Literatura

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 4, 199--214,215--225

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121307

LITERATURA.

A. Recense.

E. Picard: Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'Analyse et de Physique mathématique, rédigées par E. Blanc. 188 stran; 1928. — Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, rédigées par M. Brelot. VIII + 271 stran, 1930. — Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques, rédigées par J. Dieudonné. VIII + 224 stran, 1931 (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de Gaston Julia, fasc. 3., 5., 9. Paris, Gauthier-Villars).

V těchto třech svazcích, podobně jako ve svazku vyšlém již dříve ve sbírce „Cahiers scientifiques" (viz můj referát v Časopise, r. *57*, 1928, str. 156) jsou zpracovány Picardovy přednášky na Faculté des Sciences. Podle předmluvy k prvnímu z nich jsou vydány na podnět některých žáků Picardových; nahrazují vlastně čtvrtý díl jeho známého „Traité d'Analyse", kterýžto díl původně byl ohlášen, ale, jak Picard výslovně sděluje, k jeho vydání nedojde.

Přednášky o funkčních rovnicích jednají v prvé kapitole o některých jednoduchých rovnicích na př. o rovnicích

$$f(x) + f(y) = f(x + y), \quad f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\,f(y)$$

a o jejich aplikaci v problému o skládání sil a v problémech neeuklidovské geometrie, hlavně trigonometrických. Dále jsou probírány analytické funkce definované funkčními rovnicemi a jednoznačné funkce, které mají teorem addiční nebo multiplikační (definice $\Gamma(z)$, inverse eliptických integrálů, stanovení funkcí $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ takových, že

$$f_i(at) = R_i\,[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde R_i jsou funkce racionální a a číslo absolutně větší než 1). Ve třetí kapitole jsou vyloženy principy, jichž se užívá k řešení diferenčních rovnic tvaru

$$F(x + 1) - F(x) = f(x);$$

zvláště se jedná o periodických řešeních některých rovnic, o funkcích theta, o integraci lineárních diferenciálních rovnic s koeficienty dvojnásobně periodickými a s integrály jednoznačnými a o Picardových transcendentách definovaných funkčními rovnicemi. Poslední kapitola je věnována Abelově rovnici

$$f[\vartheta(x)] = f(x) + 1,$$

kde ϑ je daná funkce a f neznámá; rovnice ta souvisí s úlohami o iteracích, kterými se zabývali Koenigs, Fatou a Julia. Kniha je zakončena odstavcem o užití Fredholmovy rovnice v některých úlohách nauky o potenciálu. Veliká cena knihy je jednak v tom, že jsou zde poměrně přístupně podány přesnou a přehlednou formou výsledky některých prací Poincaréových a Picardových jakož i mnohých jiných autorů, jednak v originálním výběru a uspořádání látky; tak na př. výklady o diferenčních rovnicích jsou podány v úzké souvislosti s teorií funkcí periodických, problémy o neeuklidovské geometrii ve spojitosti s vlastnostmi funkčních rovnic a j.

Druhý svazek obsahuje látku, která je doplňkem k některým kapitolám 3. dílu Traité d'Analyse o diferenciálních rovnicích lineárních. V prvé části, která je věnována obyčejným rovnicím, je vyložena předně obecná metoda ke studiu integrálních křivek (pro obecnou diferenciální rovnici 2. řádu), procházejících dvěma body. Následují kapitoly o integrálních křivkách rovnice

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)y = 0$$

určených podmínkami na krajích daného intervalu, o soustavách ortogonálních funkcí a o příslušných rozvojích v řady a o užití v některých úlohách matematické fysiky. Zvláštní kapitoly jednají o vyšetření periodických integrálů užitím jednak nekonečně velikého počtu algebraických lineárních rovnic o nekonečně velikém počtu neznámých jednak integrálních rovnic. Druhá část obsahuje výklad obdobných problémů o rovnicích parciálních. Jedná se o problém Dirichletův a o úlohy podobné pro obecnější parciální rovnice eliptického typu, o úlohách z nauky o vedení tepla a konečně o Fredholmově rovnici a jejím užití při řešení problému Dirichletova a Neumannova.

Ve třetím svazku nalézáme úvod ke studiu některých otázek z teorie algebraických křivek a ploch. V první kapitole je vyložen obecný problém inverse Abelových integrálů ve formulaci Jacobiově a Riemannově. Následují kapitoly o funkcích dvou proměnných o čtyřech periodách, o uniformisaci algebraických křivek, o rovnici

$$\Delta u = ke^u,$$

která se vyskytuje v teorii ploch konstantní křivosti a která souvisí s některými otázkami o automorfních funkcích; na začátku této kapitoly (str. 83) je zmínka o t. zv. Picardově principu, který doplňuje zajímavým způsobem definici harmonických funkcí. Další části spisu týkají se algebraických funkcí dvou nezávisle proměnných. Autor, jenž sám je nejvýznamnějším pracovníkem v tomto oboru, pojednává zde o integrálech totálních diferenciálů na algebraické ploše, o dvojnásobných integrálech racionálních funkcí a o dvojnásobných integrálech vztažených k algebraické ploše. Svazek je zakončen otiskem čtyř Picardových článků o různých otázkách z teorie algebraických ploch.

Jak druhý, tak třetí svazek jsou velmi obsažné. Podávají vedle partií podrobně vypracovaných mistrně psaný úvod k nejtěžším kapitolám vyšší analyse. Čtenář, jenž se zajímá o teorii algebraických ploch, užije k dalšímu studiu staršího díla Picard-Simart: Théorie des fonctions algébriques à deux variables, ke kterému se zde na četných místech odkazuje.

Bohuslav Hostinský.

V. Volterra: Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Edited by L. Fantappié, authorised translation by Miss M. Long. Blackie and Son, London, 1930, XIV + 226 p.

Tato kniha je rozšířený a doplněný překlad přednášek, které měl Volterra r. 1925 na universitě v Madridu a které vyšly r. 1927 ve španělském jazyce. Klasická vyšší analyse je vybudována na pojmu funkce. Nová teorie vychází z pojmu funkcionálu, to jest veličiny, jejíž hodnota závisí na celém průběhu dané funkce, a směřuje k tomu, přenésti metody, jichž se užívá v diferenciálním a v integrálním počtu, do analyse funkcionálů. Volterra podává zde pečlivě a důmyslně zpracovaný přehled, který umožní orientaci o všech důležitějších otázkách z tohoto oboru. Kniha není vlastně učebnicí, je spíše stručným úvodem ke studiu pramenů; cituje mnoho set prací, takže čtenář snadno si zde vyhledá tituly spisů, ze kterých by se poučil blíže o té neb oné otázce. Mnohé kapitoly byly obšírněji zpracovány již v dřívějších spisech Volterrových (viz moje recense v Časopise, ročník *43*, str. 73, 428; ročník *57*, str. 156).

První kapitola jedná o funkcionálech (definice, spojitost, lineární funkcionály, řady postupující podle symbolických mocnin funkcionálů) a o početních úkonech s nimi (derivování, zobecnění Taylorovy řady, výpočet variací, integrování). Druhá kapitola obsahuje po stručném úvodě o problémech funkcionálního počtu základy nauky o integrálních rovnicích lineárních; řešení těchto rovnic je pro funkcionální počet to, co je pro analysi řešení obyčejných rovnic lineárních. Třetí kapitola jedná o zobecnění pojmu analytické funkce, nastoupí-li uzavřená čára na místo nezávislé proměnné. Čtvrtá kapitola je věnována teorii o „skládání" funkcí, jež jest obdobné obyčejnému násobení čísel. Pátá kapitola jedná o integrodiferenciálních rovnicích a o rovnicích s funkcionálními derivacemi (tak se nazývají limitní hodnoty poměrů, jimiž se vystihuje změna funkcionálu uvažovaná v souvislosti s příslušnou nekonečně malou změnou proměnné funkce). V poslední kapitole jsou stručně vyloženy některé aplikace (z variačního počtu, z nauky o integrálních rovnicích, z teorie kmitů, aplikace integrodiferenciálních rovnic v mechanice a j.).

Autor, jenž svými pracemi uveřejňovanými od r. 1884 až do nejnovější doby dal základy k nejedné kapitole funkcionální analyse, podává tímto svým novým spisem výbornou pomůcku, která přijde vhod každému, kdo se zajímá o teorii funkcionálů a její aplikace. *Bohuslav Hostinský.*

E. Cartan: Leçons sur la géométrie projective complexe (Cahiers scientifiques, fasc. X, Paris, 1931, stran VII + 325). Nejprve stručně uvedu, oč jde. — Projektivní komplexní geometrie studuje invarianty grupy transformací projektivních a antiprojektivních v prostorech o $n \geq 1$ dimensích.

V nejjednodušším případě $n = 1$ tyto transformace (při nehomogenních proměnných) jsou tvaru

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

kde $\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené se z. Obecná projektivní transformace (1) dá se vyjádřiti vzorcem

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = k\,\frac{z - \alpha}{z - \beta}, \qquad (2)$$

kde α, β, k jsou vhodná čísla. Involutorní transformace (t. zv. symetrie) grupy (1) jsou (projektivní) involuce a (antiprojektivní) antiinvoluce. Antiinvoluce jsou buď prvního druhu, t. j. s dvojnými body, anebo druhého druhu, t. j. bez dvojných bodů.

Mezi antiinvolucemi druhého druhu (a. 2. dr.) a kladnými hermiteovskými formami $ax\bar{x} + bx\bar{y} + \bar{b}\bar{x}y + cy\bar{y}$ (a, c reální) o diskriminantu $ac - b\bar{b} = 1$, jest jednojednoznačná korespondence, takže množství a. 2. dr. tvoří (reální) prostor o 3 dimensích. Jsou-li v něm P_1, P_2 dva body, projektivita P_2P_1 jest tvaru (2) a $k > 0$. Číslo $\frac{1}{2}$ log k definujme jako vzdálenost bodů P_1, P_2. Prostor a. 2. dr. jest pak (t. zv. fundamentální) Riemannův prostor s definitním ds^2 a jeho isometrické transformace jsou všechny transformace grupy (1). Libovolné symetrii S přiřazena jest ve fundamentálním prostoru varieta symetrie, t. j. množství a. 2. dr. zaměnitelných s S. Tato jest 1° bod, 2° geodetická čára, 3° varieta (totálně geodetická) o dvou dimensích, když S jest 1^0 a. 2. dr., 2^0 involuce, 3^0 antiinvoluce 1. druhu. Symetrií S přejde každý bod P fundamentálního prostoru, neležící na příslušné varietě symetrie v souměrný P' vzhledem k této varietě (t. j. body P, P' leží na kolmici k varietě symetrie a jsou od této stejně vzdáleny). Fundamentální prostor jest v jednojednoznačné korespondenci s trojrozměrným prostorem Lobačevského takové, že varietám 1^0, 2^0, 3^0 odpovídají po řadě body, přímky, roviny. Grupa transformací (1), zaměnitelných s určitou (absolutní) symetrií S tvoří grupu pohybů geometrie buď na příslušné varietě symetrie (je-li tato aspoň o jedné dimensi) anebo (je-li to bod) v prostoru variet symetrie involucí nebo antiinvolucí 1. druhu, procházejících příslušným bodem. Je-li na př. S antiinvoluce 1. dr. (2. dr.) jest příslušná geometrie neeuklidovská rovinná (sférická po př. v eliptické rovině).

V prostorech o $n \geq 2$ dimensích lze předcházející výsledky zobecniti. Tyto jsou pak mnohem rozmanitější také proto, že vedle transformací bodových se uvažují transformace korelativní (korelace a antikorelace). Na př. pro $n = 3$ jsou výsledky tyto. Existují čtyři druhy symetrie projektivní (involuce centrální a biaxiální, polarita ke kvadrice a k lineárnímu komplexu) a pět druhů symetrie antiprojektivní (antipolarita hyperbolická prvního a druhého druhu, antipolarita eliptická, antiinvoluce prvního a druhého druhu). Z nich antipolarity eliptické jsou opět jednojednoznačně přiřazeny hermiteovským kladným formám a tvoří (reální) prostor o 15 dimensích. Jsou-li v něm P_1, P_2 dva body, kořeny charakteristické rovnice projektivity P_2P_1 jsou > 0. Pomocí těchto lze definovati vzdálenost bodů P_1, P_2 tak, že uvažovaný prostor jest opět (t. zv. fundamentální) Riemannův prostor s definitním ds^2 a jeho isometrické transformace jsou všechny transformace projektivního komplexního prostoru. Variety symetrie v tomto prostoru jsou, mimo body přiřazené elipt. antipolaritám, (totálně geodetické) o 5 až 10 dimensích. Určité (absolutní) symetrii přiřazena jest na příslušné varietě symetrie po př. v prostoru variet symetrie téhož druhu procházejících jedním bodem fundamentálního prostoru, geometrie podřazená projektivní komplexní geometrii (geometrie neeuklidovská komplexní, lineárního komplexu, hermiteovská hyperbolická, eliptická atd.).

Kniha je rozdělena na dvě části a z nich každá má pět kapitol. V první části kapitola první obsahuje několik základních vět projektivní komplexní geometrie, zvláště větu o charakteristických vlastnostech projektivních transformací. V ostatních kapitolách této části probírána jest projektivní geometrie na komplexní přímce s hlediska a s výsledky v hlavních rysech výše uvedenými ($n = 1$). V druhé části první čtyři kapitoly věnovány jsou převážně projektivní geometrii v prostoru trojrozměrném. Po několika klasických větách o korelacích a klasifikaci homografií následuje studium symetrií, zvláště dvojic symetrií zaměnitelných. V kap. 2—4 studuje se zobecnění hlavních výsledků první části, zvláště vlastnosti variet symetrií ve fundamentálním prostoru a jednotlivé geometrie, podřazené proj. komplexní geometrii, jak byla o tom výše řeč. Pátá kapitola stojí poněkud isolovaně, avšak má mnohé styčné body s předcházející teorií. Obsahuje obecnou teorii harmonických polynomů, její aplikaci na znázornění projekt. kompl. prostorů reálními varietami v eukleidovských prostorech a studium geometrických vlastností těchto variet.

Mám za to, že hlavní význam díla jest v originální myšlence studia proj. kompl. geometrie v souvislosti s fundamentálním Riemannovým prostorem, která vede zvláště k jednotnému hledisku pro klasifikaci geometrií podřazených projektivní grupě. Avšak i v podrobnostech a podřadnějších věcech jest řada velmi zajímavých výsledků a originálních metod. Na př. znění a důkaz teorému na str. 9, studium zaměnitelných symetrií, důkaz teorémů na str. 151, 199 a zvláště pak úvahy v poslední kapitole druhé části (částečně již uveřejněné v dřívějších pracech autora). Čtenář nalezne na několika místech popud k samostatné činnosti a myslím, že zvláště poslední kapitola vede k zajímavým geom. otázkám (na př. po geom. konstrukci Segreových variet, jejích lokálních charakteristických vlastnostech, a pod.). Autor píše v úvodu: „Je ne suppose au lecteur, en dehors d'une certaine culture mathématique, que la connaissance des propriétés classiques du rapport anharmonique et la notion d'espace riemannien.“

O. Borůvka.

Gino Loria: Curve piane speciali algebriche e trascendenti, teoria e storia, vol. II, 1930, Milano, U. Hoepli, cena 140Kč.

O druhém díle italského vydání známého spisu Loriova mohli bychom s malými změnami říci totéž, co o díle prvním (Roč. LX str. 45.). I tento díl doplnil autor nejnovější literaturou, i zde v celku i částech ponechal strukturu známých vydání německých. Je záslužným činem jak autorovým tak vydavatelovým, že v poměrně krátké době odevzdali matematické veřejnosti úplné a jednotné zpracování zvláštních křivek, jak rovinných (v těchto dvou dílech), tak prostorových (Curve sghembe ecc.).

Q. Vetter.

C. C. Dassen: Sistemas de coordenadas y transformaciones, Buenos Aires, 1930, XIII — 250 str.

Kniha ta vznikla přepracováním a doplněním článků, které Dassen uveřejnil v „Revista matemática“ a v „Annales de la Sociedad cientifica Argentina“. Účelem knihy je podati jasný výklad látky, ovšem podle nových prací doplněné, která je obsahem poslední práce Darbouxovy. Účele toho autor také dosahuje. Po všeobecných pojmech v I. kapitole probírá ve II. kapitole souřadnice tetraedrické a homografii. Zde dochází až ke zvláštním případům homografické transformace, k perspektivě a transformaci Lorentzově; jakož i k aplikacím homografie. Ve III. kapitole probírá souřadnice tangenciální, korelaci a princip duality, ve IV. korelativní obrazce. V kapitole V. konečně pojednává autor o souřadnicích tetracirkulárních a pentasférických a o inversi. Při svých výkladech cituje i literaturu z posledních let. Velmi instruktivní je dodatek, kde jsou ve velmi stručném přehledu podány dějiny jednotlivých otázek na př. dvojpoměru nebo transformace souřadnic a pod. od doby nejstarší až do nejnovější. Abecední rejstřík citovaných autorů s daty narození a úmrtí je dobrým zakončením knihy.

Q. Vetter.

Gino Loria: Storia delle matematiche, vol. II, Turin, 1931, Sten, 595 str., cena váz. 50 Kč.

Dva roky po I. díle, o němž jsem referoval v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, roč. LX, str. 132, předkládá neúnavný nestor italských historiků matematiky čtenářstvu druhý svazek svých dějin matematiky. Přednosti prvního dílu jsou nejen zachovány, nýbrž snad i stupňovány ve svazku druhém, věnovaném století XVI. a XVII. Díl ten počíná velkým sporem mezi Tartagliou a Cardanem a končí ještě větším sporem mezi Newtonem a Leibnizem. A mezi nimi leží spor Robervalův a jiné. V těchto velkých sporech zachovává prof. Loria vzácnou objektivitu, která svědčí o jeho jemném historickém taktu. Probírati jednotlivosti jeho krásné a bohaté knihy bylo by příliš obšírné a odkazuji čtenáře na spis sám. Podotýkám jen, že kapitoly jsou srovnány podle látky, v nich pak jsou oddíly uspořádány podle jednotlivých věd. Z českého hlediska bych jen podotkl, že naše slovenské Košice, kde zemřel Rheticus, jsou omylem psány Kaschen (Ungheria) a že u otce Jana Caramuela z Lobkovic, Vavřince Caramuela, je poznámka „oriundo boemo“, ač jen jeho matka byla Češka, Regina z Lobkovic. Jako první lze i druhý svazek vřele doporučiti. Připojujeme jen jediné přání, aby i třetí díl, který se tiskne, brzo vyšel.

Q. Vetter.

E. Müller: „Vorlesungen über darstellende Geometrie" II. Band „Die Zyklographie", vydal J. Krames u fy Deuticke, Wien-Leipzig 1929. Stran 474, obrazců 208.

V roce 1923 vyšel první díl těchto přednášek profesora vídeňské techniky, určených pro kandidáty profesury, obsahující lineární zobrazovací metody deskriptivní geometrie. Referát o tomto díle je v LIV. ročníku tohoto časopisu od prof. Dr. L. Seiferta. Již v tomto I. díle slíbil prof. Müller další práce, a to o cyklografii, o konstruktivní teorii přímkových ploch a o šroubových a posuvných plochách. Bohužel než došlo k vydání II. dílu, znamenitý tento deskriptivní geometr zemřel dne 1. září 1927. V jeho pozůstalosti byl zcela zpracován tento II. díl a jeho žák Krames, nyní profesor na německé technice v Brně, vydal toto dílo, jež rozšiřuje užití deskriptivní grometrie i na problémy čistě matematické. Cyklografie byla již zpracována svým objevitelem *Fiedlerem* v díle „Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln" roku 1882 a později bylo jí užito celkem od málo autorů, mezi nimiž je též zvěčnělý náš prof. Sobotka, v různých pojednáních. Prof. Müller od roku 1905 uveřejnil několik pojednání o cyklografii a ta jsou systematicky zde projednána, jakož i v mnohém směru prohloubena. Do všech důsledků, na rozdíl od Fiedlera, užito tu dvojího smyslu na kružnici a přímce k zavedení pojmů cyklu a šípu (Speer).

V prvých dvou kapitolách podány definice jakož i přiřazené útvary v prostoru základních pojmů v množině cyklů roviny, t. j. cyklové lineární řady, lineární a sférické kongruence, kruhu, svazku, trsu, koule, jakož i základních transformací dilatace a zrcadlení vzhledem k lineární cyklové kongruenci t. zv. Laguerrovy transformace. V kapitole třetí vyloženy hlavní metrické pojmy parabolické geometrie, jež má za absolutní kuželosečku úběžnou kuželosečku C rotační kuželové plochy, již tvořicí přímky svírají s průmětnou, v níž cyklovou geometrii uvažujeme úhel $\frac{1}{4}\pi$, podle Müllera tak zvané C-geometrie nebo pseudogeometrie. Definovány tu C-kružnice, C-koule a uvažováno tu o hlavní grupě transformací, jež reprodukuje kuželosečku C a její podgrupě t. zv. C-pohybů a C-překlopení. Pojmy tyto přeneseny do geometrie cyklů a šípů a využito toho k řešení různých úloh, jakož i k důkazu některých vztahů, zvláště pak v kapitole IV. k odvození vět o tak zvaném čtyřšípu (Vierspeer). Též přeneseny známé věty prostorové geometrie, na př. o 8 asociovaných bodech, Möbiusových čtyrstěnech atd. do geometrie cyklů. Užitím cyklografie podán důkaz věty Caseyovy, kdy čtyři cykly se dotýkají téhož cyklu, a na základě této pak důkaz věty Feuerbachovy o kružnici devíti bodů v trojúhelníku, o který pokusil se sice již Fiedler, ale jak Müller podotýká, provedl jej neúplně a teprve prof. Sobotka v pojednání „K dvěma důkazům věty Feuerbachovy", Rozpravy České akademie XXXI, podal dokonalý cyklografický důkaz. Ke konci IV. kapitoly je zmínka o Blaschkeově zobrazení šípu průmětny v body rotační válcové plochy, kolmé k průmětně, jakož i o přenesení některých pojmů touto transformací z geometrie cyklů do prostoru.

V kapitole V. vzhledem k užití v dalším vyloženy vlastnosti nové bodové transformace, zprostředkované stereografickou projekcí kulové plochy ω na průmětnu π, jdoucí jejím středem a cyklografií. Bod p prostoru zobrazen tu párem bodovým, souměrně položeným k průmětně π, jenž je cyklografickým obrazem kružnice, do níž stereograficky promítá se kružnice plochy ω, ležící v polárné rovině bodu p vzhledem k ω. Dospívá se tak k neeuklidovské hyperbolické geometrii, jež má π za absolutní plochu, C-kružnice a C-koule, jichž středy jsou v π, za přímky a roviny, jež se nazývají S-přímky a S-roviny (od slova Scheingeometrie). Odvozeny základní metrické pojmy v této S-geometrii, hlavně S-koule, S-pohyby, S-zrcadlení z hyperbolické geometrie prostorové o absolutní ploše ω, t. zv. ω-geometrie.

Po tomto vsunutí, jež jeví se nutným k pozdějším vztahům, pokračováno v užití cyklografie, a to nejdříve k zobrazení křivek prostoru v cyklické řady a jich obálky. Zvláště věnována pozornost křivkám stejného spádu, jež pro spád 1 jsou C-křivkami. V aplikacích pozoruhodná je řada vět o křivkách, zvaných kaustiky, katakaustiky a antikaustiky, jež vyskytují se při odrazu, případně lomu paprsků. Obzvlášť podrobně probrány cyklické obrazy křivek 2^0 a s tím souvisící plocha stejného spádu nad kuželosečkou. V VII. kapitole zajímavě pojednáno o prohýbání řad cyklů a způsobem velmi jednoduchým odvozena tu řada pozoruhodných vět pro cyklické pohyby v rovině a mnohé jiné speciální křivky, jako řetězovky, traktrix atd. Cyklografickému zobrazení ploch věnována kapitola VIII. Plocha zobrazuje se tu v kongruenci cyklovou, jejíž cykly jsou oskulačními dvou sítí křivek, jež odpovídají dvěma sítím C-křivek plochy. Touto teorií zobrazení ploch řešena tu řada problémů o trajektoriích a ekvitangenciálních systémech sítí křivek. Obdrženy tak názorným a jednoduchým způsobem mnohé ze známých dřívějších výsledků, jakož i některé nové.

Kapitola IX. obsahuje zobrazení bodů prostoru v kulové plochy, opsané nad jejich cyklografickými obrazy jako hlavními kružnicemi. Studována dotyková transformace mezi bodovým prostorem a trojmocnou množinou kulových ploch, jež protínají průmětnu π kolmo. Přímkový prostor zobrazuje se tu v čtyřmocnou soustavu rotačních kuželových ploch o osách v π. C-přímkám odpovídají minimální přímky. Křivky a přímky bodového prostoru zobrazují se tu v nelineární řady, případně kongruence kulových ploch, jež obalují plochy, jichž některé vlastnosti vyplývají ihned z této transformace. Zvláštní pozornost věnována Dupinovým cyklidám, jež odpovídají C-kružnicím v bodovém prostoru.

V kapitole X. ukázáno, jak body roviny lze „cyklograficky" zobraziti v družiny bodové přímky P, obsažené v té rovině. Zvolen tu pár bodový c_1, c_2 na úběžné přímce roviny, jež jsou ve směrech, svírajících s P úhly $\pm \frac{1}{4}\pi$, a z nich libovolný bod roviny promítnut na přímku P do družiny obrazové, jež, jsouc orientována, určuje bod v té rovině jednoznačně. Řada bodová má tak za obraz podobnost dvou řad na P a libovolné křivce v rovině odpovídá tak jistá korespondence bodová na P. Projektivnost bodová na P je obrazem C-kružnice. C-geometrii rovinné, jež má za absolutní body c_1, c_2, odpovídá tu geometrie šipek na přímce. Obdrží se tak jednoduchým způsobem řada vět o projektivnostech na přímce. Tato kapitola byla by bývala lepší na počátku díla, jako úvod do cyklografie. V závěru naznačeno ještě, jak lze cyklografické zobrazení různě zobecniti.

Všechny kapitoly doprovázeny jsou řadou příkladů, jež podávají se čtenáři k řešení. Kniha obsahuje mnoho nových podnětů k aplikacím uvedených zobrazovacích metod a obohacuje měrou značnou literaturu o deskriptivní geometrii. V některých částech však mohla býti stručnější. Vypravení celého díla i po stránce vnější je vzorné, obzvláště obrazce, jak u Müllerovy školy samo sebou se rozumí, jsou vzorně a jasně provedeny. Spis tento vřele se doporučuje k prostudování našim kandidátům profesury. Jen některá menší nedopatření referent dovolil by si poznamenati. K poznámce na str. 23 třeba dodati, že též *Monin* v práci „Příspěvky k theorii křivky kruhové", vydané v roce 1889 vlastním nákladem, zavádí jistou hodnotu pro mocnost přímky vzhledem ke kružnici, jež je funkcí Epsteinem zavedené mocnosti. Cyklus X. v obr. 39 má míti smysl opačný. Str. 102, odst. 48 v závěru je nejasný, uvedená plocha Φ nemůže náležeti k daným družinám bodovým na kuželosečce K^2. Str. 212 kružnice podobnosti dvou kružnic značí tu něco jiného, než uvedeno na str. 154 v poznámce. Zde byl by na místě název „potenční kružnice" podle Ponceleta. Str. 217, doplňujícím se cyklům odpovídající elipsy na Γ jsou souměrné vzhledem k o a nikoliv π. Str. 247 nahoře se praví, že má-li křivka K bod vratu, příslušná

C-rozvinutelná plocha má bodem tím jdoucí tvořicí přímky za přímky vratu, což vedlo by k tomu, že ekvidistanta na př. pravidelné asteroidy měla by míti body vratu na normále v jejím bodě vratu, což pravda není, ostatně na str. 265 tvořicí přímky ty neuvažují se jako vratu. V poznámce[3]) str. 255 bylo by dobře odkázati na př. na Wieleitnera: „Spezielle ebene Kurven" str. 225. V odstavci 46 bylo by lépe při C uvésti třídu $m_1 = 0$, ježto v případě prostorové křivky je to počet oskulačních jejích rovin bodem. Str. 265 dole ke křivce K ve svislé rovině lze vésti jen m svislých tečen a nikoliv $2m$. K poznámce [3]) str. 315 třeba dodati, že věta, Chaslesem vyslovená, je zvláštním případem věty Camusovy z roku 1733 v „Mémoire de l'Academie". Ve větě 2. odst. 58. dotýká se řídicí přímka souměrně položené řetězovky. Na str. 353 má býti ve vzorcích pro $d\psi$ a ψ odmocnina jen v čitateli. Na str. 389 místo (Trajektorie) má býti (traktorie).

Od týchž autorů a u téhož nakladatele vyšel III. díl těchto přednášek, a to „Konstruktive Behandlung der Regelflächen", stran 303, obr. 153, 1931. Tento díl, jak vydavatel prof. Dr. Krames v předmluvě praví, vznikl z přednášek prof. Müllera, ale zpracování, jakož i mnohé prohloubení pochází zcela od vydavatele. Podána tu poprve souborně konstruktivní teorie přímkových ploch jak rozvinutelných, tak zborcených.

V prvé části díla pojednáno o přímkových plochách obecně. V kapitole I. předeslány potřebné pojmy z přímkové geometrie a to komplex, kongruence a přímková plocha, při posledních pak rozdíl mezi rozvinutelnými a zborcenými. Definován distribuční parametr, který podle Blaschke označen tu německy „Drall" (výkrut), při čemž zvláště přesně vytčen jeho smysl, torsální přímky a roviny, kuspidální body, jakož i rovnice definovaných útvarů přímkových. V II. kapitole přihlédnuto k různým vytvořením přímkových ploch. Nejprve rozvinutelné plochy určeny dvěma řídicími plochami nebo křivkami. V posledním případě proveden zajímavý případ, dány-li dvě řídicí kružnice, jichž roviny jsou k sobě kolmé. Poté uvažována zborcená plocha jako pronik tří paprskových komplexů a aplikováno to na případy, dány-li tři řídicí křivky nebo plochy. V dalším vytvořena zborcená plocha pronikem kongruence paprskové s komplexem nebo jako výtvor při korespondenci dvou řad prvků, jakož i některá jiná vytvoření. V III. kapitole uvažována zborcená plocha v okolí řídicí přímky, t. j. tečná rovina, křivost, paraboloid normál, dotyčný a oskulační hyperboloid, případně paraboloid, hlavní obratové tečny (fleknodální tečny). Vyšetřována závislost Gaussovy křivosti v bodech téže obecné tvořicí přímky, jakož i místo středů křivosti hlavních řezů v bodech torsální přímky. Zavedeny tu podle Mohrmanna pojmy torsálních přímek vyšších stupňů, jakož i zvláštních přímek zborcených ploch s příslušnými názvy. Prohýbání zborcených ploch užito při prostorovém pohybu v prvém stupni volnosti. Ve IV. kapitole probrány obzvlášť důkladně různé křivky a opsané rozvinutelné plochy zborcených ploch. Jsou to hlavně mez vlastního stínu, isofóty s provedeným příkladem na přímém kruhovém konoidu. Při úpatnicové a strikční křivce určeno jejich rozpadání při algebraických přímkových plochách. Důkladně probrány asymptotické křivky oněch ploch přímkových, jež obsaženy jsou v lineárním komplexu nebo kongruenci a geometricky vyvozeny a rozšířeny výsledky Mohrmannovy.

Druhá část spisu věnována zvláštním přímkovým plochám 3. a 4. stupně, a to vždy nejdříve obecně a pak podány charakteristické příklady zvláštní. V V. kapitole probrány vlastnosti, vytvoření jakož i tři typy zborcených ploch 3°, z nichž každý obsahuje ty plochy, jež kolineací lze v sebe převésti. V další pak VI. kapitole provedeny příklady na tyto tři typy a to obzvlášť důkladně Plückerův konoid, přímý konoid 3°, jehož torsální přímky jsou minimálními přímkami, a Cayleyovu plochu s úběžnou řídicí přímkou a úběžnou rovinou torsální. Na konec pojednáno ještě o speciální zborcené ploše 3°, s níž se Kramres zabýval při jisté příležitosti, jejíž úběžná křivka dvakráte oskuluje absolutní kuželosečku. V VII. kapitole jednáno o přímkových plochách 4° a sice přidrženo se tu rozdělení a označení Sturmova ve 12 druhů. Z příkladů těchto ploch jsou tu cylindroid, normalie ploch 2°, plocha, vyskytující se při zobecněném eliptickém pohybu (Wringfläche), a plocha normál podél loxodromy na anuloidu. Poukázáno tu též na užití některých těchto ploch v teorii obecných ploch nebo útvarů přímkových. V konečné poznámce je zmínka o plochách přímkových vyšších stupňů než 4. Teorie transcendentních přímkových ploch, zejména šroubových, ponechána do posledního, čtvrtého dílu těchto přednášek, v němž bude též pojednáno o translačních plochách.

Všechny kapitoly doprovázeny jsou příklady, z nichž mnohé nabádají k dalším pracím z tohoto oboru. Zvláště cenná je uvedená literatura, které bohužel je třeba s našeho stanoviska vytknouti, že zásadně, až na nepatrné výjimky, opomíjí pojednání našich autorů. Citována tu dvě francouzská pojednání prof. Hostinského a po jednom prof. Sobotky a Šolína, nepočítáme-li Emila Weyra. Snad bylo by možno namítnouti, že česká pojednání nejsou přístupná, ale pak k čemu jsou výtahy z nich v „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik"? Možno však ukázati, že i německy nebo francouzsky psaná pojednání našich autorů nejsou tu uvedena. Tak i Wiener ve své deskriptivní geometrii cituje Šolína při normalii přímého kužele. Obecně pak normalie ploch 2° obzvláště pěkně probral Machovec. Dále měli býti citováni na str. 60 v *e*) Klobouček prací: „Oskulační kvadrika zborcené plochy, dané třemi nekonečně blízkými čarami", na str. 78 před větou 2. Monin „Příspěvky ke stanovení tečných rovin k plochám mimosměrek", na str. 89 v poznámce ²) Čech: „Projektivní geometrie pěti soumezných mimoběžek", str. 249 Simandl: „Příspěvek ku přímkovým plochám 4. stupně, stanovenými dvěma projektivními involucemi na dvou mimoběžných osách" atd.

Dílo je opět vzorně a pečlivě vypraveno, zejména je skoro bez tiskových chyb. Lze jej co nejlépe doporučiti našim kandidátům profesury. Jen několik málo věcí lze vytknouti. Tak při konstrukci tvořicí přímky přímkové plochy na str. 34 a 35, určené třemi řídicími plochami, přímky tvořicí, jdoucí příslušnými body t_i, nejdou týmž bodem $\overline{o}$, nýbrž obecně každá jiným bodem na O. Plocha tato mimo uvedené torsální přímky má ještě duální torsální přímky, jež dotýkají se vždy průseku dvou ploch a třetí plochy. V rovnici (1) str. 39 je patrně zaměněno x a y. Důkaz v odst. 10*a*) str. 56 není přesvědčující. Ve větě 9. str. 73 má býti mocnost té involuce rovna záporné dvojmoci parametru distribuce. V odst. 26 snad by byl přece lepší název asymptotické křivky než hlavních teček. Str. 192 při konstrukci oskulačního hyperboloidu není třeba sestrojovati jednu asymptotickou tečnu v libovolném bodě přímky E, ježto hyperboloid ten obsahuje též jednoduchou řídicí přímku, takže lze snadno stopu jeho na rovině libovolné kuželosečky plochy určiti. Str. 253 lze kuspidální bod k_i rychleji sestrojiti. Viz Klíma: „Konstrukce fleknodálních čar na zborcených plochách 4°" str. 3. Na str. 256 8. řádek, křivka 4° nemůže míti trojnásobnou tečnu. Str. 258, řádek 13. body l_1 a l_2 nejsou odpovídajícími body, ježto byl by to typ XI. *J. Klíma.*

Vl. Novák: Fysika. Díl II. (Elektřina a optika). Třetí pozměněné a doplněné vydání. Stran 640. Cena váz. výtisku 116 Kč. Nákladem JČMF 1932.

V těchto dnech vyšlo třetí vydání druhého dílu Novákovy Fysiky. V našich malých a úzkých poměrech je fakt, že vysokoškolská učebnice vychází v třetím vydání, a to ještě po poměrně krátké době čtrnácti let po prvém vydání, velmi řídký a již sám o sobě svědčí o ceně a oblibě Novákovy knihy.

Druhé vydání Novákovy Fysiky vyšlo r. 1921. Během posledních deseti let zaznamenává však rozvoj fysiky tak četné objevy, také fysikální názor se v mnohých směrech tak značně změnil, že dnes je druhé vydání N. F. zcela zastaralé. Toho si byl autor také dobře vědom a proto v novém vydání nejen přidal výklad nových zjevů, ale knihu úplně přepracoval. Ačkoli nové vydání obsahuje popis a výklad celé řady nových poznatků, přece jen jeho rozsah proti předešlému vydání nevzrostl. Toho bylo dosaženo tím, že autor některé výklady zkrátil, množství historických poznámek a některé méně důležité partie vůbec vynechal. Účelná změna pořadí kapitol dovolila autorovi některé kapitoly (na př. magnetostatiku) beze škody pro čtenáře velmi podstatně zkrátiti. Všemi těmito změnami kniha velmi získala.

Největší změny jsou provedeny v prvé části knihy, pojednávající o elektřině. Výklady počínají elektrostatikou, po ní teprve následuje magnetostatika; elektromagnetismus zařazen před kapitolu o indukci. Na vhodných místech je připraveno odvození základních Maxwellových rovnic (a to velmi účelně ve vektorové formě); ve zvláštním oddílu pak jsou podány základy Maxwellovy teorie elektromagnetického pole (s matematickým odvozením elektromagnetických vln) a Lorentzova elektronová teorie. Lze jen schvalovati, že autor vyložil podstatu symbolické metody k řešení úloh o střídavém proudu a na řadě příkladů ji aplikoval; je to proto tak důležité, že dnes v odborné literatuře o radiotelegrafii a slaboproudé technice se této metody výhradně používá. Rovněž nový je dosti obšírný výklad o elektronových lampách a některých aplikacích piezoelektrických vlastností křemenných krystalů; značně je rozšířena kapitola o radiotelegrafii a radiotelefonii, jak to odpovídá velkému rozkvětu a důležitosti této disciplíny. Také v druhém dílu knihy, pojednávajícím o optice, je řada kapitol přepracována a doplněna. Z hlavních změn uvádím: je popsán a vyložen Zeissův ponorný refraktometr, sextant, přemístěn výklad o spektrálních strojích. Výklad Comptonova zjevu, magnetických spekter fotoelektronů, Tyndalova a Ramanova zjevu je nově přidán. Zcela je přepracována kapitola o spektrálních zákonitostech, o fotochemii a oddíl o zjevech magnetooptických a elektrooptických. Kniha je zakončena kapitolou o vlnové a kvantové mechanice.

Z menších nedostatků chtěl bych upozorniti na tyto: druhá polovina kapitoly o resonanční křivce (str. 184) není dosti jasná; je to způsobeno přílišnou stručností výkladu.

Při výkladu o symbolické metodě (str. 185) postrádám zdůvodnění, proč lze s odporovými operátory počítati jako s odpory. Zesilování elektronovou lampou se vykládá na str. 210, výklad se opakuje na str. 265. Definice průniku a zesilovacího koeficientu elektronové lampy (str. 266) není dosti přesná. Výklad heterodynového příjmu (str. 282) není dosti jasný. Nesprávné je tvrzení, že Fessenden (1907) použil lampového generátoru jako heterodynu.

Pro elektronovou lampu používá se někdy označení audion; to se nedoporučuje, poněvadž název audion je reservován pro lampový detektor s mřížkovým usměrněním.

V kapitole o výbojích v plynech postrádám Kaufmannovy podmínky stability, v kapitole o piezoelektrických krystalech postrádám zmínky o křemenných resonátorech, jež jsou jak pro měrnou fysiku, tak i pro praxi velmi důležité.

Dále neshledávám účelným, že se o elektrických jednotkách mluví na velmi četných místech. Doporučoval bych shrnouti tyto výklady, čímž by se jednak ušetřilo místa a výklad by byl srozumitelnější.

Podněty, které jsem uvedl, jsou podřadného rázu a nijak cenu Novákovy knihy nesnižují. Prof. Novákovi náleží velká zásluha nejen, že napsal prvou českou úplnou učebnici fysiky, ale také proto, že ji v nových vydáních neustále modernisuje. Z krátké recense vyplývá jasně, že Novákova kniha je látkou, duchem a zpracováním zcela moderní učebnice a je si jen přáti, aby také nové vydání našlo stejně mnoho čtenářů a obliby jako vydání předešlá. *Záček.*

Fr. Nachtikal: Technická fysika. Stran 656. Cena vázaného výtisku 80 Kč. Nákladem Spolku posluchačů inženýrství chemie. V Praze 1931.

Když jsem se poprvé doslechl, že prof. Nachtikal má v úmyslu vydati samostatnou učebnici fysiky, velmi jsem mu to zazlíval; měl jsem totiž za to, že vzhledem k existující učebnici Novákově je to pro naše poměry a úzké odbytové možnosti zbytečné a nehospodárné tříštění sil, a daleko raději bych byl býval viděl, aby Nachtikal se stal spoluautorem nového vydání Novákovy Fysiky — když však jsem hotovou učebnici Nachtikalovu prohlédl, vidím, že jsem se mýlil: nová učebnice má i vedle stávající knihy Novákovy plné oprávnění a jistě bude pro posluchače nově vstupující na vysokou školu výbornou pomůckou. Jediná věc, s kterou bych nesouhlasil, je název knihy: pod názvem „technická fysika“ si představuji výklady o aplikacích fysiky v technické praxi, o nichž se (zcela právem) v knize mluví velmi málo. Zato plně souhlasím s názorem autorovým o tom, čemu se má budoucí inženýr z fysiky naučiti; velmi pěkně to vyjádřil v předmluvě své knihy.

Úkol, který prof. Nachtikal svojí knihou sledoval, byl podati posluchačům techniky vhodnou učebnici fysiky, jež by doplnila výklady přednáškové. Tento úkol, jistě nijak lehký, rozřešil velmi dokonale; mám za to, že i posluchačům fysiky na přírodovědeckých fakultách bude učebnice Nachtikalova výbornou a užitečnou pomůckou. Autor vykládá jasným a stručným způsobem hlavní poznatky fysikální, přechází detaily, jež pro čtenáře, pro něž je kniha určena, nemají smyslu a pro něž by také neměli zatím pochopení. Další velikou předností knihy je okolnost, že autor formuluje a řeší fysikální problémy také početně, čemuž se elementární knihy velmi často vyhýbají, ovšem neprávem; vždyť konečně potřebné matematické vědomosti jsou minimální, ale s druhé strany dovoluje tento způsob výkladu daleko hlubší vniknutí do podstaty věci. Stejně nutno schvalovati, že autor užívá na vhodných místech vektorového počtu.

Jakkoliv jde o elementární učebnici, je duch i metoda knihy zcela moderní; výklady jsou prováděny tak, že se čtenář učí fysikálnímu myšlení: fysikálně chápati, formulovati a řešiti jednotlivé problémy. Také výběr látky je šťastný; neomezuje se na obvyklé partie; čtenář pozná základy termodynamiky, Maxwellovy teorie elektromagnetického pole a Lorentzovy elektronové teorie, poučí se o moderních zásadách pro akustičnost sálů atd. Dikce knihy je stručná a při tom jasná. Výklady jsou doprovázeny množstvím schematických obrázků. Úprava knihy je vkusná; vzhledem k značnému počtu stran (646) doporučovalo by se rozděliti knihu ve dva svazky.

Z toho, co bylo řečeno, plyne, že Nachtikalova Fysika je skutečným obohacením naší nečetné fysikální literatury; podepsaný je přesvědčen, že bude vřele uvítána nejen posluchači technik, ale i praktiky. Rovněž posluchači fysiky na přírodovědeckých fakultách budou ji se zdarem používati jako pomůcky k přípravě k prvé státní zkoušce. *Záček.*

P. Painlevé: Cours de Mécanique professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. VI + 664 p. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

Autor zabýval se již před mnohými lety podrobným studiem základních zákonů mechaniky; některé jeho axiomatické studie jsou z části známy z knížky Les axiomes de la Mécanique, Examen critique, která vyšla ve sbírce Les Maîtres de la Pensée scientifique.

Nové dílo, jež probírá v prvním svazku základy vektorové analyse a kinematiky, axiomy mechaniky a obecné věty o pohybu a o rovnováze soustav, vyniká právě tím, že zvláštní péče je věnována výkladu základních vět (str. 63 a násl.). Painlevé přijímá čtyři axiomy mechaniky (str. 85 a 86), z nichž první dva neliší se v podstatě od principu setrvačnosti a principu akce a reakce v Newtonově formulaci. Třetí axiom (princip počátečních podmínek) zní: Jsou-li dva dané hmotné elementy nekonečně daleko ode všech ostatních, jejich zrychlení jsou jednoznačně stanovena co do směru a velikosti v okamžiku t_0, známe-li v tomto okamžiku vzdálenost obou elementů a jich relativní rychlost. Čtvrtý axiom je princip o rovnoběžníku sil.

Kniha je psána pro začátečníky; je přístupna každému, kdo zná začátky vyšší matematiky a bude vítána zejména čtenářům, kteří se zajímají o logický rozbor základních vět. *Bohuslav Hostinský.*

J. J. Thomson: Tendencies of recent investigations in the field of physics, 28 p. The British Broadcasting Corporation, Savoy Hill, London, 1930.

Autor podává zde živou, někde i humoristickou, a dokonale srozumitelnou formou svoje názory o různých směrech v moderní fysice. Srovnává hlavně teorie založené na fysikální intuici s teoriemi ryze matematickými a netají se svým skepticismem vůči posledním. Thomsonovi nezdají se býti naše představy o přírodě dosti účelnými, když na př. po úspěších undulační teorie docházíme k tomu, že světlo je povahy korpuskulární. Odmítá stanovisko některých moderních teoretiků, kteří jsou proti zavádění pojmů nevztahujících se k věcem pozorovatelným a měřitelným. To byla filosofie Berkeleyova a Thomson ji označuje za špatnou fysiku a za špatnou metafysiku; podle jeho názoru zavedení kvantity zjasňuje myšlení a i když někdy nemáme prostředků k přesnému měření kvantity, zavésti ji je nejen oprávněno ale i žádoucno. Technika fysikálních měření se rychle zdokonaluje a to, co dnes je neměřitelno, může se státi měřitelným zítra. Je nebezpečno založiti filosofii na předpokladu, že to, co neznám, nebude nikdy předmětem vědy. Užívání teorií fysikálního typu (atomová teorie v chemii, modely éteru v elektromagnetismu) je charakteristické pro britskou vědu a bylo, jak autor se domnívá, ospravedlněno svými výsledky.

Knížka, která reprodukuje Thomsonovu přednášku do rozhlasu, konanou dne 27. ledna 1930, zaslouží si pozornosti každého, kdo se zajímá o fysiku. *Bohuslav Hostinský.*

H. Villat: Leçons sur l'Hydrodynamique. VI + 296 str. Gauthier-Villars, Paris, 1929. Leçons sur la Théorie des tourbillons. 300 str. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

Mécanique des Fluides. VII + 175 str. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

První svazek je sepsán podle přednášek, jež autor konal v letních semestrech 1925 a 1926 na Sorbonně. Po úvodu o některých vlastnostech analytických funkcí a o Dirichletově problému pro mezikruží následují kapitoly o eliptických funkcích a o konformním zobrazování. Na str. 48—51 je odvozen důležitý a zajímavý výsledek (viz Villat, Annales de l'Ecole Normale, 1921), že užitím eliptických funkcí možno konformně zobraziti prstenovitou plochu, omezenou dvěma uzavřenými křivkami na mezikruží. Následuje stručná kapitola o obecných rovnicích hydrodynamických, načež přechází autor k výkladu jak kapalina proudí kolem pevné překážky. Velká část spisu je věnována studiu proudů ve viskosních kapalinách podle C. W. Oseena (případ nevířivých pohybů). Řešení těchto rovnic, dosti složité, je vybudováno z funkcí, které se vyskytují při řešení Fourierovy rovnice pro vedení tepla v tyči; tato rovnice má zde úlohu asi takovou jako Laplaceova rovnice při řešení obecných rovnic pro rovnováhu pružného tělesa.

Druhý svazek pojednává obšírně o teorii vírů. Z problémů zde vyložených uvádím: výpočet rychlostí, když je dáno rozdělení vírů; víry, jež vznikají v neomezené kapalině, která proudí kolem pevné překážky; obecná teorie nespojitých proudů; Lichtensteinovy věty z teorie potenciálu; vířivé pohyby ve viskosních kapalinách.

Třetí svazek je rázu více elementárního. Látka zde probraná je z největší části zpracována také v prvních dvou svazcích; některé kapitoly (zejména úvodní dvě o rovnicích hydrodynamiky a o vlastnostech harmonických funkcí) jsou podrobněji vypracovány s ohledem na začátečníky. Kniha vznikla z přednášek konaných pro posluchače, kteří studují ve 2. roce na vyšší škole aeronautické. Je to výborná učebnice, která čtenáře uvádí do základů hydrodynamiky; příklady hlavně o výpočtu tlaku kapaliny na překážku jsou voleny se zřetelem k aplikacím na technické problémy.

Autor spojil úspěšně v těchto spisech výklady o svých vlastních studiích s výkladem o pracích jiných autorů a obohatil tak literaturu o hydrodynamice třemi velmi cennými knihami. *Bohuslav Hostinský.*

*

Poznámky k článku prof. Fr. Rádla: **Odpověď k recensi prof. Petra...** (Strojnický obzor, roč. XI., č. 23, str. 471—472.)

Prof. Petr otiskl v tomto Časopise (roč. 61, seš. 2, str. 81—90) recensi knihy prof. Fr. Rádla „Učebnice matematiky pro vysoké učení technické"; tato recense vyzněla v rozhodné odmítnutí uvedené knihy. Prof. Rádl polemisuje s touto recensí v článku „Odpověď k recensi prof. Petra..." (Strojnický obzor, roč. XI., č. 23, str. 471—472). Věcně jest věc vyřízena kritikou prof. Petra; odpověď prof. Rádla jest však takového rázu, že jest záhodno věnovati jí v tomto Časopise trochu místa. Prof. Petr vybral z knihy prof. Rádla několik chyb a tyto chyby ve své recensi rozebral a vytkl. Ve své „Odpovědi" vybral prof. Rádl některé výtky z recense prof. Petra; tvrdí o nich, že jsou neoprávněné a dokonce že samy obsahují omyly; tvrdí také, že všechny ostatní výtky prof. Petra (jimiž se ve své „Odpovědi" obšírně nezabývá) jsou bezpodstatné, s výjimkou jediné výtky, kterou uznává (tato výtka týká se numerického počítání). Výtky prof. Petra jsou velmi jasně formulovány a plně oprávněny, jak ukáži čtenáři obšírným rozborem.[1])

Celkem jsem napočítal v recensi prof. Petra 31 konkrétních výtek (není to ovšem číslo zcela směrodatné — jiný čtenář mohl by dvě výtky, jež počítám odděleně, počítati za dvě části jedné výtky nebo naopak); prof. Rádl vybral z nich osm, na něž odpovídá. Z těchto výtek jedinou uznal za oprávněnou (jak jsem již poznamenal), oprávněnost ostatních popírá (viz v dalším citát (O_6)). Při tom na první místo přirozeně postavil onu výtku prof. Petra, na kterou se mu zdálo nejsnazším odpověděti (viz v dalším citáty (O_1), (O_2)). Při této první námitce prof. Rádla jde o tuto věc. Prof. Petr mluví o tom, že prof. Rádl vyšetřuje limitu výrazu $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-1)}{x-2}$ pro $x = 2$, ač by bylo přirozenější vyšetřovati limitu výrazu $x - 1$; neboť oba výrazy jsou si rovny, vyjma pro hodnotu $x = 2$; při vyšetřování limity v bodě $x = 2$ však, jak známo, na hodnotě funkce v bodě $x = 2$ samotném vůbec nezáleží. Prof. Petr považoval zřejmě

---

[1]) **Budu se však hlavně zabývati jen oněmi výtkami prof. Petra, na něž prof. Rádl ve své „Odpovědi" přímo odpovídá. Abych čtenáři usnadnil přehled, budu citáty z Rádlovy učebnice značiti písmenem *U*, citáty z Petrovy kritiky písmenem *K*, citáty z Rádlovy odpovědi písmenem *O* (s příslušnými indexy). Citáty jsou vesměs doslovné. Citáty (O_1), (O_2), (O_3), (O_4), (O_5), (O_7) následují v „Odpovědi" bezprostředně po sobě; přečte-li si je tedy čtenář tak, jak po sobě jdou, dostane přesné znění asi první poloviny „Odpovědi" prof. Rádla.**

za zbytečné připomínati v recensi, určené odborníkům, tuto známou okolnost a proto napsal: „Výraz ten $\left(\text{totiž } \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}\right)$, jak na prvý pohled patrno, je rovný $x - 1$“, aniž se zmínil o tom, že pro hodnotu $x = 2$, která nepřichází při zmíněné limitní úvaze vůbec v úvahu, tato rovnost neplatí. Prof. Rádl chytil se této úmyslné stručnosti[2]) prof. Petra a obrací ji proti němu, jakoby snad prof. Petr nevěděl, že zlomek $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ nemá pro $x = 2$ smyslu. Tato výtka prof. Rádla prof. Petrovi je zřejmě uměle zkonstruována; zároveň je to však jediná námitka z „Odpovědi“ prof. Rádla, která má vůbec nějaký smysl; všechny ostatní konkrétní námitky jsou naprosto bezpodstatné a není možno při nejlepší vůli nalézti v nich zrnka oprávněnosti.

Vyslovil jsem se právě velmi ostře o „Odpovědi“ prof. Rádla. Takový výrok ovšem potřebuje důkazu a tento důkaz provedu nyní co nejobšírněji, opíraje se o jednotlivé body „Odpovědi“.

„Odpověď“ prof. Rádla začíná takto:

(O_1) Budiž především připomenuto, že prof. Petr v domnění, že vytýká mi jisté chyby, sám učinil v recensi tyto nesprávné úsudky: Na str. 84 sh. prof. Petr mi vytýká, že uvažuji při výkladu o limitě výraz $\lim \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ pro $x = 2$ a praví: „Výraz ten, jak na prvý pohled patrno, je rovný $x - 1$; proč neuvažuje p. autor raději tento výraz ..., zůstane .. . záhadou.“ Prof. Petr tím, že tvrdí, že zlomek $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ rovná se $x - 1$, tvoří úsudek nesprávný, neboť uvažovaný zlomek nemá pro $x = 2$ hodnotu, nýbrž pouze limitu, což neplatí o $x - 1$; oba výrazy liší se v bodu $x = 2$, kterážto okolnost je právě hlavní myšlenkou celého odstavce v učebnici.

(O_2) A tak prof. Petr, snaže se dokázati, že nesprávně užívám nuly, sám v recensi této chyby se dopustí, ačkoli tuto chybu o něco dále takto kritisuje: „Takovýmto výkladem (totiž nesprávným užíváním nuly) ruší se ve studentech matematické vzdělání dosažené na střední škole.“ I kdyby prof. Petr byl se vyhnul nesprávnému svému užití nuly, byla by výtka o uvažování hořejšího zlomku pro $x = 2$ nepochopitelná, poněvadž většina učebnic pro techniky zlomky tohoto druhu při výkladu o limitě uvažuje, a to právem.

Příslušné místo v kritice prof. Petra (str. 83 dole až 84 nahoře) zní takto:

(K_1) Dále volí p. autor příklad daný výrazem

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}.$$

Výraz ten, jak na prvý pohled patrno, jest rovný $x - 1$; proč neuvažuje p. autor raději tento výraz jednodušší místo onoho složitějšího při objasňování pojmu limity, zůstane čtenáři matematicky neškolenému záhadou. Naskytne se ovšem p. autorovi při tom příležitost zavésti symbol 0/0, který v matematice na logickém uvažo-

[2]) Čtenář pochopí tedy, proč v následujícím rozboru „Odpovědi“ budu postupovati daleko obšírněji, než by vlastně při látce tak elementární bylo vhodno.

(K_1) vání založené jakožto bezvýznamný se vylučuje, a dále zavésti nevhodné (podle mého mínění) pojmenování „výraz neurčitosti“; avšak na tyto věci podružného významu měl autor času dosti a také jim věnoval později jeden odstavec.

K tomu poznamenávám: limita[3]) $\lim\limits_{x=a} f(x)$ nezávisí, jak známo, na hodnotě $f(a)$;[4]) při počítání limity $\lim\limits_{x=2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ mohu se tedy omeziti na hodnoty $x \neq 2$; pro všechny tyto hodnoty jest však $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} =$ $= x - 1$. Je tedy jedno, vyšetřuji-li limitu $\lim\limits_{x=2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ nebo $\lim\limits_{x=2} (x - 1)$. V kritice, určené odborníkům a uveřejněné v odborném časopise, bylo by zajisté zbytečným ztrácením místa tuto okolnost (známou z každé řádné úvodní přednášky z analysy) obšírně vytýkati. V (K_1) nejde tedy o chybu, nýbrž o stručnost, vhodnou a nutnou v odborné recensi, nemá-li se taková recense rozrůsti v celou knihu. Tím by byla námitka prof. Rádla vyřízena; prof. Petr však v (K_1) tvrdí, že něco v příslušném výkladu prof. Rádla „zůstane čtenáři matematicky neškolenému záhadou“. Abychom plně ocenili vhodnost této poznámky, musíme si všimnouti, jak vypadá příslušné místo v „Učebnici“; to zní takto (str. 30):

(U_1) Racionální funkce $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ nabývá pro $x = 1$, 1·5, 1·7, 1·9 hodnot $y = 0$, 0·5, 0·7, 0·9; čím více x se blíží 2, tím více y se blíží 1. Hodnotě této se můžeme blížit i s druhé strany a dosazovat pro $x = 3$, 2·5, 2·3, 2·1, načež $y = 2$, 1·5, 1·3, 1·1. Dosadíme-li konečně pro $x = 2$, obdržíme výraz 0/0, který nám o skutečné hodnotě zlomku pranic nepraví a sluje výraz neurčitosti. Krácením obdržíme $y = x - 1$, načež pro $x = 2$ jest $y = 1$, takže

$$\lim_{x=2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1.$$

Klasický příklad! Prof. Rádl počítá pro $x = 1$, 1·5, 1·7, 1·9, 3, 2·5, 2·3, 2·1 hodnoty y z výrazu $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$, ač pro tyto hodnoty x mohl krátit; potom najednou řekne: krácením obdržíme $y = x - 1$, načež dosadí do tohoto výrazu onu jedinou hodnotu $x = 2$, pro kterou toto krácení není dovoleno a napíše rovnici

$$\lim_{x=2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1.$$

Podotýkám, že v „Učebnici“ nikde nestojí definice limity a že čtenář si pouze na základě několika příkladů[5]) (jsou to příklady na str. 28—31, jedním z nich jest právě (U_1)) má pojem limity sám vytvořiti; čtenář nemůže tedy ještě na př. věděti, že při vyšetřování limity $\lim\limits_{x=a} f(x)$ nezáleží na hodnotě $f(a)$. Zhoubný účinek takových míst, jako je (U_1), na nezkuše-

[3]) Jakož i okolnost, zda tato limita existuje čili nic.
[4]) Ani na tom, je-li $f(a)$ vůbec definováno čili nic.
[5]) A snad také na základě svých vědomostí ze střední školy.

ného čtenáře jest samozřejmý. Mimo to čtenáři matematicky neškolenému zůstane jistě záhadou, proč se v (U_1) nekrátí hned ze začátku, nýbrž až uprostřed, po namáhavém osmerém dosazení![6]) Po tomto rozboru mohu se zdržeti úsudku o útoku, obsaženém v odstavci (O_2); čtenář si jej již sám označí případným slovem.

Při této příležitosti poznamenávám, že odstavec (O_1) právě rozebraný jest největším úspěchem celé „Odpovědi" prof. Rádla. Kdybychom se totiž postavili na neobvyklé a nesmyslné stanovisko, že v odborné recensi se mají vytknouti obšírně všechny okolnosti, i takové, které každý odborník zná nazpaměť již od prvního semestru svých studií, musili bychom připustiti, že prof. Petr místo slov: „Výraz ten, jak na první pohled jest patrno, jest rovný $x - 1$" měl říci: „Výraz ten, jak na první pohled jest patrno, jest rovný $x - 1$ pro všechny hodnoty x, vyjma pro hodnotu $x = 2$, na které zde nezáleží."[7]) Za to při ostatních námitkách prof. Rádla nelze při nejlepší vůli nalézti stanovisko, s kterého by se tyto námitky jevily ne-li oprávněnými, tedy aspoň vysvětlitelnými. Čtenář to uvidí v dalším.

Prof. Rádl pokračuje ve své „Odpovědi" takto:

(O_3) Na str. 83 zd. prof. Petr, vytýkaje mi, že špatně vykládám význam relace $\lim (3 + 2/x)$ pro $x \to \pm\infty$, neuvědomuje si, že za nesprávné pokládá, co současně sám tvrdí.

Příslušné místo v recensi prof. Petra jest (str. 83 dole):

(K_2) V následujícím jest několik příkladů ze středoškolské látky a potom p. autor praví: „Stůjtež zde ještě tyto příklady

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) = 3,$$

což značí: Dosazujeme-li za x čísla nejdříve na př. kladná stále rostoucí, obdržíme výsledek větší než 3, avšak ke 3 stále se zmenšující; podobně atd." Výraz $3 + 2/x$ má sice vlastnosti, jež p. autor zde symbolu $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ přičítá, nikoliv však symbol limitní v rovnici použitý. Čtenář nesprávným stilisováním opět jest sváděn z pravé cesty.

Pro jistotu uveďme ještě příslušné místo z „Učebnice" (str. 29 dole):

(U_2) Stůjtež zde ještě tyto příklady:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) = 3,$$

což značí: Dosazujeme-li za x čísla nejdříve na př. kladná stále rostoucí, obdržíme výsledek větší než 3, avšak ke 3 stále se zmenšující; podobně dosazením za x čísel záporných absolutně stále rostoucích dostáváme výsledky stále menší než 3, avšak stále více ke 3 směřující.

---

[6]) Při čemž se vesměs dosazují hodnoty, pro něž to krácení je přípustno!

[7]) Ovšem: postavíme-li se na toto stanovisko, musíme tím spíše žádati obšírné vytčení všech závažných okolností v učebnici pro začátečníky; a tomuto požadavku citát (U_1) naprosto nevyhovuje. (Poznamenávám, že citované místo (U_1) jest vůbec první místo v „Učebnici", kde se čtenář setkává s t. zv. „neurčitým výrazem".) Prof. Rádl nikde v (U_1) nepoučí čtenáře, proč může — místo aby počítal limitu výrazu $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ pro

Je vidět, že prof. Rádl odstavci (K_2) vůbec neporozuměl. Rovnice

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

neznačí nic více a nic méně než toto: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kladné číslo A tak, že pro všechna x, pro něž platí $|x| > A$, jest $|f(x) - a| < \varepsilon$. Specielně tedy rovnice

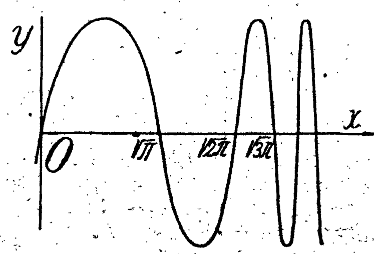
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) = 3 \qquad (1)$$

neříká nic jiného, než že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kladné číslo A tak, že pro všechna x, pro něž platí $|x| > A$, jest $\left|\left(3 + \frac{2}{x}\right) - 3\right| < \varepsilon$. O ostatních vlastnostech funkce, stojící za znamením limitním, neříká rovnice (1) vůbec nic; neříká tedy také na př. nic o tom, zda funkce $3 + 2/x$, stojící za znamením limitním, jest klesající pro rostoucí kladná x (ač tato funkce náhodou tuto vlastnost má). Vždyť přece pro funkci $3 + \frac{\sin x}{x}$ platí také rovnice

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3 + \frac{\sin x}{x}\right) = 3,$$

ačkoliv funkce $3 + \frac{\sin x}{x}$ není pro kladná x klesající, nýbrž má nekonečně mnoho oscilací. Prof. Petr má plnou pravdu, tvrdí-li, že prof. Rádl přisuzuje symbolu $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ vlastnosti, kterých tento symbol nemá. Tato nepřesná stylisace je tím nebezpečnější, že příklad v (U_2) jest jedním z příkladů, z nichž si má čtenář utvořiti představu o pojmu limity. Čtenář si teď už sám utvoří mínění o poznámce prof. Rádla, že prof. Petr, vytýkaje mu tuto chybu, „za nesprávné pokládá, co současně sám tvrdí."

Citát (U_2) spolu s citátem (O_2) z „Odpovědi" svádí přímo k domněnce, že prof. Rádl si vůbec řádně nepromyslil smysl pojmu „limita". Na tuto dalekosáhlou otázku si vskutku netroufám odpověděti; raději uvedu ještě jeden příklad, který velmi jasně ukazuje, jak prof. Rádl zachází s pojmem limity. V Učebnici na str. 67 stojí:



Obr. 69.

$x = 2$ — prostě dosaditi přímo hodnotu $x = 2$ do zkráceného výrazu $x - 1$, ač krácení právě pro tuto hodnotu není dovoleno.

Podotýkám ještě, že v (K_1) prof. Petr praví „zůstane čtenáři matematicky neškolenému záhadou", kdežto prof. Rádl cituje v (O_1) zkráceně „zůstane . . . záhadou", což ovšem má zcela jiný smysl.

(U_3) Čára $y = \sin x^2$ (obr. 69) protíná osu x v bodech $x^2 = 0$, π, $2\pi \dots n\pi$ čili $x = 0$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{2\pi} \dots \sqrt{n\pi}$; vzdálenost dvou posloupných průsečíků $\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}$ je čím dále tím menší, neboť

$$\lim_{n=\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Tedy: prof. Rádl správně tvrdí, že číslo $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ je čím dále tím menší[8]), čili, že posloupnost o obecném členu $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) je klesající (jinak tomu přec nelze rozuměti?). Prof. Rádl však tvrdí — a to je hrubá chyba — že toto tvrzení plyne z rovnice

$$\lim_{n=\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0. \tag{2}$$

Proč to plyne? Protože limita výrazu $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ rovná se nule? Nebo snad proto, že limita výrazu $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ rovná se limitě klesajícího výrazu $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$? To by potom posloupnost o obecném členu $\frac{2 + (-1)^n}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), t. j. posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{6}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \dots$ musila býti také klesající, neboť

$$\lim_{n=\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

kdež posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ jest klesající. Okolnost, že výraz $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ klesá s rostoucím n, neplyne z limitní rovnice (2), nýbrž z rovnice

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \tag{3}$$

platné pro každé n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Z rovnice (3) plyne ovšem rovnice (2), z rovnice (2) neplyne však rovnice (3), zrovna tak, jako z rovnice

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ neplyne rovnice } \frac{2}{n} = \frac{1}{n}.\,^{9})$$

Citované místo (U_3) je však poučné ještě s jiného hlediska. V předmluvě ke své „Učebnici" praví prof. Rádl mimo jiné, že „posluchač techniky nenabude důvěry v metody mu vykládané jich obecným dokazováním, nýbrž tím, že jich prakticky na speciálních příkladech s úspěchem užívá" a dále, že „nejlepší důkaz všeobecný jest proň grafické znázornění, poněvadž tu vidí tvrzení jako skutečnost". Citát (U_3) obsahuje speciální příklad a grafické znázornění; očekávali bychom tedy podle citovaných míst z předmluvy, že bude zvláště pečlivě proveden. Místo toho — vedle již vytčeného nesprávného usuzování, připínajícího se k rovnici (2) — najdeme v něm na první pohled ještě jednu hrubou chybu. Funkce $\sin x^2$ je funkce sudá, neboť $(-x)^2 = x^2$ a tedy $\sin (-x)^2 = \sin x^2$; tedy je tato funkce kladná nejenom pro $0 < x < \sqrt{\pi}$, nýbrž i pro $-\sqrt{\pi} < x < 0$ (a mimo to ovšem

---

[8]) Vynechávám činitele $\sqrt{\pi}$, jenž pro další úvahu nemá důležitosti.

[9]) Či chtěl snad prof. Rádl slovy, že výraz $\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}$ je čím dále tím menší, říci, že limita tohoto výrazu rovná se nule, a nechtěl tím říci nic méně a nic více? Potom by ovšem jeho důkaz byl správný, celé citované místo (U_3) bylo by však dokladem bezpříkladné nedbalosti ve vyjadřování.

i v jiných intervalech). V bodě $x = 0$ má tedy funkce $\sin x^2$ relativní minimum, křivka $y = \sin x^2$ dotýká se v počátku osy x. Podíváme-li se však na obr. 69, jejž zde otiskuji, nevidíme na něm v počátku ani relativní minimum ani dotyk, nýbrž něco docela jiného! Mimo to obsahuje (U_3) ještě jedno závažné opomenutí: prof. Rádl vůbec neuvádí průsečíky o úsečce $-\sqrt{\pi}, -\sqrt{2\pi}, \ldots$ Tak vypadá tedy provedení speciálního příkladu a grafického znázornění![10])

Prof. Rádl pokračuje:

(O_4) Z toho, že na str. 84 zd. vytýká, že užívám pro jednu a touž věc znamení $\rightarrow$ a znamení $=$, je patrné, že prof. Petr nevzal na vědomí moji definici symbolu $\rightarrow$. Lituje-li prof. Petr na str. 83, že takové věci se vyskytují v učebnicích, jest mi dvojnásob líto, že tyto věci jsou v recensích.

Příslušné místo v kritice prof. Petra:

(K_3) Při tom jsem věci významu podřízeného neuváděl, jako na př., že p. autor užívá pro jednu a touž věc různých označení, když píše pod znaménkem limitním jednou $n \rightarrow \infty$, po druhé $n = \infty$.

Zřejmě jde o věc, o které se prof. Petr zmínil jen mimochodem; ale i v této maličkosti má úplně pravdu, jak plyne z těchto příkladů:

Výklad o limitě začíná v „Učebnici“ na str. 28; tam najdeme tyto vzorce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \quad \left(S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty \quad (a > 1);$$

na str. 29 však ihned vidíme

$$\lim_{n = \infty} \frac{O_n}{2r} = \lim_{n = \infty} \frac{O'_n}{2r} = \pi$$

[10]) V (U_3) jest však ještě několik maličkostí, jaké se sporadicky mohou vyskytovati i v dobrých knihách; uvedu je jen proto, abych ukázal, kolik nedokonalostí se vejde na tak málo místa. Jest především velmi nevhodno psáti nekonečnou posloupnost $0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi, \ldots$ takto: $0, \pi, 2\pi \ldots n\pi$. To může vésti k nejasnostem; mysleme si na př. tento výrok: „Budiž $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ konvergentní řada s reálnými členy; sestrojme horní hranici čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$.“ Kdybych užíval označení prof. Rádla, byl by tento výrok nejasný: nevěděl bych, jde-li o horní hranici prvních n členů nebo o horní hranici celé nekonečné posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Není dále vhodno vynechávati obvyklé čárky a místo $0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi, \ldots$ psáti prostě $0, \pi, 2\pi \ldots n\pi \ldots$: (prof. Rádl píše dokonce, jak jsme již řekli, $0, \pi, 2\pi \ldots n\pi$). I to může vésti k nejasnostem, na př. při posloupnosti $c_1, c_1c_2, \ldots, c_1c_2 \ldots c_n, \ldots$; vynecháme-li poslední tři čárky, dostaneme nejasný konglomerát písmen $c_1, c_1c_2 \ldots c_1c_2 \ldots c_n \ldots$ V učebnici pro začátečníky mělo by se přece zvláště dbáti jasné a určité symboliky. A ještě jedna maličkost: nanesete-li v obr. 69 vzdálenost bodů 0, $\sqrt{\pi}$ (píši jen úsečky těchto bodů, pořadnice jsou rovny nule) od bodu $\sqrt{\pi}$ napravo, nedospějete do bodu $2\sqrt{\pi} = \sqrt{4\pi}$, nýbrž téměř přesně do bodu, označeného $\sqrt{3\pi}$; nejde zde tedy asi o nepřesnost obrázku, nýbrž o omyl. To je tedy soupis nedokonalostí, obsažených v (U_3). Že je tam ještě také tisková chyba (Cára místo Čára), nelze ovšem p. autoru připsati k tíži.

(O_n resp. O'_n je obvod pravidelného n-úhelníku opsaného resp. vepsaného kružnici o poloměru r).

Podobný zmatek nacházíme při limitách funkcí; na str. 29—31 jsou napsány mimo jiné tyto limity:

$$\lim_{x=\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg} x, \quad \lim_{x=0} \operatorname{cotg} x, \quad \lim_{x=2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3x + 4}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{x}{x^2 + 1}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{x}{x + 1}.\text{[11]}$$

Jaký je v tom systém, je záhadou; jedině pro limitu funkce $f(x)$ v bodě a při konečném a užívá p. autor na str. 29—31 vždy symbolu $\lim\limits_{x=a} f(x)$; jinak se označení $n = \infty$, $n \to \infty$ a zrovna tak $x = \infty$, $x \to \infty$ střídají v pestrém nepořádku. Také se divím, že p. autor mluví v (O_4) o své definici symbolu $\to$; v tom, co svým čtenářům na str. 28—31 o limitě vypravuje, není přece ani stopy po nějaké definici.

Dosavadní omyly prof. Rádla v jeho „Odpovědi" byly snad vysvětlitelny jednak nedostatky jeho matematické erudice, jednak lidsky pochopitelnou snahou, aspoň některé výtky prof. Petra oslabiti. Co však čtenář nyní uvidí, je zcela jiného rázu; uvedu jen fakta a zdržím se jakéhokoli úsudku.

Odpověď prof. Rádla pokračuje takto:

(O_5) Na str. 88 sh. domnívá se prof. Petr nesprávně, jsou-li a, b čísla neúplná, Δa, Δb chyby s nimi spojené, že chyba v součinu ab jest $a\Delta b + b\Delta a$; přičítání korekce $\Delta a\Delta b$ je podle prof. Petra nepřípustné a odporuje úsudku. Z tohoto nesprávného usuzování prof. Petra vznikají v recensi další jeho nesprávné představy. Tyto věci se probírají na střední škole a na str. 88 pokládá prof. Petr „tuto okolnost za neodpustitelnou" a takto sebe sama kritisuje: „Takovýmto způsobem se studenti, kteří se během studií středoškolských naučili správně numericky počítat, tomu zase odnaučují."

Mimo to uvádím ještě toto místo z „Odpovědi" (umístěné v této „Odpovědi" na pozdějším místě):

(O_6) Vůbec prof. Petr našel (str. 89)[12]) v učebnici jediné nedopatření, že jsem totiž nezkrátil na dvě deset. místa číselný výsledek v jistém příkladu drobným tiskem uvedeném; za toto upozornění mu děkuji. Všechna ostatní kritika spočívá na volném uvážení prof. Petra, které bylo ovlivňováno shora uvedenými nesprávnými jeho úsudky.

Příslušná místa v recensi prof. Petra jsou tato (str. 87 dole až 88 nahoře).

(K_4) Upozorňuji ještě na odst. 27 nadepsaný „chyba neodvisle proměnné určená z chyby odvisle proměnné",*) ve kterém p. autor během výkladu směšuje dva pojmy: horní hranici pro abs. hodnotu chyby, které se dopouštíme, zavádíme-li místo přesné hodnoty a hodnotu a,**) a diferenciál veličiny a. Jsou to dva docela různé pojmy, pro něž jsou platny různé vztahy. O diferenciálu da zde p. autor mluví dokonce tak, jako by to byla veličina nule rovná.

---

[11]) Na str. 31 nacházíme dokonce $\lim \dfrac{x^2}{x+1}$, $\lim \dfrac{a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$ bez jakéhokoli bližšího označení — patrně opomenutí p. autora.

[12]) Správně má býti str. 88.

*) Ani nadpis, jak čtenář snadno postřehne, není prost nedopatření.

**) P. autor značí tu horní hranici Δa, takže jest

$$a - \Delta a < a < a + \Delta a.$$

(K_5) P. autor také místy provádí numerický výpočet. Uvedu na př. řešení rovnice $x^3 - 3{\cdot}60x^2 + 0{\cdot}51x + 3{\cdot}36 = 0$ pomocí funkcí trigonometrických. Praví „odstraňme koeficient členu kvadratického substitucí $x \mid x + 1{\cdot}2$, čímž obdržíme $x^3 - 3{\cdot}81x + 0{\cdot}52 = 0$; pro λ vypočteme hodnotu $2{\cdot}254$, načež $3\varphi = 10^0\,28'$," odkudž podle výpočtu p. autora následuje $\varphi = 3^0\,29'30''$, pročež „$\alpha_1 = \lambda \sin 3^0\,29'\,30'' + 1{\cdot}2 = 1{\cdot}3373$, $\alpha_2 = \lambda \cos 33^0\,29'\,30'' + 1{\cdot}2 = 3{\cdot}080$, $\alpha_3 = -\lambda \sin 63^0\,29'\,30'' + 1{\cdot}2 = -0{\cdot}817$. V tomto výpočtu má nejprve býti $\varphi = 3^0\,29'\,20''$, což jest celkem nepatrné nedopatření; avšak jest neodpustitelná v učebnici okolnost, že v transformované rovnic i správná hodnota $0{\cdot}516$ zkrácena byla na 2 desetinná místa na $0{\cdot}52$ a potom se počítají hodnoty kořenů na 3 až 4 cifry. Takovýmto způsobem se studenti, kteří se během studií středoškolských naučili správně numericky počítat, tomu zase odnaučují.

Tedy: v (O_5) mluví prof. Rádl o tom, že mu prof. Petr vytýká cosi o chybě součinu ab; ani v (K_4) ani nikde jinde v recensi prof. Petra nic takového není! V (O_6) přiznává prof. Rádl výslovně, že výtka prof. Petra v (K_5) jest oprávněná; ale odsudek „takovýmto způsobem se studenti, kteří se během studií středoškolských naučili správně numericky počítat, tomu zase odnaučují", který prof. Petr v (K_5) k této výtce připojil, neuvádí prof. Rádl v příslušném odstavci (O_6), nýbrž spojuje jej v (O_5) s vymyšlenou výtkou prof. Petra a říká, že tím prof. Petr „sebe sama kritisuje".

Nedivil bych se, kdyby mi čtenář nevěřil, že cituji správně; v tom případě jej prosím, aby si příslušná místa sám pročetl.

Po odstavci (O_5) následuje v „Odpovědi" tento odstavec:

(O_7) Na str. 89 praví prof. Petr, že „autor učebnice o funkcích s proměnnou komplexní v knize vůbec nemluví s výjimkou snad funkce e^{ix}, která se tam dostala nedopatřením p. autora." Poněvadž funkce e^{ix} několikrát užívám způsobem všude obvyklým, jest toto tvrzení prof. Petra nesprávností jeho vlastní.

Příslušné místo v recensi prof. Petra (str. 89 dole) jest:

(K_6) Mnohem složitější jsou vztahy u eliptických funkcí, neboť tu jest třeba, abychom mohli je definovati jako funkce dvojperiodické, zavésti funkce komplexní proměnné a o těch p. autor ve své knize vůbec nemluví (s výjimkou snad funkce e^{ix}, která se tam dostala nedopatřením p. autora).

Výtka prof. Petra — byť byla pronesena jen mimochodem a velmi stručně — jest oprávněná, protože prof. Rádl nezachází s funkcí e^{ix} správně, jak ihned ukáži. Výklad o funkci e^{ix} v „Učebnici" začíná takto (str. 120):

(U_4) **68. Formule Eulerova.** V § 32. uvažovali jsme relaci $y' = -ky$ a shledali jsme, že jí vyhovuje jediná funkce $y = y_0 e^{-kx}$. Pro $k = -i$ zní relace tato $y' = iy$ a vyhovuje jí funkce, která se derivováním až na faktor i nemění. Jest to funkce Ce^{ix}, též však funkce C (cos x + i sin x). Položme tedy $e^{ix} = C(\cos x + i \sin x)$; dosadíme-li pro $x = 0$, shledáme, že $C = 1$. Platí tedy relace formulí Eulerovou nazvaná

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \qquad (101)$$

Pro záporné x obdržíme $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ a jestliže obě tyto relace jednak sečteme, jednak odečteme, vznikají Eulerovy formule pro cos x, sin x

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \qquad (101)^*$$

Sečteme-li kvadráty rovnic (101)*, vznikne vztah

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} + \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{4i^2} = 1,$$

který vyjadřuje známou větu Pythagorovu v goniometrickém tvaru.
Povýšíme-li číslo e na mocnitele $i\,(x + y)$, můžeme psát dvě relace

(U_4)

$$e^{i(x+y)} = \cos(x + y) + i \sin(x + y),$$

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} \,.\, e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$
$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i\,(\sin x \cos y + \cos x \sin y);$$

porovnáním pravých stran (viz konec § 63) obdržíme známé součtové formule pro $\cos(x + y)$, $\sin(x + y)$, z nichž lze odvodit četné jiné relace (na př. pro $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos x \pm \cos y$, $\sin x \pm \sin y$ atd.).

Rozeberme tento citát. Jde zde o komplexní funkci reálné proměnné $\cos x + i \sin x$. Tato funkce hoví diferenciální rovnici $y' = iy$.[13]) Abychom dostali analogické označení jako při rovnici $y' = ky$ při reálném k, zavedeme nový znak e^{ix} rovnicí $C(\cos x + i \sin x) = e^{ix}$, při čemž klademe $C = 1$, abychom pro $x = 0$ dostali souhlas s reálným případem. Rovnicí (101) tedy teprve d e f i n u j e m e znak e^{ix} (vždyť dosud v „Učebnici" nebyla mocnina pro jiný než reálný exponent zavedena). Všechny vlastnosti této funkce musíme tedy teprve d o k á z a t i; tak musíme také dokázati, že platí vztah $e^{i(x+y)} = e^{ix} \,.\, e^{iy}$, obdobný vztahu $e^{x+y} = e^x \,.\, e^y$, známému již pro reálné x a y. (To je přec jasné: definuji-li funkci $f(x)$ rovnicí $f(x) = \cos x + i \sin x$, není přece nijak a priori jasno, že platí $f(x+y) = f(x) \,.\, f(y)$; to se musí teprve d o k á z a t.) Správný důkaz je jednoduchý: podle definice jest jednak

$$e^{i(x+y)} = \cos(x + y) + i \sin(x + y),$$

jednak (s použitím známých vztahů pro $\cos(x + y)$, $\sin(x + y)$)

$$\begin{aligned} e^{ix} \,.\, e^{iy} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i\,(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= \cos(x + y) + i \sin(x + y); \end{aligned}$$

tedy jest $e^{i(x+y)} = e^{ix} \,.\, e^{iy}$.

Postup v (U_4) jest právě opačný než správný postup právě uvedený. Prof. Rádl totiž napřed napíše (správně)

$$e^{i(x+y)} = \cos(x + y) + i \sin(x + y);$$

potom napíše rovnici

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} \,.\, e^{iy}$$

(neprávem, neboť ji dosud nedokázal) a konečně píše (opět správně)

$$e^{ix} \,.\, e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) =$$
$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i\,(\sin x \cos y + \cos x \sin y).$$

Že zde nejde o náhodné přehození řádků, nýbrž o chybný soud, je viděti

[13]) Proč p. autor bere v (U_4) rovnici $y' = -ky$ a klade potom $k = -i$, místo aby vzal jednodušeji rovnici $y' = ky$ a dosadil $k = i$, nevím; v § 32b přece rovnici $y' = ay$ vyšetřuje. Derivace k o m p l e x n í funkce reálné proměnné nebyla sice v „Učebnici" před § 68 zavedena, nelze však p. autoru zazlívati, že jí zde užívá; jde o zcela jednoduché zobecnění, které si čtenář sám snadno doplní. Ve funkci e^{ix} se předpokládá x reálné, což nebudu v dalším podotýkati.

z toho, že prof. Rádl se domnívá, že svým postupem odvodil znovu formule pro cos $(x + y)$, sin $(x + y)$, ač při správném důkazu by byl musil naopak právě formulí pro cos $(x + y)$, sin $(x + y)$ použíti k odvození rovnice $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$.[14]) Prof. Petr byl tedy právem s tímto místem nespokojen. Doufám, že způsob, jakým prof. Rádl zachází s funkcí e^{ix}, není „všude obvyklý"; na př. v elementární učebnici J. Vojtěcha „Základy matematiky" (3. vyd., část 1, str. 306) mohl si prof. Rádl přečísti správný důkaz vzorce $e^{i(x+y)} = e^{ix} . e^{iy}$.

Další odstavec „Odpovědi" je vyplněn osobními útoky na prof. Petra, na Jednotu československých matematiků a fysiků atd.; nebudu se jím proto zde zabývati.[15]) Odstavec následující obsahuje výtky všeobecného rázu: prof. Rádl vytýká prof. Petrovi hledisko, podle něhož „Učebnici" posuzoval. Na konci tohoto odstavce je však jedna konkrétní námitka, kterou se proto budu zabývati. Prof. Rádl totiž praví:

(O_8) { Ostatně je úsudek prof. Petra na str. 86 v příkladu o spojitosti nesprávný.

Příslušné místo v recensi (str. 86 dole) jest:

(K_7) { Matematický výklad má býti vzorem k přesnému vyjadřování; jak tento vzor vypadá v „Učebnici" jest patrno, abych volil jeden příklad z mnohých, na výkladu pojmu spojité funkce, který podává p. autor v odst. 39 na konci svého výkladu o derivaci, ačkoliv ho dříve již používal. Celý ten výklad (incl. definice) spočívá v těchto dvou větách: „Doposud jsme předpokládali graf funkce vždy souvislý či spojitý, kontinuitní, takže, zvětší-li se (zmenší-li se) x o velmi malý obnos, změní se (zvětší neb zmenší) y též o velmi malý obnos. Průběh zjevů přírodních děje se zpravidla spojitě; tak na př. dráha nemůže při velmi malé změně doby změnit se náhle o konečný obnos, nýbrž změní se též o velmi málo. Pravíme v tom případě, že příroda nedělá skoků." Pokládáme-li tedy číslo $1 . 10^{-6}$ za veličinu velmi malou, jest podle p. autora funkce (x budiž $\geqq 0$)

$$y = 10^{-6} . E(10^6 x),$$

$E(z)$ jest největší celé číslo obsažené v z — funkcí spojitou.

Citovat ještě příslušné místo z „Učebnice" není nutno, ježto v (K_7) je příslušné místo doslovně reprodukováno (viz „Učebnici", str. 73). Nechápu, jak mohl prof. Rádl nerozuměti tomuto tak jasnému odstavci (K_7). Citované místo z „Učebnice" nedává přesné definice spojitosti, poněvadž výraz „velmi malý obnos" není dosti přesný. Kdybychom si chtěli tuto definici zpřesniti na př. tím, že bychom se smluvili, že číslo 10^{-6} (a ovšem též každé číslo, jehož absolutní hodnota nepřesahuje 10^{-6}) budeme považovati již za „velmi malý obnos", musili bychom funkci[16])

$$y = 10^{-6} E(10^6 x)$$

považovati za spojitou; neboť změní-li se x nejvýše o 10^{-6}, změní se y zřejmě též nejvýše o 10^{-6} (prof. Petr nemusil se omezovati na $x \geqq 0$; snad si myslil, že mu prof. Rádl spíše porozumí, vyhne-li se záporným hodnotám). Prof. Petr chtěl jen ukázati, k jakým absurdnostem může vésti nedostatečná

[14]) Táž chyba se vyskytuje ostatně též již o něco dříve při umocňování pravých stran rovnic (101)*.

[15]) Viz ostatně odpověď prof. Bydžovského, jež vyjde co nejdříve ve Strojnickém obzoru.

[16]) $E(z)$ je definováno takto: $E(z)$ jest ono celé číslo, jež splňuje nerovnosti $E(z) \leqq z < E(z) + 1$.

definice. Či myslí snad prof. Rádl, že prof. Petr tvrdí, že funkce $10^{-6} E(10^6 x)$ je doopravdy spojitá?

Další odstavec obsahuje opět osobní útoky na prof. Petra. Teprve odstavec následující obsahuje zase konkrétní poznámky. Začíná pak tento odstavec takto:

(O_9) Řadu dalších nedopatření v recensi — zde uvedena pouze typická — hodlám z nedostatku místa uvésti ve zvláštní přednášce v JČM. Zde budiž ještě uvedeno, že nerovnost na str. 88 jako nesprávná vytýkána jest v souhlasu s obrazcem v textu citovaným a tudíž správná.

Ostatek tohoto odstavce „Odpovědi" citoval jsem již v (O_6). Místo v recensi, jehož se odstavec (O_9) týká, jest toto (str. 85, nikoliv str. 88):

(K_8) V odst. 42 na str. 77 uvažuje p. autor zavedení určitého integrálu pro libovolnou funkci. Definuje integrál jakožto plochu a dospívá názorem k těmto nerovninám[17])

$$h\,[f(a) + f(a + h) + \ldots + f(a + \overline{n-1}\,h)] < p < h\,[f(a + h) + f(a + 2h) + \ldots + (a + nh)].$$

Za p pak zavede jakožto limitu

$$p = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Nerovniny vypsané jsou však nesprávné a jsou platny pouze pro funkce rostoucí. Tedy i při užívání názoru geometrického nepodařilo se p. autorovi dáti bezvadným postupem definici integrálu.

Příslušné místo v „Učebnici" jest (str. 77):

(U_5) **42. Zevšeobecnění na libovolnou funkci.** Jest vypočísti obsah obdélníku seříznutého danou křivkou. Abychom určili plochu p omezenou jednak libovolnou čarou $y = f(x)$ v intervalu $a \ldots b$ spojitou a nad osou x procházející (obr. 82),[18]) jednak pořadnicemi $f(a)$, $f(b)$ dvou jejích bodů A, B, jednak osou x, rozdělme úsečku $\overline{AB}$ opět na n dílů o velikosti $\dfrac{b-a}{n} = h$ a sestrojme opět nad jednotlivými díly obdélníky ploše vepsané a opsané. Pak je sevřen obsah p ve dvě meze

součet obdélníků vepsaných $< p <$ součet obdélníků opsaných,

$$h\,[f(a) + f(a + h) + \ldots + f(a + \overline{n-1}\,h)] < p < h\,[f(a + h) + f(a + 2h) + \ldots + f(a + nh)], \tag{62}$$

jichž rozdíl je $[f(b) - f(a)]\,.\,h$.

Tedy prof. Rádl tvrdí toto: vezmu-li libovolnou funkci $f(x)$, spojitou a kladnou v intervalu $a \ldots b$ a označím-li písmenem p plochu, omezenou čarou $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ a úsečkami přímek $x = a$, $x = b$, $y = 0$, potom platí nerovnosti (62). To je zřejmě nesprávné: nerovnosti (62) jsou správné, je-li $f(x)$ rostoucí, ale nesprávné, je-li $f(x)$ na př. klesající v intervalu $a \leq x \leq b$. Na tom nic nemění okolnost, že nerovnosti (62) jsou náhodou správné pro tu křivku, kterou si prof. Rádl vybral pro obr. 82; textu v (U_5)

[17]) Otiskuji i s tiskovou chybou: místo $(a + nh)$ má býti $f(a + nh)$.

[18]) Obr. 82 v „Učebnici" je běžný obrázek: je na něm nakreslena křivka $y = f(x)$ (kdež $f(x)$ je na obrázku rostoucí) a mimo to obvyklé vepsané a opsané obdélníčky.

jest přece možno rozuměti jen tak, že nerovnosti (62) platí pro libovolnou funkci $f(x)$, jež je spojitá a kladná pro $a \leq x \leq b$, a to není pravda.

Po odstavcích (O_9), (O_6) končí prof. Rádl svou „Odpověď" krátkým odstavcem, v němž praví, že i jiné naše učebnice matematiky byly kritikou ostře odsouzeny, plní však přes to svůj úkol; prof. Rádl očekává, že i jeho kniha svůj úkol vyplní.

Na konec musím uznati, že jedna věta v „Odpovědi" prof. Rádla jest úplně správná; jest to tato věta z (O_6): „Všechna ostatní kritika spočívá na volném uvážení prof. Petra." „Učebnice" prof. Rádla hemží se totiž tolika chybami, že se prof. Petr nemohl ve své recensi všemi zabývati a musil proto vybrati jen některé, které se mu podle jeho volného uvážení zdály zvláště charakteristické.

Dovolím si ještě připojiti malé résumé toho, co jsme na předcházejících stránkách zjistili. Knihu prof. Rádla posoudil a odsoudil důkladně prof. Petr ve své recensi; v tomto článku jsem se zabýval proto hlavně pouze odpovědí prof. Rádla a jeho knihy jsem si všímal většinou pouze potud, pokud to bylo k rozboru „Odpovědi" nutno. Čtenář by byl čekal, že autor, který konkrétně odpovídá k odmítavé recensi své knihy, si důkladně rozváží, co do své odpovědi napíše; místo toho jsme zjistili, že „Odpověď" prof. Rádla se skládá po stránce matematické z nepřetržité řady omylů[19]); námitky prof. Rádla v (O_3), (O_4), (O_5), (O_7), (O_8), (O_9) jsou naprosto bezpodstatné a je prostě nepochopitelno, jak je prof. Rádl vůbec mohl napsati. Ani námitku prof. Petra proti citátu (U_1) prof. Rádl neoslabil; využil však stručnosti recense prof. Petra k umělému sestrojení námitky v odst. (O_1), (O_2). Dokonce nebyl ani tak pečlivý, aby si při psaní své odpovědi zkontroloval, co v recensi prof. Petra je a co tam není: a tak se mu stalo, že v (O_5) vytýká recensi prof. Petra něco, co v ní vůbec nestojí. Naprostý nedostatek věcných důvodů za to plně vynahradil sebevědomým a útočným slohem, kterým jest jeho odpověď napsána. *V. Jarník.*

Prohlášení.

V 61. ročníku „Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky" sešit 2, str. 81—90, otiskl prof. K. Petr posudek knihy prof. Fr. Rádla „Učebnice matematiky pro vysoké učení technické", v němž tuto knihu po důkladném rozboru rozhodně odsoudil. Prof. Rádl snažil se vyvrátiti některé námitky prof. Petra v článku: „Odpověď k recensi prof. Petra . . ." (Strojnický obzor, ročník 11, č. 23, str. 471—472). Podepsaní prohlašují, nepouštějíce se na tomto místě do podrobností, že úplně souhlasí se zamítavým stanoviskem prof. Petra, ohražují se však zároveň jménem matematické veřejnosti proti tomu, aby na věcnou a vážnou recensi bylo odpovídáno způsobem tak nevážným a místy urážlivým, jak to učinil ve své „Odpovědi" prof. Rádl.

Profesoři matematiky na českých universitách a českých vysokých školách technických v Praze a v Brně:

B. Bydžovský, E. Čech, K. Čupr, K. Dusl, V. Hlavatý, J. Hronec, V. Hruška, J. Janko, V. Jarník, J. Klobouček, M. Kössler, V. Láska, K. Rychlík, L. Seifert, E. Schoenbaum, J. Svoboda, J. Vojtěch.

[19]) Vyjmeme-li citát (O_6), v němž prof. Rádl uznává příslušnou výtku prof. Petra.

B. Přehled původních publikací českých matematiků a fysiků.

O. Borůvka: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přírod. fakulty Masarykovy univ. č. 146. Stran 40, Brno, 1931.

Studují se křivky v eukl. čtyřrozm. prostoru, jejichž všechny křivosti jsou konstantní a jisté plochy, na něž se při tom přijde.

O. Borůvka: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. 193, p. 633.

Souhrn hlavních výsledků hořejší práce.

K. Čupr: Použití Schlömilch-Pringsheimova integrálu při sčítání podmíněně konvergujících řad. (Sborník č. vys. školy technické v Brně. Svazek V., spis 21.) Pomocí uvedeného integrálu sečteny řady vzniklé některými transformacemi druhého druhu (Math. An., XXII. p. 462, Pringsheim: Umordnungen zweiter Art) z dané řady podmíněně konvergující.

V. Hlavatý: Projektive Invarianten einer Kurvenkongruenz und einer Kurve. (Mathematische Zeitschrift, Band 34, 1931. 58—73.) Studium differenciálních invariantů křivek a kongruencí vzhledem k transformacím konnexe, které zachovávají geodetické čáry.

V. Hlavatý: Sur les courbes des variétés non-holonomes. (Rendiconti della r. accademia dei Lincei. Vol. XII., serie 6., 1930. 647—654.) Studium asymptotických a geodetických čar an-holonomních variet.

V. Jarník: Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass. Recueil mathématique de la Société Mathématique de Moscou, sv. 36, str. 371—382.

Budiž $a > 2$; M_a budiž množství oněch čísel ϑ, pro něž nerovnost $\left|\vartheta - \frac{p}{q}\right| < q^{-a}$ má nekonečně mnoho řešení v celistvých číslech p, q. Potom platí: dimense množství M_a (ve smyslu Hausdorffově) jest $2/a$.

V. Jarník: Über die simultanen diophantischen Approximationen, Mathematische Zeitschrift 33 (1931), str. 505—543.

Zostření výsledků předešlého pojednání; zobecnění na simultanní aproximace; existenční věty o simultanních aproximacích.

V. Jarník: Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions. Věstník Král. čes. spol. nauk, 1930, č. 6, str. 1—11.

Budiž $P(x)$ známá zbytková funkce pro racionální k-rozměrný elipsoid ($k \geqq 5$). Posloupnost $P(x) : x^{\frac{1}{2}k-1}$ ($x = 1, 2, \ldots$) má nekonečně mnoho bodů zhuštění.

V. Jarník: Sur une fonction arithmétique. Věstník Král. čes. spol. nauk, 1930, č. 7, str. 1—13.

Asymptotické vzorce pro $\sum_{x=1}^{y} P^2(x)$ (označení a předpoklady stejné jako v předešlé práci).

V. Jarník: Bolzanova „Functionenlehre". Časopis, sv. 60 (1931), str. 240—262.

Miloš Neubauer: „Über die partiellen Derivierten unstetiger Funktionen", Monatshefte für Mathematik und Physik, sv. 38, (seš. 1), str. 139—146.

J. Zahradníček: Nová metoda měření radiace látek radioaktivních. Spisy přír. fak. Masarykovy univ. č. 138. Str. 16. 1931.

J. Zahradníček: Messung der Aktivität der radioaktiven Substanzen mittels der Drehwage. Phys. Zs. *32*. 630. 1931.

V těchto pracích popisuje autor metodu k měření aktivity radioaktivních preparátů Coulombovými torsními vážkami v kovovém krytu, při čemž preparát je vně krytu. Autor udává dále vzorec pro silové působení preparátu na váhy.

J. Zahradníček: Bemerkungen zum Aufsatz: „Resonanzmethoden für die Bestimmung der Gravitationskonstante *G*" von Jakob Kunz. Phys. Zs. *32*, 149. 1931.

Krátká poznámka, v níž autor opravuje některé chyby Kunzovy práce.