$F = -F' = -\frac{f_1 f_2}{D} = \frac{nR_1 R_2}{(n - 1)[n(R_2 - R_1) + e(n - 1)]}. \quad (19)$$

Bude tedy optická mohutnost čočky

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n - 1}{n} \frac{e}{R_1 R_2} \right) = -\frac{1}{F'}. \quad (20)$$

Jedná-li se ku př. o to, najíti optickou mohutnost koule, jejíž index lomu je n , jest $R_1 = -R_2 = R$, $e = 2R$ a

$$\frac{1}{F} = \frac{2(n - 1)}{nR}.$$

Když bychom počítali, jako v učebnici, R_2 na *levo* kladně, musili bychom ve výrazu (20) změnití u R_2 znaménko v opačné. Pro čočky tenké je pak reciproká ohnisková délka

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Liší se tedy výraz pro optickou mohutnost čočky silné od hodnoty právě uvedené o korekční člen $\frac{(n - 1)^2}{n} \frac{e}{R_1 R_2}$.

Rovnice (12) platí pro centrický systém podrží platnost též pro čočku; v rovnici (12) čítali jsme F a x od první, F'

a x' od druhé hlavní roviny na pravo kladně. Je-li čočka s obou stran obklopena tímž prostředím, a čítáme-li podobně jako v učebnici x a F na *levo* kladně, změní se rovnice (12) ve tvar :

$$\frac{-F}{-x} + \frac{F}{x'} = 1;$$

poněvadž obě ohniskové dálky čočky mají opačné znamení, bude druhá ohnisková dálka $+F$, je-li prvá $-F$; odtud

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{F}. \quad (21)$$

Rovnice ta udává tedy vztah mezi vzdáleností předmětu a obrazu nejen u čoček tenkých, ale i u silných. Jedná-li se o případ čoček silných, třeba za $\frac{1}{F}$ dosaditi výraz uvedený pod (20). U tenkých čoček počítá se x a x' od středu čočky, kdežto u čoček silných od příslušných hlavních rovin.

Základní rovnice (10) a (11) přemění se pro náš případ takto :

$$\omega\omega' = -F^2, \quad (22)$$

ježto $F' = -F$, a

$$\frac{y'}{y} = \frac{F}{\omega}, \quad (23)$$

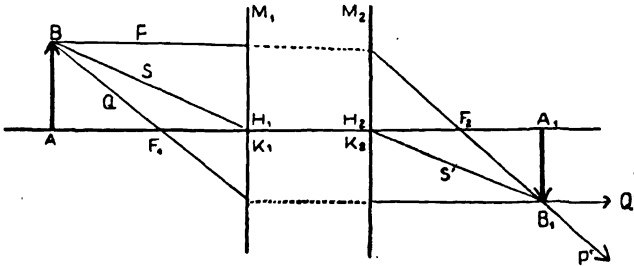
kdež zase všechny veličiny od ohnisek v pravo volíme za kladné.

Z prvé lze vypočísti vzdálenost obrazu k danému předmětu a z druhé příčné zvětšení u čočky. Je patrné, že tu mohou nastati případy dva; buď je

1. prvá ohnisková dálka kladná a druhá záporná — *čočka spojná*,
2. prvá ohnisková dálka záporná a druhá kladná — *čočka rozptylná*.

Nyní provedeme konstrukci obrazu u čočky obklopené z obou stran tímž prostředím. Tato vypadne poněkud jednodušeji než u centrického systému, poněvadž v ní uzlové body K_1 , K_2 splynou s hlavními body H_1 resp. H_2 . Jest totiž v obr. (10.) vzdálenost $\overline{FK_1} = F'$, zde však máme ohniskové dálky stejné, tak že se bod K_1 stotožní s bodem H_1 .

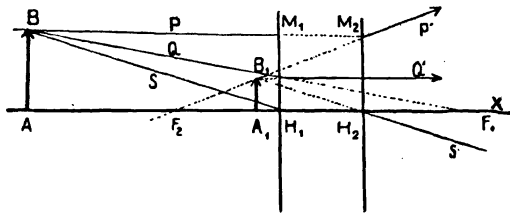
Je-li čočka spojkou, je druhá ohnisková dálka $\overline{F_2H_2}$ záporná a tedy za druhou hlavní rovinou; pak paprsek P s osou rovnoběžný a čočkou lomený bude skutečně procházeti druhým ohniskem čočky F_2 . (Obr. 14.) Konstrukce provede se tak, že vedle paprsku P



Obr. 14.

vedeme paprsek Q jdoucí prvním ohniskem; P' a Q' se protínají v bodě B_1 , který je obrazem bodu B . Jeden z těchto paprsků dá se nahradit paprskem S , který míří k bodu H_1 , jde optickým středem čočky a vychází směrem od H_2 tak, že $S' \parallel S$.

Je-li čočka rozptylkou, je druhá ohnisková dálka $\overline{F_2H_2}$ kladná, a F_2 leží před druhou hlavní rovinou M_2 . (Obr. 15.)



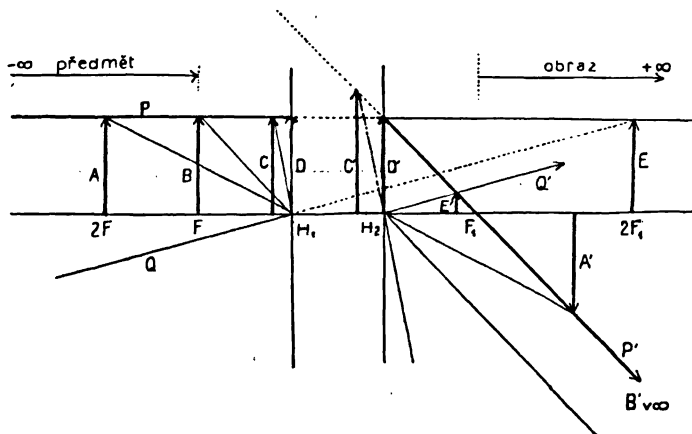
Obr. 15.

Paprsek $P \parallel X$ může po lomu čočkou procházeti jen v prodloužení bodem F_2 . Paprsek Q mířící do F_1 bude probíhati od roviny M_1 rovnoběžně s osou; v průseku prodloužených paprsků P' a Q' leží obraz B_1 bodu B . Bodem B_1 musí též probíhati v prodloužení paprsek S' , který je přidružen hlavnímu paprsku S .

Jak se mění poloha a velikost obrazu, postupujeme-li s předmětem z $-\infty$ do $+\infty$, lze odvodit buďto diskusí základních rovnic (22) a (23), nebo přehledněji graficky.

Posunujeme též předmět postupně do poloh A , B , C , D atd. a vedeme paprsek vedlejší P (silněji vytažený), který bude společný všem předmětům, a pak paprsky hlavní.

Napřed provedeme konstrukci pro spojku (obr. 16.). Předmětu A patří obraz A' , předmětu B obraz B' atd.



Obr. 16.

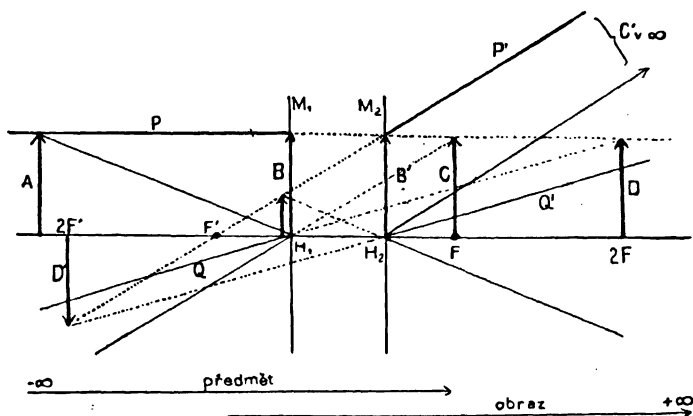
Postupuje-li předmět z $-\infty$ do F , probíhá obrácený a reálný jeho obraz týmž směrem od druhého ohniska F_1 do $+\infty$. Posuneme-li předmět dále z prvního ohniska do $+\infty$, jde vzpřímený obraz od $-\infty$ do druhého ohniska F_1 zase týmž směrem. Předmět E za čočkou (virtuální) je dán konvergentními paprsky P a Q , jejichž lomené paprsky P' a Q' tvoří reálný obraz E' . Dále je patrné, že předmětům položeným mezi první negativní hlavní rovinou (poloha A) a první pozitivní hlavní rovinou (poloha D) patří obrazy větší než předmět, tak že jest tento předmětový prostor zobrazován zvětšeně.

Při rozptylce jsou ohniskové vzdálenosti obráceně položeny. (Obr. 17.) Jedná-li se zde ku př. o zobrazení virtuálního předmětu D , vidíme, že je tvořen konvergentními paprsky P a Q ; tyto dávají lomené paprsky P' a Q' , jež se protínají v prodloužení v obraze D' . Když předmět z $-\infty$ přejde do prvního ohniska F , proběhne vzpřímený obraz z F' do $+\infty$ týmž směrem; postoupí-li předmět přes F do $+\infty$, jde obrácený předmět zase

týmž směrem z $-\infty$ do druhého ohniska F' . Předmětům mezi prvou hlavní rovinou (poloha A) a první negativní hlavní rovinou (poloha D) přísluší zase obrazy zvětšené.

Konstrukce obrazu při lomu jedinou plochou sférickou nebo obecnou soustavou sférických ploch budou zcela obdobné jako v obr. 16. a 17., jen absolutní hodnoty fokálních distancí nebudou stejny. Řídí se tedy zobrazení při obecném sférickém systému dioptrickém (t. j. takovém, v němž se světlo láme, ku př. v čočkách) těmito zákony.

1. Předmět i obraz postupují týmž směrem vpřed.



Obr. 17.

2. První ohnisko odděluje prostor předmětový zobrazený obráceně od prostoru zobrazeného vzpřímeně. U spojek jde prostor obráceně zobrazený napřed, u rozptylek je tomu naopak.

3. Prvá pozitivní a prvá negativní hlavní rovina oddělují prostor zvětšeně zobrazený od prostoru zmenšeně zobrazeného.

Naproti tomu sférická zrcadla tvoří sférický systém katoptrický (takový, na němž se světlo odráží), i víme, že lze lom světla na sférické ploše převést na odraz tehda, položíme-li $n' = -n$; potom však dle rovnice (14) $F = F'$, t. j. obě ohniskové dálky jsou stejně veliké a téhož znamení. Rovnice (10) bude zníti:

$$\omega\omega' = F^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

kdež R je poloměr křivosti zrcadla. Srovnáme-li sférické zrcadlo s obecnou soustavou centrickou, vidíme, že u zrcadla splývají obě roviny hlavní v jednu, jež jde vrcholem zrcadla a obě ohniska v jedno. Nastávají zde dva případy: 1. buď jsou obě ohniskové dálky kladné, pak je ohnisko před zrcadlem a zrcadlo je konkávní (účinkuje jako čočka spojná). 2. obě ohniskové dálky jsou záporné, ohnisko je za zrcadlem, jež je konvexní a účinkuje podobně jako rozptylka. Řešením základních rovnic nebo zobrazením najdeme, že odraz světla na takovém katoptrickém systému se řídí zákony podobnými:

1. Předmět a obraz postupují směrem opačným.

2. Ohnisko odděluje předmětový prostor zobrazený obráceně od prostoru zobrazeného vzpřímeně. U dutého zrcadla jde prostor obráceně zobrazený napřed, u konkávního je tomu naopak.

3. Positivní a negativní hlavní rovina oddělují prostor zvětšeně zobrazený od prostoru zmenšeně zobrazeného.

Nyní provedeme rozbor umístění hlavních rovin u různých typů silných čoček. Když známe totiž polohu hlavních rovin, můžeme stanovití polohu ohnisek tím, že naneseeme známé ohniskové dálky (rovnice 19) na pravo a v levo od rovin hlavních.

Stanovíme za tím účelem vzdálenost hlavních rovin h_1 a h_2 od příslušných vrcholů sférických ploch a počítáme je na pravo kladně. Bude pak v obr. 12. $h_1 = \overline{V_1 H_1}$, $h_2 = \overline{V_2 H_2}$.

Rovnicí (15) a (17) určili jsme vzdálenost ohnisek čočky od ohnisek sférických ploch:

$$L_1 = \overline{f_1 F} = \frac{f_1 f'_1}{D}, \quad L_2 = \overline{f_2 F'} = -\frac{f_2 f'_2}{D},$$

kdež

$$D = f'_1 - f_2 + e.$$

Z obrazce (12) je však patrné, že

$$f_1 + h_1 = L_1 + F, \quad f'_2 + h_2 = L_2 + F',$$

kdež

$$F = -\frac{f_1 f_2}{D} \quad \text{a} \quad F' = \frac{f'_1 f'_2}{D}.$$

Po dosazení a kratší redukci obdržíme:

$$h_1 = \frac{-ef_1}{f'_1 - f_2 + e}, \quad h_2 = \frac{-ef'_2}{f'_1 - f_2 + e}.$$

Když pak veličiny f vyjádříme poloměry křivosti a indexem lomu čočky (str. 101) a výrazy zjednodušíme, bude:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{-eR_1}{n(R_2 - R_1) + e(n-1)}, \\ h_2 &= \frac{-eR_2}{n(R_2 - R_1) + e(n-1)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Jest tedy poměr veličin h roven poměru příslušných poloměrů křivosti:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (25)$$

Vzájemná distance δ hlavních rovin bude dle obrazce 12., kde h_2 je záporné:

$$\delta = \overline{H_1 H_2} = e - (h_1 - h_2) = e(n-1) \frac{R_2 - R_1 + e}{n(R_2 - R_1) + e(n-1)}. \quad (26)$$

Dá-li se ve výrazu pro δ tloušťka čočky e proti rozdílu obou poloměrů $R_2 - R_1$ vypustiti, dostaneme přibližně

$$\delta = \frac{e(n-1)}{n},$$

nezávislé od poloměrů křivosti kulových ploch.

Čočky bývají obyčejně zhotoveny z korunového skla, jehož index lomu $n = \frac{3}{2}$. Pro tento případ bude:

$$\begin{aligned} F &= \frac{6R_1 R_2}{e - 3(R_1 - R_2)}, & h_1 &= \frac{-2eR_1}{e - 3(R_1 - R_2)}, \\ h_2 &= \frac{-2eR_2}{e - 3(R_1 - R_2)}, & \delta &= \frac{e[e - (R_1 - R_2)]}{e - 3(R_1 - R_2)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Pojmenujme k vůli jednoduchosti $e - 3(R_1 - R_2) = A$. R_1 i R_2 počítány jsou na pravo kladně. Jest tedy:

1. *U čoček bikonvexních* R_1 kladné, R_2 záporné; když absolutní hodnoty poloměrů jsou si rovny, je $A = e - 6R$. Tu pak jest:

α) F kladné, t. j. čočka spojnou, je-li A záporné či $e < 6R$; potom h_1 je kladné a h_2 záporné a hlavní roviny jsou umístěny uvnitř čočky (a to v první a v druhé třetině čočky,

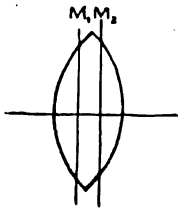
lze-li ve jmenovateli e vypustiti vedle $6R$);

$$h_1 = \frac{e}{3} = -h_2$$

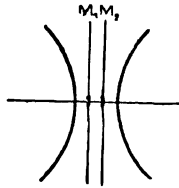
obr. 18., δ je kladné, je-li $e < 2R_1$ a záporné, je-li $e > 2R$; v druhém případě je položena druhá hlavní rovina před prvou.

β) $F = \infty$, je-li $e = 6R$; to je tak zvaná čočka teleskopická; v ní též obě hlavní roviny spadnou do ∞ .

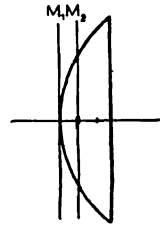
γ) F je záporné a čočka rozptylkou, je-li A kladné, t. j. $e > 6R$; potom je h_1 záporné a h_2 kladné; hlavní roviny jsou vně čočky na obou stranách. δ je tu kladné.



Obr. 18.



Obr. 19.



Obr. 20.

Z těchto tří případů přichází v praxi výhradně téměř jen případ první, ježto tloušťka čočky proti součtu poloměrů bývá zpravidla malá.

2. U čoček bikonkávních jest R_1 záporné, R_2 kladné; při rovnosti absolutních hodnot poloměrů je $A = e + 6R$. Poněvadž jest A vždy kladné, je F vždy záporné, a tedy působí bikonkávní čočka vždy jako rozptylka; h_1 je kladné a h_2 záporné, t. j. hlavní roviny jsou uvnitř čočky; zanedbáváme-li e ve jmenovateli, je

$$h_1 = \frac{e}{3} = -h_2,$$

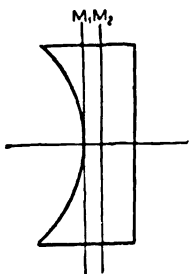
a hlavní roviny jsou pak v první, resp. druhé třetině čočky. δ je vždy kladné.

3. Pro čočku plankonvexní je R_1 kladné, $R_2 = \infty$; bude tedy $F = 2R$, t. j. čočka vždy spojkou,

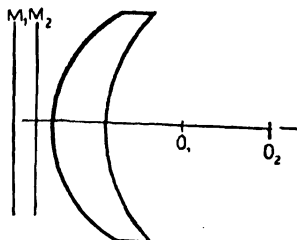
$$h_1 = 0, \quad h_2 = -\frac{2e}{3}, \quad \delta = \frac{e}{3}.$$

První hlavní rovina dotýká se zakřivené plochy a druhá jest od ní ve vzdálenosti $\frac{e}{3}$ uvnitř čočky. Obr. 20.

4. Pro čočku *plankokávní* je R_1 záporné, $R_2 = \infty$; pak jest čočka vždy rozptylkou, ježto $F = -2R$; výrazy pro h a δ zůstanou tytéž jako v případě předešlém. Při obrácení čočky zamění hlavní roviny jen svoje úlohy, ježto poloha jich vzhledem k mezným plochám čočky zůstává pevnou.



Obr. 21.



Obr. 22.

5. Při čočkách *konkavkonvexních* a *konvexkonkavních*, jimž dáváme společný název *menisku*, má R_1 i R_2 znamení stejné (ku př. +) a tedy výraz $6R_1R_2$ bude kladný; bude tedy znamení P záviseti jen od A . Dle tvaru čočky mohou nastati tyto tři případy:

α) $R_2 > R_1$, t. j. poloměr vyduté plochy je větší než vypuklé; potom je A kladné a čočka vždy spojku; h_1 i h_2 je záporné, ale δ kladné. První hlavní rovina je umístěna vždy vně zakřivenější plochy, kdežto druhá podle toho, zda výraz $-h_2$, to jest:

$$\frac{2eR_2}{e - 3(R_1 - R_2)} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} e, \quad \text{či} \quad 3R_1 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} e + R_2,$$

jest umístěna buď též vně zakřivenější plochy, nebo se jí dotýká, aneb je uvnitř čočky.

β) $R_2 = R_1$. Tu vznikne kulová vrstva, jejíž distance středů křivosti $o_1o_2 = e$,

$$F = \frac{6R^2}{e}, \quad h_1 = -2R, \quad h_2 = -2R, \quad \delta = e.$$

Taková kulová vrstva působí jako spojka, její hlavní roviny jsou vně křivější plochy. Zmenšuje-li se tloušťka čočky, roste F , až při $e = 0$ stává se vrstva ta teleskopickou čočkou, t. j. rovnoběžné paprsky po lomu zůstávají rovnoběžnými. Potom láme taková tenká vrstva kulová paprsky podobně jako deska planoparalelní.

γ) $R_2 < R_1$; pak $e + R_2 - R_1 = \overline{o_1 o_2}$, $\overline{o_1 o_2} < e$ (obraz dole). Zde jsou možné další tři případy; buď

1. $e > 3(R_1 - R_2)$,
2. $e = 3(R_1 - R_2)$,
3. $e < 3(R_1 - R_2)$.

V případě 1. je čočka vždy spojkou, h_1 záporné, h_2 též záporné a pravidelně vně čočky, δ je kladné.

V případě 2. je čočka teleskopickou.

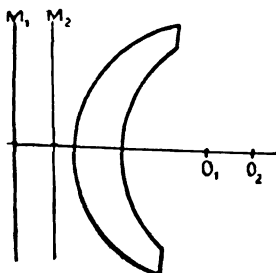
V případě 3. je čočka rozptylkou, h_1 je kladné a h_2 též.

Tu však může buď

$$e < R_1 - R_2;$$

pak je o_2 položeno před o_1 a δ je kladné, t. j. hlavní roviny jdou za sebou v obyčejném pořádku. Nebo jest:

$$e > R_1 - R_2;$$



Obr. 23.

pak je o_2 položeno za o_1 a δ je záporné, t. j. druhá hlavní rovina je umístěna před prvou. Chceme-li si pro tento případ provést konstrukci paprsku lomeného P' pomocí ohnisek F , F' a hlavních rovin, najdeme si průsek daného paprsku P s prvou fokální rovinou (tedy bod A). Z téhož bodu A vedeme hlavní

paprsek Q , jemuž přísluší lomený paprsek Q' . K paprsku F lomený paprsek P' musí protínati druhou hlavní rovinu M_2 v téže výši jako paprsek P prvou hlavní rovinu M_1 a musí býti s Q' rovnoběžný, neboť paprsky P a Q vyšly z téhož bodu A fokální roviny a musí po lomu probíhati spolu paralelně. Tím je paprsek P' úplně určen. (Viz analogickou konstrukci v obraze 7. l.)

Jak známo, platí pro tenké čočky zcela přesně pravidlo, že ty čočky, jež jsou uprostřed silnější než na krajích, jsou spojkami, a ty, jež jsou uprostřed nejtenší, rozptylkami. To neplatí však nijak všeobecně, když třeba bráti ohled na tloušťku čočky. Z případu 1. plyne ku př., že může čočka uprostřed nejsilnější při týchž poloměrech křivosti býti spojkou nebo rozptylkou podle toho, jaká je tloušťka čočky, a z případu 5. γ , že čočka uprostřed nejtenší může býti též spojkou. Čočky teleskopické tvoří jakýsi přechod od spojek k rozptylkám. Význam tloušťky čočky anebo lépe řečeno optického intervallu pro optickou mohutnost čoček vysvítá již ze všeobecného výrazu pro fokální distanci čočky (rovnice 16. a 18.).

Co se týče umístění hlavních rovin, tu vidíme, že při čočkách bikonvexních nebo bikonkávních umístěny jsou obě buď uvnitř neb vně čočky (a pak na opačných stranách jejích); při čočkách plankonkávních a plankonvexních jest jedna hlavní rovina tečnou zakřivené plochy a druhá je položena uvnitř čočky. Jedná-li se o meniskus, jsou obě hlavní roviny posunuty k zakřivenější ploše a aspoň jedna hlavní rovina jest vně čočky (pravidelně však též druhá hlavní rovina).

Vedle ohnisek a bodů hlavních je důležitým bodem pro lom světla v čočkách silných, obklopených týmž prostředím, též tak zvaný optický střed. (Bod o obr. 12.) Stanovme tedy jeho polohu vzhledem k vrcholům lámavých ploch u různých typů čoček. Z podobnosti trojúhelníků v obr. 12. plyne, že

$$\frac{\overline{V_1 N_1}}{\overline{V_2 N_2}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{s_1}{s_2} = \lambda_0,$$

kdež λ_0 jest dělicí poměr optického středu vzhledem k základním bodům V_1 a V_2 . Dle rovnice (25) jest tedy

$$\lambda_0 = \frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad (28)$$

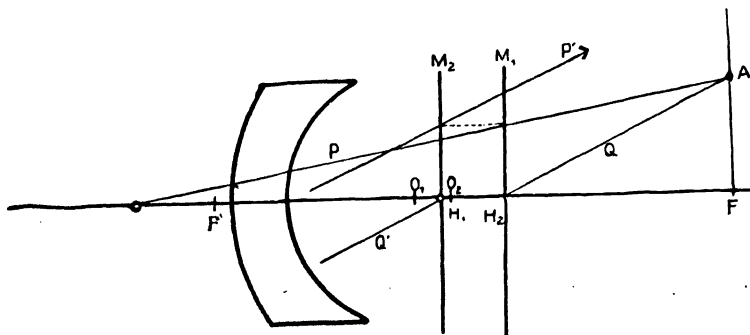
kdež R_1 i R_2 čítáme v pravo kladně. Známe-li tedy R_1 a R_2 , je tím stanovena zároveň poloha optického středu. Volíme-li též úsečky optického středu s_1 a s_2 od vrcholů v pravo za kladné, je tloušťka čočky $e = s_1 - s_2$, a úměra

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

dá se přeměnit na tvar:

$$\frac{s_1}{e} = \frac{R_1}{R_1 - R_2}, \text{ odkudž } s_1 = \frac{eR_1}{R_1 - R_2}, \quad s_2 = \frac{eR_2}{R_1 - R_2}.$$

Z rovnice (28) vidíme, že tam, kde má R_1 a R_2 opačné znamení (u čoček bikonvexních a bikonkávních), je λ_0 záporné a optický střed je umístěn uvnitř čočky. Je-li druhý poloměr



Obr. 24.

$R_2 = \infty$ (u čoček plankonvexních a plankonkávních), je $\lambda_0 = 0$ a optický střed ve vrcholu zakřivené plochy. Při menisku má pak R_1 a R_2 znamení stejné, dělicí poměr λ_0 je kladný, a optický střed je vně čočky, a to :

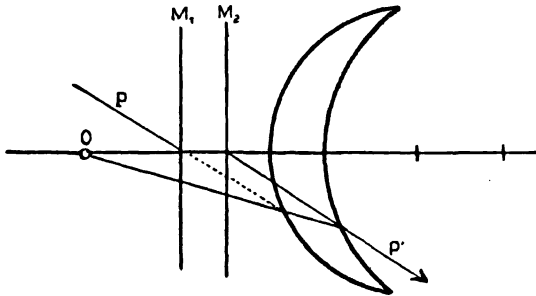
je-li $\frac{R_1}{R_2} > 1$ na pravo od druhé zakřivené plochy a

„ $\frac{R_1}{R_2} < 1$ „ levo „ prvé „ „

Jest tedy v obou případech umístěn optický střed vně čočky za křivější sférickou plochou. Tento poslední případ znázorňuje obr. 24. Spojnice průseků dopadajícího paprsku hlavního

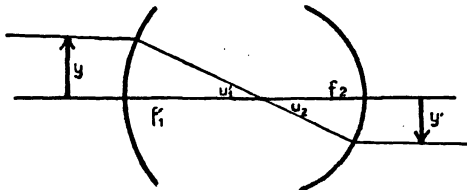
P a lomeného P' s příslušnými sférickými plochami čočky musí v prodloužení procházeti optickým středem. Zavedením optického středu u čoček silných se konstrukce obrazu nijak nezjednoduší; za to má optický střed význam u čoček tenkých, kde se hlavní paprsek jím procházející nejenom neláme, ale ani rovnoběžně neposune, ježto vliv tloušťky čočky se zde dá zanedbat.

Pro tenké čočky třeba zavésti přibližně $e = 0$; pak jest dle (27) $h_1 = h_2 = \delta = 0$, t. j. obě hlavní roviny splývají uvnitř v takové tenké čočky a ježto zároveň $s_1 = s_2 = 0$, spadá též optický střed do splývajících hlavních rovin.



Obr. 25.

Konstrukce obrazu dá se provésti tak jako v obrázku (14), jen že obě hlavní roviny M_1 a M_2 splynou a paprsek hlavní lomený S' bude přímým pokračováním paprsku S .



Obr. 26.

Seznali jsme již dříve, že se optický účinek obecné soustavy centrické o nestejných prostředích krajních dá nahraditi účinkem jediné lámavé plochy sférické. Podobně budeme moci provésti také zde při silných čočkách, resp. soustavě čoček omezených s obou stran tímž prostředím konstrukci obrazu

k danému předmětu pomocí konstrukce při čočce tenké obklopené tímž prostředím. Volíme totiž fokální vzdálenost tenké čočky rovnu známé fokální vzdálenosti čočky silné (resp. soustavy čoček), provedeme konstrukci obrazu k danému předmětu pro čočku tenkou a pak tento obraz pouze posuneme o známou vzdálenost hlavních rovin dané silné čočky (resp. soustavy čoček). Také je patrné, že se nedá lom světla v silné čočce o stejných ohniskových délkách nahradit lomem světla na jedné ploše sférické, poněvadž tato nemá fokální vzdálenost stejně velikou.

Teleskopická čočka.

Teleskopickými slovy takové čočky, jejichž obě ohniska leží v nekonečnu, tak že svazek rovnoběžných paprsků po lomu jimi zůstane zase rovnoběžným. Položíme-li ve výrazu:

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n - 1}{n} \frac{e}{R_1 R_2} \right)$$

tloušťku čočky

$$e = \frac{n}{n - 1} (R_1 - R_2), \text{ bude } \frac{1}{F} = 0 \text{ a } F = \infty;$$

pro sklo korunové, kde $n = \frac{3}{2}$, nastane to tehda, je-li

$$e = 3 (R_1 - R_2).$$

Z obecného výrazu pro fokální vzdálenost

$$F = -\frac{f_1 f_2}{D}$$

vidíme, že tu optický intervall

$$D = f'_1 - f_2 + e = 0, \quad (30)$$

t. j. že tu dle obr. 13. druhé ohnisko přední sférické plochy a první ohnisko druhé sférické plochy spadají v jedno. První případ teleskopické čočky měli jsme u bikonvexní čočky: 1) β ; u té je f'_1 záporné a f_2 kladné; potom dle (30) bude, bereme-li za f'_1 a f_2 hodnoty absolutní,

$$e = f'_1 + f_2,$$

t. j. tloušťka čočky bude rovna součtu obou vnitřních ohniskových délek sférických ploch. (Obraz 25.) Druhý případ nastal

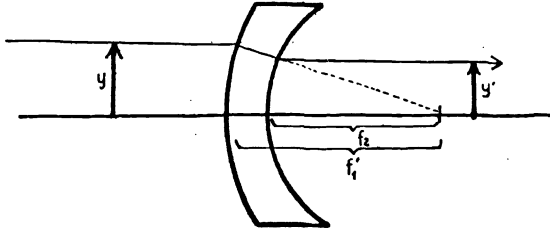
při menisku, když $R_1 > R_2$; tu je f'_1 i f_2 záporné a $e = f'_1 - f_2$, t. j. tloušťka čočky rovná se diferenci obou ohniskových dalek. (Obr. 27.) Poněvadž ohniska čočky budou v nekonečnu, neporuší se čočkou rovnoběžnost svazku, nýbrž jen jeho šífka. Přísluší-li ku předmětu y obraz y' , a definujeme-li jako dříve fokální distance sférických ploch

$$f'_1 = \frac{y}{\operatorname{tg} u'_1} \text{ a } f_2 = \frac{y'}{\operatorname{tg} u_2},$$

bude, ježto $u'_1 = u_2$, poměr

$$\frac{y'}{y} = \frac{f_2}{f'_1}.$$

Jest tedy při teleskopické čočce příčné zvětšení veličinou stálou, ať se posune předmět kamkoliv. Obraz bude přímý, mají-li



Obr. 27.

f'_1 a f_2 znamenají stejné (případ druhý) a obrácený, jsou-li opatřeny znaménkem nestejným (případ první). Poněvadž u obecného systému

$$\frac{F'}{F} = -\frac{n'}{n}, \text{ a zde } n' = n,$$

bude poměr obou ∞ velikých ohniskových dalek roven -1 , budou tedy tyto ∞ veliké ohniskové dálky stejné a na opačných stranách čočky. Dosadíme-li do rovnic (24) výraz pro tloušťku teleskopické čočky

$$e = \frac{n}{n-1} (R_1 - R_2),$$

seznáme, že také hlavní roviny čočky budou v nekonečnu.

(Dokončení.)