Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Juraj Hronec

Prevedenie Fuchsovho lin. diferencialného systému druhého radu na Gaussov. dif. systém

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 276--280

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121374

Prevedenie Fuchsovho lin. diferencialného systému druhého radu na Gaussov. dif. systém.

J. Hronec.

Vezmime lin. dif. systém druhého radu a Fuchsovho týpu v kanonickom tvare:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\xi} &= \frac{g_{11}(\xi)}{\varphi(\xi)} y_1 + \frac{g_{12}(\xi)}{\varphi(\xi)} y_2 \\ \frac{dy_2}{d\xi} &= \frac{g_{21}(\xi)}{\varphi(\xi)} y_1 + \frac{g_{22}(\xi)}{\varphi(\xi)} y_2, \end{aligned} \tag{1}$$

kde je:

$$\varphi(\xi) = (\xi - a_1)(\xi - a_2);$$

funkcie $g_{11}(\xi)$, $g_{12}(\xi)$, $g_{21}(\xi)$, $g_{22}(\xi)$ sú racionálne funkcie celistvé prvého stupňa takéhoto tvaru:

$$g_{11}(\xi) = a_{11}\xi + b'_{11}, \qquad g_{12}(\xi) = a_{12}\xi + b'_{12},$$
$$g_{21}(\xi) = a_{21}\xi + b'_{21}, \qquad g_{22}(\xi) = a_{22}\xi + b'_{22}.$$

Singularity tohoto dif. systému sú l'ubovol'né body a_1, a_2 a ∞. Dosadíme-li

$$x = \frac{\xi - a_1}{a_2 - a_1},$$

vtedy dif. systém (1) prejde do tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{a_{11}x + b_{11}}{x(x-1)} y_1 + \frac{a_{12}x + b_{12}}{x(x-1)} y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{a_{21}x + b_{21}}{x(x-1)} y_1 + \frac{a_{22}x + b_{22}}{x(x-1)} y_2. \end{aligned} \tag{2}$$

kde je:

$$b_{11} = \frac{g_{11}(a_1)}{\varphi'(a_2)}, \quad b_{12} = \frac{g_{12}(a_1)}{\varphi'(a_2)}, \quad b_{21} = \frac{g_{21}(a_1)}{\varphi'(a_2)}, \quad b_{22} = \frac{g_{22}(a_1)}{\varphi'(a_2)}.$$

a singularity tohoto dif. systému sú: 0, 1, ∞.

Položme

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 \\ y_2 &= -\frac{a_{11}x + b_{11}}{a_{12}x + b_{12}} z_1 + \frac{x(x-1)}{a_{12}x + b_{12}} z_2, \end{aligned} \tag{3}$$

zkadiaľ máme:

$$\frac{dy_2}{dx}=\frac{a_{12}b_{11}-a_{11}b_{12}}{(a_{12}x+b_{12})^2}z_1+$$

$$+\frac{a_{12}(1-a_{11})x^2+[b_{12}(2-a_{11})-a_{12}b_{11}]x-b_{12}(b_{11}+1)}{(a_{12}x+b_{12})^2}z_2+$$

$$+\frac{x(x-1)}{a_{12}x+b_{12}}\frac{dz_2}{dx}.$$

Dosadíme-li tieto do (2), dostaneme dif. systém:

$$\frac{dz_1}{dx}=z_2$$

$$\frac{dz_2}{dx}=\left[\frac{a_{11}b_{12}-b_{12}a_{12}}{(a_{12}x+b_{12})x(x-1)}+\frac{(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x^2}{x^2(x-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}-a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11})x+b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22}}{x^2(x-1)^2}\right]z_1+ \qquad (4)$$

$$+\frac{(a_{11}+a_{22}-1)a_{12}x^2+[b_{12}(a_{11}+a_{22}-2)+a_{12}(b_{11}+b_{22})]x}{(a_{12}x+b_{12})x(x-1)}z_2+$$

$$+\frac{b_{12}(b_{11}+b_{22}+1)}{(a_{12}x+b_{12})x(x-1)}z_2.$$

Vezmime na tento čas ten jednoduchejší prípad, keď je $a_{12}=0$, vtedy dostaneme dif. systém:

$$\frac{dz_1}{dx}=z_2$$

$$\frac{dz_2}{dx}=\frac{a_{11}(1-a_{22})x^2+(a_{21}b_{12}-a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11}-a_{11})x}{x^2(x-1)^2}z_1+ \qquad (5)$$

$$+\frac{b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22}}{x^2(x-1)^2}z_1+\frac{(a_{11}+a_{22}-2)x+b_{11}+b_{22}+1}{x(x-1)}z_2.$$

Cieľom jednoduchosti označíme:

$$\begin{aligned}a&=a_{11}+a_{22}-2,\\ b&=b_{11}+b_{22}+1,\\ c&=a_{11}(1-a_{22}),\\ e&=a_{21}b_{12}-a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11}-a_{11},\\ f&=b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22},\end{aligned} \qquad (6)$$

keď potom máme dif. systém:

$$\frac{dz_1}{dx}=z_2$$

$$\frac{dz_2}{dx}=\frac{cx^2+ex+f}{x^2(x-1)^2}z_1+\frac{ax+b}{x(x-1)}z_2. \qquad (7)$$

Položme teraz
$$z_1 = x^h (x-1)^g v_1, \tag{8}$$
kde je
$$\frac{dv_1}{dx} = v_2,$$
g a h sú predbežne ľubovoľné konštanty. Na základe tohoto je:
$$z_2 = x^h (x-1)^g \left[\left(\frac{h}{x} + \frac{g}{x-1}\right) v_1 + v_2\right],$$
$$\frac{dz_2}{dx} = x^h (x-1)^g \left\{\left[\frac{h(h-1)}{x^2} + \frac{2hg}{x(x-1)} + \frac{g(g-1)}{(x-1)^2}\right] v_1 + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{2h}{x} + \frac{2g}{x-1}\right] v_2 + \frac{dv_2}{dx}\right\}.$$
Dosadíme-li tieto do (7), máme:
$$\frac{dv_1}{dx} = v_2$$
$$\frac{dv_2}{dx} = \left[\frac{cx^2 + ex + f}{x^2(x-1)^2} + \frac{ax+b}{x(x-1)}\left(\frac{h}{x} + \frac{g}{x-1}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{h(h-1)}{x^2} - \frac{2hg}{x(x-1)} - \frac{g(g-1)}{(x-1)^2}\right] v_1 + \left[\frac{ax+b}{x(x-1)} - \frac{2h}{x} - \frac{2g}{x-1}\right] v_2,$$
alebo
$$\frac{dv_1}{dx} = v_2$$
$$\frac{dv_2}{dx} = \frac{[c + ah + ag - h(h-1) - 2hg - g(g-1)]\, x^2}{x^2(x-1)^2} v_1 +$$
$$+ \frac{-[ah - e - bh - bg - 2h(h-1) - 2hg]\, x + f - bh - h(h-1)}{x^2(x-1)^2} v_1 +$$
$$+ \frac{(a - 2h - 2g)\, x + b + 2h}{x(x-1)} v_2.$$
Poneváč h, g boly ľubovoľné, určíme ich tak, aby bolo:
$$\begin{aligned} c + ah + ag - h(h-1) - 2hg - g(g-1) &= \\ = ah - e - bh - bg - 2h(h-1) - 2hg&, \\ f - bh - h(h-1) = 0&. \end{aligned} \tag{9}$$
Je však:
$$c + ah + ag - h(h-1) - 2hg - g(g-1) =$$
$$= -[(h+g)^2 - (a+1)(h+g) - c],$$
preto dif. systém (7) po vhodnom krátení prejde do tvaru:
$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= v_2 \\ \frac{dv_2}{dx} &= -\frac{(h+g)^2 - (a+1)(h+g) - c}{x(x-1)} v_1 - \frac{(2h + 2g - a)\, x - 2h - b}{x(x-1)} v_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Jestliže je

$$-(a+1)=c_1+c_2$$
$$-c=c_1 c_2, \qquad (11a)$$

vtedy je:

$$(h+g)^2+(h+g)(c_1+c_2)+c_1 c_2=\alpha\,.\,\beta,$$

kde je

$$h+g+c_1=\alpha,$$
$$h+g+c_2=\beta. \qquad (11)$$

Z tohoto zase máme, že je:

$$2h+2g-a=1+\alpha+\beta.$$

Položíme-li ešte

$$2h+b=\gamma, \qquad (12)$$

vtedy dif. systém (10) prejde do Gaussovho dif. systému:

$$\frac{dv_1}{dx}=v_2$$
$$\frac{dv_2}{dx}=-\frac{\alpha\,.\,\beta}{x(x-1)}v_1-\frac{(1+\alpha+\beta)x-\gamma}{x(x-1)}v_2. \qquad (13)$$

Tento dif. systém sa dá priamo odvodiť z Gaussovej diferencialnej rovnice. Týmto spôsobom riešenie dif. systémov Fuchsovho týpu je prevedeno na riešenie tohoto dif. systému. Priamé riešenie dif. systému (13) podám však v budúcnosti.

Z (9) druhej rovnice pre h máme:

$$h=\frac{1-b\pm\sqrt{(1-b)^2+4f}}{2},$$

a zase z (9) prvej rovnice, berúc do ohl'adu druhú rovnicu, pre hodnotu g dostaneme:

$$g=\frac{1+a+b\pm\sqrt{(1+a+b)^2+4(c+e+f)}}{2}.$$

Z rovníc (11) a (12), vezmúc do ohl'adu hodnoty h a g, pre hodnoty α, β a γ máme:

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{(1+a)^2+4c}\pm\sqrt{(1-b)^2+4f}\pm\sqrt{(1+a+b)^2+4(c+e+f)}}{2} \qquad (14)$$

$$\beta=\frac{1\mp\sqrt{(1+a)^2+4c}\pm\sqrt{(1-b)^2+4f}\pm\sqrt{(1+a+b)^2+4(c+e+f}}{2}$$

$$\gamma=1\pm\sqrt{(1-b)^2+4f}, \qquad (14)$$

kde a, b, c, e, f sú určené rovnicami (6) a pre hodnoty c_1, c_2 z rovníc (11a) dostaneme:

$$c_1 = \frac{-1 - a + \sqrt{(1+a)^2 + 4c}}{2},$$

$$c_2 = \frac{-1 - a - \sqrt{(1+a)^2 + 4c}}{2}.$$

Z rovníc (14) pre α, β, γ dostaneme šest rôzných hodnôt, avšak korene determinujúcich rovníc dif. systému (13) sú:

$$0,\ 1-\gamma; \qquad 0,\ \gamma-\alpha-\beta; \qquad \alpha,\ \beta;$$

kde hodnoty α, β, γ obsahujú v sebe i hodnoty h, g; označíme-li korene determinujúcich rovníc dif. systému (7) $r_1^{(1)}$, $r_2^{(1)}$; $r_1^{(2)}$, $r_2^{(2)}$; $r_1^{(3)}$, $r_2^{(3)}$, vtedy je:

$$r_1^{(1)} = h, \qquad r_1^{(2)} = g, \qquad r_1^{(3)} = h + \alpha,$$
$$r_2^{(1)} = h + 1 - \gamma, \qquad r_2^{(2)} = g + \gamma - \alpha - \beta, \qquad r_2^{(3)} = h + \beta.$$

Na tieto korene platia relácie:*)

$$\begin{aligned} 1 &= r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + r_1^{(2)} + r_2^{(2)} + r_1^{(3)} + r_2^{(3)}, \\ a &= -2 + r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + r_1^{(2)} + r_2^{(2)}, \\ b &= 1 - r_1^{(2)} - r_2^{(2)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Z týchto sa dá určiť jednoznačnost hodnôt α, β, γ.

*

Transformation du système différentiel linéaire du second ordre de Fuchs à un système différentiel de Gauss.

(Extrait de l'article précédent.)

La transformation indiquée au titre est faite pour le cas où une constante des coefficients rationaux a_{12} est nulle. La transformation comprend deux étapes: d'abord, on emploie la substitution 3. (v. le texte original) et, ensuite, la substitution 8., où les constantes g, h sont, préalablement, arbitraires; mais on les tire, par la suite, d'une manière univoque, des équations 9, en tenant compte des relations 15.

---

*) Vid. J. Hronec: Alg. rovnice pre koefícienty lin. dif. systemov. Časopis pro pěstování mat. a fys. Roč. LVI. čís. 2.