Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

# Úlohy

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 15 (1886), No. 3, 132--137

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121437

Že to mínění mylné, plyne odtud, že můžeme určiti nekonečnou řadu pravých zlomků kladných

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$$

které se blíží s pravé strany zlomku $\delta > 0$ libovolně danému. Stačí vzíti

$$u_n = \delta + \frac{1-\delta}{n},$$

aby podmínky byly splněny: Neboť patrně je tu $u_n > u_{n+1}$, tedy $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pro všecka $n$, a přec je $\lim_{n=\infty} u_n = \delta > 0$.

---

# Úlohy.

## Řešení úlohy 1.

(Zaslal pan *Josef Šumr*, technik v Praze.)

Píšeme-li součet $s_n$ ve tvaru

$$s_n = \frac{3^n}{2^{n-8}} - 2^8,$$

poznáváme na pohled, že má celistvou hodnotu při $n \leqq 8$; součet prvých 8mi členů jest pak

$$s_8 = 3^8 - 2^8 = 6305.$$

Chceme-li povahu řady dané seznati, ustanovme ze součtu daného $s_{n-1} = (3^{n-1} - 2^{n-1}) : 2^{n-9}$, a odtud

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 3^{n-1} : 2^{n-8}.$$

Jelikož jest potom $a_{n-1} = 3^{n-2} : 2^{n-9}$ a tudíž

$$a_n : a_{n-1} = \frac{3}{2},$$

jest tedy daná řada posloupností geometrickou.

Správné řešení zaslali pp.: *Ant. Vyskočil* ze VI. tř. real. a *Karel Novák* ze VII. tř. g. v Hradci Králové, *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudími, *Boh. Mašek* ze VII. tř. g. v Jindř. ul.

v Praze, *Ant. Radešínský* ze VII. tř. g. v Litomyšli, *Karel Rajdl* a *Bohuslav Müller* ze VII. tř. r. městského r. g. v Praze.

### Řešení úlohy 2.

(Podal p. *Bohuslav Müller,* stud. VII. tř. r. městského r. g. v Praze.)

Z daných tangent úhlů polovičních vypočítáme nejprvé

$$tg\,\alpha = \frac{20}{21}, \quad tg\,\beta = \frac{21}{20},$$

odkud zřejmo, že $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ a trojúhelník daný pravoúhlým; úhly jeho jsou $\alpha = 43^{0}36'10''$, $\beta = 46^{0}23'50''$, $\gamma = 90^{0}$.

Z rovnic

$$\frac{a}{b} = \frac{20}{21}, \quad ab = 420,$$

plyne $a = 20$ *dm*, $b = 21$ *dm*, a z toho $c = 29$ *dm*.

Správné řešení zaslali pp.: *Josef Sumr*, technik v Praze, *Josef Pfeffermann* a *Karel Prokop* ze VII. tř. I. českého r. g. v Praze, *Karel Novák* ze VII. tř. g. a *Ant. Vyskočil* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Josef Šmidrkal* z VIII. tř. v Novém Bydžově, *Josef Dvořák* z VIII. tř. v Jindř. Hradci, *Václav Auersperger* z VIII. tř. na Novém Městě v Praze, *Emanuel Červený* a *Josef Adámek* z VIII. tř. v Klatovech, *Jos. Černovský* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Emanuel Herrmann* z VIII. tř., *Jan Noháč* ze VI. tř. r. *František Doležal* a *Jan Andreas* ze VII. tř. gymn. a *Karel Rajdl* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Antonín Nápravník* ze VII. tř. g. v Němec. Brodě, *Jar. Pavlousek* z VIII. tř. v Ml. Boleslavi, *Bohumil Helebrant* z VIII. tř. akadem. g. v Praze, *Jan Křivohlávek*, *Antonín Záleský*, *Ant. Paďour*, *Josef Jančík*, *Ant. Češka* ze VII. tř. r. a *Ant. Radešínský* ze VII. tř. g. v Litomyšli, *Karel Petr* ze VI. tř. g. a *Ant. Pleskot* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Alois Smolík* ze VII. tř. g. v Budějovicích, *Boh. Mašek*, *Vlad. Novák* a *Adolf Pařízek* ze VII. tř. g. v Jindřišské ul. v Praze a *František Novotný*, právník v Praze.

## Řešení úlohy 3.

(Zaslal pan *Jar. Pavlousek,* stud. VIII. tř. v Ml. Boleslavi.)

Označme stranu základny čtvercové $x$, výšku jehlanu $y$; pak jest

$$P = x^2 + x\sqrt{x^2 + 4y^2} = 360, \quad 30 = x^2 y = 1200.$$

Řešením rovnic těchto obdržíme

$$x_1 = 10, \quad y_1 = 12$$

$$x_2 = 4\sqrt{5}, \quad y_2 = 15;$$

poloměr vepsané koule jest v obou případech

$$\varrho = \frac{30}{P} = 3\tfrac{1}{3}\ dm.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Josef Pfeffermann* a *Karel Prokop* z VIII. tř. I. českého r. g. v Praze, *Josef Adámek* a *Emanuel Červený* z VIII. tř. v Klatovech, *Jan Křivohlávek* ze VII. tř. r. v Litomyšli, *Karel Novák* ze VII. tř. g. v Hradci Král., *Boh. Mašek* ze VII. tř. g. v Jindř. ulici v Praze, *Jos. Černovský* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Ant. Pleskot* a *Josef Zamazal* z VIII. tř. v Chrudimi, *Josef Sumr*, technik v Praze, *Josef Dvořák* z VIII. tř. v Jindř. Hradci, *Alois Smolík* ze VII. tř. g. v Budějovicích *Jan Andres*, *Frant. Doležal* ze VII. tř. g. a *K. Ankrt* ze VI. tř. r. městského r. g. v Praze a *Ant. Nápravník* ze VII. tř. g. v Německém Brodě.

Řešení správné — ač ne úplné — zaslali pp.: *Ant. Záleský, Ant. Češka, Ant. Paďour* ze VII. tř. r. a *Ant. Radešinský* ze VII. tř. g. v Litomyšli, *Josef Šmidrkal* z VIII. tř. v Novém Bydžově, *Václav Klíma* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze, *Karel Rajdl* a *Boh. Müller* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze.

## Řešení úlohy 4.

(Podal p. *Bohuslav Mašek,* stud. VII. tř. g. v Jindřišské ulici v Praze.)

Znamenají-li $S_1$ a $S_2$ pobočné hrany celého jehlanu, omezující stěnu A, taktéž $S_2$ a $S_3$ pro B, $S_3$ a $S_4$ pro C, pak $s_1$, $s_2$, $s_3$ a $s_4$ potažné hrany uťatého, bude

$$\frac{a}{A} = \frac{s_1 s_2}{S_1 S_2}, \quad \frac{b}{B} = \frac{s_2 s_3}{S_2 S_3}, \quad \frac{c}{C} = \frac{s_3 s_4}{S_3 S_4} \text{ a } \frac{d}{D} = \frac{s_4 s_1}{S_4 S_1}.$$

Ze součinů

$$\frac{ac}{\mathrm{AC}}=\frac{s_1s_2s_3s_4}{\mathrm{S_1S_2S_3S_4}}=\frac{bd}{\mathrm{BD}}$$

plyne pak

$$d=\frac{a\mathrm{Bc}}{\mathrm{A}bc}\,\mathrm{D}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Josef Svoboda* z VIII. třídy v Písku, *Karel Petr* ze VI. tř. g., *Antonín Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi a *Jos. Černövský* ze VII. g. v Příbrami.

## Řešení úlohy 5.

(Zaslal p. *Ant. Pleskot,* stud. VIII. tř. v Chrudimi.)

Parabola $\mathrm{P}\equiv y^2-2px=0$ a přímka $\mathrm{M}\equiv x-m=0$ omezují úseč, jejíž tětiva měj délku $2n$. Vepíšeme-li do této úseče kružnici K, která se paraboly v bodech $a(x, y)$ $b(x, -y)$ a přímky M v bodě $c(m, o)$ dotýká, a uvážíme-li, že subnormála bodu paraboly má stálou hodnotu $p$, obdržíme podmínku

$$x+p+\sqrt{y^2+p^2}=m,$$

kterou též ve tvaru $(x-m)^2=2pm$ psáti můžeme. Jest však $n^2=2pm$ a tedy $x-m=\pm n$. Hodnota $x_1=m-n$ jest společná úsečka dotyčných bodů $a$, $b$; hodnota $x_2=m+n$ přísluší dotyčným bodům kružnice, která se paraboly P i přímky M vně úseče dotýká. Poloměry kružnic těchto jsou $r=p\mp n$.

Je-li $m<2p$, jest $x_1<o$, a nelze pak do úseče vepsati kružnici, která by se paraboly ve dvou bodech dotýkala.

Tutéž úlohu řešili pp.: *Karel Rajdl* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Bohuslav Mašek* ze VII. tř. gym. v Jindřišské ulici v Praze a *Josef Svoboda* z VIII. tř. v Písku.

## Řešení úlohy 6.

(Zaslal p. *Ant. Záleský,* stud. VII. tř. r. v Litomyšli.)

Rovina protíná kuželovou plochu 2. stupně v parabole, jest-li rovnoběžna k tečné rovině této plochy. Abychom stanovili rovinu takovou dvěma body $a$, $b$, danými na ploše kuželové, veďme středem této plochy rovnoběžku P ku spojnici $\overline{ab}$ a položme přímkou P tečné roviny k ploše kuželové. Roviny jdoucí přímkou

$\overline{ab}$ rovnoběžně k rovinám tečným takto stanoveným jsou žádanými rovinami sečnými. Úloha má obecně dvé řešení.

Řešení zaslali též pp.: *Bohuslav Müller* a *Karel Rajdl* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Boh. Mašek* ze VII. tř. g. v Jindř. ulici v Praze a *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi

---

## Úloha 12.

Budiž řešena rovnice

$$\begin{vmatrix} 1, & \sin x, & \cos x \\ \cos x, & 1, & \sin x \\ \sin x, & \cos x, & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Prof. *A. Strnad.*

## Úloha 13.

Lichoběžník rozdělen jest úhlopříčnami v trojúhelníky, z nichž dva přiléhající k půdicím mají obsah A a B. Který jest obsah lichoběžníka? *Týž.*

## Úloha 14.

Do pravidelného pětiúhelníka vepsati čtverec. *Týž.*

## Úloha 15.

Budiž dokázána věta:

Vepsán-li do kružnice čtyrúhelník *abcd*, a sestrojíme-li body $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ jakožto průsečíky výšek v trojúhelnících *bcd*, *acd*, *abd*, *abc*: jest čtyrúhelník $a'b'c'd'$, souměren k danému dle určitého středu. *Týž.*

## Úloha 16.

Provaz, jehož jeden konec jest uvázán na hřeb a druhý položen přes pevnou kladku, nese volnou kladku o průměru $d = 10$ *cm*, i s břemenem váhy $Q = 4\ q$. Je-li hřeb a dotyčný bod provazu s pevnou kladkou ve vodorovné přímce, jeden od druhého vzdálen o $2a = 2m$, a působí-li na volném konci provazu síla $P = 2\frac{1}{2}\ q$, v jaké hloubi $h$ pod. hřebem zůstane osa volné kladky v klidu? Prof. *Vavřinec Jelínek.*

### Úloha 17.

Jak dlouhá D musí býti stupnice stupňovaného hustoměru pro kapaliny lehčí vody, aby stupeň od měrné váhy 1 až po $s_1 = 0{\cdot}9$ byl $d = 2\ cm$, a aby hustoměrem bylo lze měřiti kapaliny až po měrnou váhu $s_2 = 0{\cdot}5$?

Prof. *Vavřinec Jelínek.*

### Úloha 18.

Ukazuje-li manometr vývěvy po $m$-tém zdvižení pístu tlak $a$ a po $n$-tém tlak $b$, jak velký byl tlak B vzduchu před zřeďováním?

*Týž.*

---

### Cenná úloha.

*Výbor Jednoty českých mathematiků* usnesl se na tom, aby vypsána byla *cena* pro *žáky středních škol* za vynikající konstruktivní řešení úlohy:

*Do daného trojúhelníka vepsati jest obdélník, jehož úhlopříčna jest dána.*

Každý z řešitelů, který takové řešení podá do konce dubna 1886, obdrží publikace tyto:

1. *Studnička*, Základové vyšší mathematiky I. díl, 2. vydání.
2. *Briot-Pšenička*, Mechanická theorie tepla.
3. *Vaněček*, Křivé čáry rovinné i prostorové.
4. *Studnička*, Algebra pro vyšší třídy škol středních 2. vyd.
5. „ Základové náuky o číslech.

---

## Věstník literární.

### A. Hlídka programů.

**Výroční zpráva cís. král. české realky Pražské** za školní rok 1885 obsahuje dva články a to:

*a) O průseku dvou ploch druhého řádu, jež mají společnou rovinu hlavní.* (S lithogr. tabulkou.) Od prof. *Č. Jarolímka.*

V krátkém sice ale pěkném tomto pojednání podává chvalně známý p. spisovatel některé elegantní výsledky o konstrukci