Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.

Píše **M. Lerch** v Brně.

(Pokračování.)

4.

Podobnou roli jako polynomy $G_\nu(a)$ hrají polynomy $C_\nu(a)$ stanovené rozvojem

$$\frac{1}{a - \log(1+z)} = \sum_0^\infty \frac{C_\nu(a)}{\nu!} z^\nu, \tag{12}$$

při čemž a je realná veličina kladná, již dlužno předpokládati ne menší než log 2, aby součinitelé $C_\nu : \nu!$ zůstávaly pod stálou mezí. Jejich výpočet vychází bezprostředně z identity

$$a \sum_0^\infty \frac{C_n}{n!} z^n = \sum_1^\infty (-1)^{\mu-1} \frac{z^\mu}{\mu} \sum_0^\infty \frac{C_\nu}{\nu!} z^\nu,$$

jež podává vzorec rekurentní

$$a\, C_n(a) = \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu-1} (\mu - 1)! \binom{n}{\mu} C_{n-\mu}(a), \quad C_0(a) = \frac{1}{a}; \tag{13}$$

polynomy jsou celistvé vůči proměnné $\frac{1}{a}$; zvláštní případ[*]) $a = 1$ dává hodnoty

$$C_0 = 1 = C_1 = C_2,\ C_3 = 2,\ C_4 = 4,\ C_5 = 14,\ C_6 = 38,$$
$$C_7 = 216,\ C_8 = 600,\ C_9 = 6240,\ C_{10} = 9552,\ C_{11} = 319216,$$
$$C_{12} = -519312, \ldots$$

Těchto veličin chceme užiti ke stanovení integrálu

$$J = \int_0^u e^{vx} \frac{dx}{a+x} = e^{-av} \{ li\,(e^{av+uv}) - li\,(e^{av}) \}, \tag{14}$$

při čemž na pravé straně se vyskytující výrazy $li\ e^w$ mají ob-

*) Polynomů těch jsem za podobným účelem užíval v práci: „Über einige Entwicklungen auf dem Gebiete der unvollständigen Euler'schen Integrale zweiter Art (Journ. f. die reine und angew. Mathematik, Bd 128; 1904).

vyklý význam t. zv. integrálu logarithmického (logarithmo-integrál)

$$li(e^{\omega}) = \text{val. princ.} \int_{-\infty}^{\omega} e^{x} \frac{dx}{x},$$

a správnost rovnice (14) vychází derivováním vůči u a z okolnosti, že obě strany vymizí současně s u. Veličina v může míti jakékoli znamení, kdežto u musí zůstati kladné.

Abychom integrál (14) jinou cestou vyjádřili, položme ve (12) $z = e^{-x} - 1$, čímž se objeví

$$\frac{1}{a+x} = \sum_{0}^{\infty} \frac{C_{\nu}(a)}{\nu!} (e^{-x} - 1)^{\nu},$$

a odtud

$$J = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{C_{\nu}(a)}{\nu!} \int_{0}^{u} e^{vx} (1 - e^{-x})^{\nu} dx. \qquad (14^{a})$$

Abychom integrály na pravé straně přehledně vyjádřili, zaveďme pojem *zpětných* differencí, stanovený rovnicí $\delta f(v) = f(v) - f(v-1)$, $\delta^2 f(v) = \delta f(v) - \delta f(v-1), \ldots$; vychází pak z rovnice

$$\int_{0}^{u} e^{vx} dx = \frac{e^{uv} - 1}{v} = f(v)$$

patrně

$$\int_{0}^{u} e^{vx} (1 - e^{-x})^{\nu} dx = \delta^{\nu} f(v),$$

a tak nacházíme rozvoj

$$e^{-av} li(e^{(a+u)v}) - e^{-av} li(e^{av}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{C_{\nu}(a)}{\nu!} \delta_v^{\nu} \left(\frac{e^{uv} - 1}{v}\right). \qquad (15)$$

Při užívání tohoto vzorce dlužno pro funkci

$$f(x) = \frac{e^{ux} - 1}{x}$$

stanoviti hodnoty příslušné k $x = v$, $v-1$, $v-2$, $v-3$, ... ($f(0) = u$), a vypočísti jejich zpětné rozdíly; musí tedy býti u poměrně malé, aby tyto difference staly se brzy zanedbatelnými. Obyčejně volíme $a = 1$.

Příklad 1. Buď $a = 1$, $v = 6$, $u = \frac{1}{2}$; hodnoty funkce $f(x)$ pro $x = 6, 5, 4, \ldots$ jsou

$$3{\cdot}18092,\ 2{\cdot}23650,\ 1{\cdot}59726,\ 1{\cdot}16056,\ 0{\cdot}85914,$$
$$0{\cdot}64872,\ 0{\cdot}5,\ 0{\cdot}39347,\ 0{\cdot}31606,\ 0{\cdot}25896,$$

a příslušné difference zpětné

$$f(v) = 3{\cdot}18092,\ \delta f = 0{\cdot}94442,\ \delta^2 f = 0{\cdot}30518,\ \delta^3 f = 0{\cdot}10264,$$
$$\delta^4 f = 0{\cdot}03538,\ \delta^5 f = 0{\cdot}01240,\ \delta^6 f = 0{\cdot}00440,\ \delta^7 f = 0{\cdot}00159,$$
$$\delta^8 f = 0{\cdot}00062,\ \delta^9 f = 0{\cdot}00032;$$

vzorec dává

$$e^{-6}\, li\, e^9 - e^{-6}\, li\, e^6 = 2{\cdot}35948.$$

Příklad 2. Volme $v = 10$, $u = 0{\cdot}2$. Bude dlužno stanoviti 7 členů a sice:

$$0{\cdot}6389056 - 0{\cdot}0778335$$

$$54453 \qquad 5399$$

$$417 \qquad 47$$

$$4$$

$$e^{-10}\, li\, e^{12} - e^{-10} li\, e^{10} = 0{\cdot}566015.$$

Pohodlnější je počet v případě záporného v; volme jako *příklad 3.* $v = -6$, $u = 0{\cdot}1$

x	$-ux$	e^{ux}	$1 - e^{ux}$	$\dfrac{e^{ux}-1}{x}$	δ	δ^2	δ^3	δ^4
-6	0·6	0·54881	0·45119	0·075198				
					3282			
-7	0·7	49659	50341	71916		200		
					3082		15	
-8	0·8	44933	55067	68834		185		2
					2897		13	
-9	0·9	40657	59343	65937		172		
					2725			
-10	1	36788	63212	63212				

$$J = \sum_{r=0,1,2,\ldots} (-1)^\nu \frac{C_\nu}{\nu!} \delta^\nu f \quad \text{bude tu} \quad J = \frac{0.075198}{100} - \frac{0.003282}{5}$$

t. j.

$$e^6\, li\, e^{-6\cdot 6} - e^6 li\, e^{-6} = 0{\cdot}072011.$$

Početní mechanismus je zde velmi jednoduchý: pouhé odčítání a dělení čísly 6 . . . 10.[1])

Pro počítání funkce $li(e^{-\omega})$ máme prostředků dosti, na př. již dávný Eulerův zlomek řetězový: méně jich jest k ruce pro případ transcendenty $li(e^{+\omega})$. Vzorec (15) je tu zcela pohodlný, jakmile známe určitou hodnotu funkce. na př. pro $\omega = 5$, a volíme-li malé přírůstky $\left(\xi = uv = 0{\cdot}1\right.$ s hodnotou $v = 10$; v tom případě bude již δ^2 nepatrné, $\left.\frac{2}{10^6}\right)$, při čemž se nevážeme na celistvá v.[2])

5.

Ve svých Reihenentwicklungen der unvollständigen Gammafunktion[3]) podal jsem poloukonvergentní rozvoj

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mu-\omega}}{(mu+\omega)^s} = \frac{1}{u} Q(1-s,\omega) + \frac{e^{-\omega}}{2\omega^s} \tag{1}$$
$$+ \frac{e^{-\omega}}{\omega^s} \sum_{\nu=1,2,3,\ldots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu u^{2\nu-1}}{(2\nu)!} G(\omega, s)_\nu,$$

v němž B_ν značí čísla Bernoulliova $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \ldots$, dále

$$Q(1-s,\omega) = \int_\omega^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^s},\quad G(\omega,s)_\nu = \sum_{\alpha=3}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \frac{(s,\alpha)}{\omega^\alpha}, \tag{2}$$

---

[1]) Zde užito tabulek P. Gruner, Tabellen für die Exponentialfunktion mit negativen Exponenten $y = e^{-x}$. (S. Hirzel v Lipsku, 1906). Funkce e^{+x} je tabulována v díle H. G. Köhler, Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch (B. Tauchnitz v Lipsku, 1867).

[2]) Jiný vzorec pro počítání logarithmointegrálu $li(e^\omega)$ jsem podal r. 1906 v Bemerkungen über eine Formel aus der Theorie der unvollständigen Gammafunktionund des Integral logarithmus (Archiv d. Math. u. Phys III. Reihe, Band XI), a sice pro oba typy.

[3]) Journ. f. d. reine u. angew. Math., sv. 130, str. 64, vzorec (23).

při čemž závorkový symbol (s, α) značí jako výše fakultu

$$(s, 0) = 1,\ (s, 1) = s,\ (s, 2) = s(s+1),$$
$$(s, \nu) = s(s+1)\ldots(s+\nu-1),$$

a při tom ve vzorci se vyskytuje pomocná, poměrně malá kladná veličina u jinak libovolná. Tento vzorec pak byl východiskem dalších úprav v práci právě citované.

Mathematická fysiognomie rozvoje (1) není právě počítání integrálu Q, spíše tu vystupuje integrál jako prvek sloužící ku výpočtu Malmsténovské řady na levé straně; avšak přítomnost pomocné veličiny u umožňuje převésti stanovení integrálu Q na výpočet řady. V zápiskách z tehdejší doby nacházím poznámky vztahující se k řadě (1), sledující početní cíle, a při této příležitosti podávám je na veřejnost.

Zaveďme označení

$$R(\omega, u) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mu}}{(\omega + mu)^a} + \frac{1}{2\omega^a}, \tag{3}$$

kde ω a u jsou kladné veličiny, poměr $\frac{\omega}{u}$ pak vhodně veliký, jak početní podmínky vyžadují. Při tomto značení se rovnice (1) přepíše na $(s = a)$

$$(1^0)\quad u R(\omega, u) = Q(1-a, \omega) e^{\omega} + \frac{1}{\omega^a} \sum_{\nu} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu u^{2\nu}}{(2\nu)!} G(\omega, a)_\nu,$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Buď v veličina téhož typu jako u; odečtením výrazů pro parametry u a v vypadne Q a zbude

$$u R(\omega, u) - v R(\omega, v) = \frac{1}{\omega^a} \sum (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} (u^{2\nu} - v^{2\nu}) G(\omega, a)_\nu\,; \tag{4}$$

zde vložme $\omega + v$ za ω a násobme e^{-v}; vyjde

$$u R(\omega + v, u) e^{-v} - v e^{-v} R(\omega + v, v)$$
$$= \frac{e^{-v}}{(\omega + v)^a} \sum_{\nu} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu (u^{2\nu} - v^{2\nu})}{(2\nu)!} G(\omega + v, a)_\nu. \tag{4^0}$$

Funkce

$$f(\omega) = R(\omega, v) + \frac{1}{2\omega^a} = \sum_0^\infty \frac{e^{-mv}}{(\omega + mv)^a}$$

má zřejmě vlastnost (vložíme $m + 1$ za m)

$$f(\omega) = \frac{1}{\omega^a} + e^{-v} f(\omega + v),$$

tedy

$$R(\omega, v) - e^{-v} R(\omega + v, v) = \frac{1}{2\omega^a} + e^{-v} \frac{1}{2(\omega + v)^a}.$$

Odečteme-li tedy (4^0) od (4), objeví se rozvoj

$$R(\omega, u) - e^{-v} R(\omega + v, u) = \frac{\omega^{-a} + e^{-v}(\omega + v)^{-a}}{2} \frac{v}{u}$$

$$+ \frac{1}{u} \sum_{\nu = 1, 2, 3, \ldots} (-1)^{\nu - 1} \frac{B_\nu (u^{2\nu} - v^{2\nu})}{(2\nu)!} \left[\frac{G(\omega, a)_\nu}{\omega^a} - e^{-v} \frac{G(\omega + v, a)_\nu}{(\omega + v)^a}\right]. \tag{5}$$

Pravá strana obsahuje toliko prvky výpočtům snadno přístupné, na levé straně vystupuje funkce $R(\omega, u)$ pro dva argumenty ω a $\omega + v$, sobě blízké — t. j. nepříliš vzdálené.

„*Vzorec* (5) *umožňuje přechod od určitého argumentu* ω_1 *k hodnotě blízké* ω."

Na př. pro lomená $\frac{\omega}{u}$ doplníme na celistvé $\frac{\omega_1}{u} = \frac{\omega + v}{u}$, $0 < \omega_1 - \omega = v < u$. Pro *celistvá* x vypočte se řada

$$\sum_1^\infty \frac{e^{-mu}}{(x + m)^a} \quad \left(x = \frac{\omega_1}{u}\right)$$

odečtením konečného počtu členů z řady $\Sigma \frac{e^{-mu}}{m^a}$, která se stanoví jednou pro vždy, načež vzorec (5) dává $R(\omega, u)$.

Uvažujme zvláště případ $a = 1$; zde poslední řada pomocná pro $x = 0$ má hodnotu

$$\sum_1^\infty \frac{e^{-mu}}{m} = -\log\left(1 - e^{-u}\right),$$

tedy

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{-mu}}{x+m}=e^{ux}\left[\log\frac{1}{1-e^{-u}}-\sum_{\nu=1}^{x}\frac{e^{-\nu u}}{\nu}\right],$$

$$R(\omega_1,\,u)=\frac{1}{2\omega_1}+\frac{e^{\omega_1}}{u}\left[\log\frac{1}{1-e^{-u}}-\sum_{\nu=1}^{x}\frac{e^{-\nu u}}{\nu}\right],\quad x=\frac{\omega_1}{u},\tag{6}$$

načež $R(\omega,\,u)$ se stanoví dle (5).

Účelné je počítati na místě s R s funkcí

$$f(\omega,\,u)_a=\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{-(\omega+mu)}}{(\omega+mu)^a}+\frac{e^{-\omega}}{2\omega^a}=e^{-\omega}R(\omega,\,u);\tag{7}$$

tu pak (5) bude zníti o něco přehledněji

$$f(\omega,\,u)_a-f(\omega_1,\,u)_a=\frac{v}{2u}\left(\frac{e^{-\omega}}{\omega^a}+\frac{e^{-\omega_1}}{\omega_1{}^a}\right)$$

$$+\frac{1}{u}\sum_{\nu}(-1)^{\nu-1}B_\nu\frac{u^{2\nu}-v^{2\nu}}{(2\nu)\,!}\left[\frac{e^{-\omega}G(\omega,\,a)_\nu}{\omega^a}-\frac{e^{-\omega_1}G(\omega_1,\,a)_\nu}{\omega_1{}^a}\right],$$

při čemž $v=\omega_1-\omega$. (5*)

Ve zvláštním případě $a=1$ se definice polynomu $G(\omega)_\nu$ přetvoří na

$$G(\omega)_n=1+\frac{2n-1}{\omega}+\frac{(2n-1)(2n-2)}{\omega^2}$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{\omega^3}+\dots$$

$$=\frac{(2n-1)\,!}{\omega^{2n-1}}\sum_{0}^{2n-1}\frac{\omega^\nu}{\nu\,!};$$

dále

$$f(\omega_1,\,u)_1=\frac{e^{-\omega_1}}{2\omega_1}+\frac{1}{u}\left\{\log\frac{1}{1-e^{-u}}-\sum_{1}^{\frac{\omega_1}{u}}\frac{e^{-\nu u}}{\nu}\right\}.$$

Pro ocenění polynomů máme původní vyjádření (l. c.)

$$\frac{\Gamma(a)}{\omega^a}\,G(\omega,\,a)_\nu=\int_0^\infty e^{-\omega x}x^{a-1}(1+x)^{2\nu-1}dx,\tag{8}$$

tedy při $a = 1$

$$\frac{e^{-\omega}}{\omega} G(\omega)_\nu = \int_1^\infty e^{-\omega x} x^{2\nu-1} dx ;$$

výraz, který se vyskytuje na pravé straně (5*), bude tedy dle věty o střední hodnotě

$$\varDelta = \frac{e^{-\omega}}{\omega} G(\omega)_\nu - \frac{e^{-\omega_1}}{\omega_1} G(\omega_1)_\nu = (\omega_1 - \omega) \int_1^\infty e^{-\omega_2 x} x^{2\nu} dx ,$$

kde ω_2 leží mezi ω a ω_1; za všech okolností tedy při $\omega_1 > \omega$

$$0 < \varDelta < \frac{(2\nu)!(\omega_1 - \omega)}{\omega_2^{2\nu+1}} < \frac{(2\nu)!(\omega_1 - \omega)}{\omega^{2\nu+1}} ,$$

člen (ν) pravé strany bude tudíž menší než

$$\frac{B_\nu (u^{2\nu} - v^{2\nu}) v}{u \omega^{2\nu+1}} , \tag{9}$$

okolnost důležitá pro posouzení sblížení.

Kdyby na př. bylo $\omega = 6$, $u = 1$, byl by člen $\nu = 4$ menší než

$$\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{10077696} = 0{\cdot}0^8 3 \ldots$$

Pokud jde o výpočet čísel $G(\omega, a)_n$, jsou zjednodušení vždy vítána, neboť již pro $n = 4$ máme sedmičlenné výrazy.

Ze vzorce (8) snadno vychází, že veličina $\Gamma(a) \omega^{-a} G(\omega, a)_\nu$ je první člen $(2\nu - 1)$ní součtové řady vzniklé ze základní posloupnosti

$$\frac{\Gamma(a)}{\omega^a} , \quad \frac{\Gamma(a+1)}{\omega^{a+1}} , \quad \frac{\Gamma(a+2)}{\omega^{a+2}} , \ldots$$

sčítáním sousedních členů. Znamenáme-li tedy obecně pro řadu $u_0 , u_1 , u_2 , \ldots$

$$\Sigma u_n = u_n + u_{n+1} , \quad \Sigma^2 u_n = \Sigma u_n + \Sigma u_{n+1} , \ldots$$

bude

$$G(\omega, a)_\nu = \Sigma^{2\nu-1} u_0 , \qquad u_\mu = \frac{(a, \mu)}{\omega^\mu} ; \tag{8*}$$

veškery polynomy $G(\omega, a)_\nu$ vypočtou se tedy z řady

$$1, \frac{a}{\omega}, \frac{a(a+1)}{\omega^2}, \frac{a(a+1)(a+2)}{\omega^3}, \ldots$$

sčítáním sousedních členů.

Jiný způsob výpočtu je postup návratný; znamenejme na okamžik

$$J_n = \int_0^\infty e^{-\omega x} x^{a-1} (1+x)^n \, dx;$$

pak nám identita

$$d[e^{-\omega x} x^a (1+x)^n] = e^{-\omega x} x^{a-1} dx [-\omega(1+x)^{n+1} + (\omega + a + n)(1+x)^n - n(1+x)^{n-1}]$$

podá integrací vztah

$$\omega J_{n+1} = (\omega + a + n) J_n - n J_{n-1}.$$

Pro funkce

$$G_n = \frac{\omega^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-\omega x} x^{a-1} (1+x)^n dx \tag{8¹}$$

platí tedy vztah

$$\omega G_{n+1} = (\omega + a + n) G_n - n G_{n-1}; \tag{8²}$$

$$G_0 = 1, \; G_1 = 1 + \frac{a}{\omega}.$$

Tyto veličiny se postupně vypočtou, načež

$$G(\omega, a)_\nu = G_{2\nu-1}. \tag{8³}$$

Na př. $a = 1$, $\omega = 6$:

$$G_1 = \tfrac{7}{6}, \; G_2 = \tfrac{25}{18}, \; G_3 = \tfrac{61}{36}, \; G_4 = \tfrac{230}{108}, \; G_5 = \tfrac{899}{324},$$

tudíž

$$G(\omega, 1)_1 = \tfrac{7}{6}, \; G(\omega, 1)_2 = \tfrac{61}{36}, \; G(\omega, 1)_3 = \tfrac{899}{324}.$$

Pro veličiny

$$H_n = e^{-\omega} G_n = \frac{\omega^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-\omega(1+x)} x^{a-1} (1+x)^n dx \tag{8⁴}$$

$$= (-1)^n \omega^a D^n \frac{e^{-\omega}}{\omega^a}$$

máme ve zvláštním případě $a = 1$

$$\left.\begin{aligned} H_n &= \omega\left[\frac{n!}{\omega^{n+1}} - A_n\right], & A_n &= \int_0^1 e^{-\omega x} x^n\,dx; \\ A_n &= \frac{nA_{n-1} - e^{-\omega}}{\omega}, & A_0 &= \frac{1 - e^{-\omega}}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad (8^5)$$

Pro $\omega = 5{\cdot}88$ máme $e^{-\omega} = 0{\cdot}002795$, načež postupně

$$A_0 = 0{\cdot}169593, \quad A_1 = 0{\cdot}028367, \quad A_2 = 0{\cdot}009173,$$
$$A_3 = 0{\cdot}004205, \quad A_4 = 0{\cdot}002385, \quad A_5 = 0{\cdot}001553;$$

pomocí hodnot A_1, A_3, A_5 snadno určíme veličiny

$$e^{-\omega} G(\omega, 1)_\nu, \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Ostatně máme redukční vzorec

$$H_n = \frac{n}{\omega} H_{n-1} + e^{-\omega}.$$

Abychom vypočetli řadu

$$f = \frac{e^{-\omega}}{2\omega^s} + \sum_1^\infty \frac{e^{-mu-\omega}}{(mu+\omega)^s}$$

pro $s = 5$, $u = 0{\cdot}3$, $\omega = 2$, máme poloukonvergentní rozvoj

$$f = \frac{1}{u} Q(1 - s, \omega) + \frac{e^{-\omega}}{\omega^s} \Sigma (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu u^{2\nu-1}}{(2\nu)!} G(\omega, s)_\nu.$$

Vypočteme veličiny G_n dle (8^2)

$$2\,G_{n+1} = (7 + n)\,G_n - n\,G_{n-1}, \quad G_0 = 1, \quad G_1 = \frac{7}{2}.$$

$$G_2 = \tfrac{27}{2}, \quad G_3 = \tfrac{229}{4}, \quad G_4 = 266, \quad G_5 = \tfrac{2697}{2},$$
$$G_6 = 7426, \quad G_7 = \tfrac{88447}{2},$$

načež bude

$$G(\omega, s)_\nu = G_1, \; G_3, \; G_5, \; G_7,$$

a poslední agregát v pravo

$$\frac{e^{-2}}{2^5}\left\{\frac{0{\cdot}3}{6.2}\cdot\frac{7}{2} - \frac{0{\cdot}3^3}{30.24}\,\frac{229}{4} + \frac{0{\cdot}3^5}{42.720}\cdot\frac{2697}{2} - \frac{0{\cdot}3^7}{30.40320}\,\frac{88447}{2} + \dots\right\};$$

závorka s napsanými členy asi na 7 míst.

Integrál

$$Q(1-s,\omega)=\int_{\omega}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x^{s}}$$

převede se na logaritmointegrál.

Dále v případě $s=\frac{1}{2}$, $\omega=3$ máme

$$G(\omega,s)_1=\tfrac{7}{6},\quad G(\omega,s)_2=\tfrac{131}{72},\quad G(\omega,s)_3=\tfrac{1469}{288},$$
$$G(\omega,s)_4=\tfrac{691577}{31104},$$

$$\frac{e^{-3}}{2\sqrt{3}}+\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{-3-mu}}{\sqrt{3+mu}}=\frac{1}{u}\int_{3}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{e^{-3}}{\sqrt{3}}\left\{\frac{u}{6.2}\,\frac{7}{6}-\frac{u^3}{30.24}\cdot\frac{131}{72}\right.$$

$$\left.+\frac{u^5}{42.720}\,\frac{1469}{288}-\frac{u^7}{30.40320}G(\omega)_4+\ldots\right\}$$

Ještě pro $u=1$ je závorka s napsanými členy stanovena na šest míst, integrál pak jest dán tabulkami a také se bez obtíží vyčíslí přímo.

Jako aplikaci vzorce (5*) uvažujme případ ($u=1$, $a=1$),

$$f(\omega)=\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{-(\omega+n)}}{\omega+n}+\frac{e^{-\omega}}{2\omega}$$

pro $\omega=5{\cdot}88$; má-li se zároveň docíliti sblížení pro $R=e^{\omega}f(\omega)$, tu teprv asi 20 členů dává 9 míst. V našem případě $\omega_1=6$, $v=0{\cdot}12$

$$f(\omega_1)=\frac{e^{-6}}{12}+\log\frac{1}{1-\frac{1}{e}}-\sum_{1}^{6}\frac{e^{-\nu}}{\nu}=$$

$$1-\log 1{\cdot}7182818-\sum_{1}^{5}\frac{e^{-\nu}}{\nu}-\frac{1}{12}e^{-6}.$$

Zde máme přímo z tabulek (přesnějších než pětimístných nemám po ruce)

ν	$e^{-\nu}$	$\frac{1}{\nu} e^{-\nu}$
1	0·36788	0·36788
2	13534	6767
3	04979	1660
4	1832	458
5	674	135
6	248	21

$$f(\omega_1) = 1 - 0{\cdot}45829 - \log 1{\cdot}7182814.$$

Další prvky výpočtu bude stanovení hodnot $\frac{1}{\omega^\nu}$, $\frac{1}{\omega_1^{\,\nu}}$ až do $\nu = 9$, aby se určily hodnoty G_1, G_2, G_3, G_4 (po případě odpadne již poslední člen neb dva, není-li počet řízen na více decimálek). Výpočet se dokončí pomocí hodnot výše udaných.

Řady (1) pro celistvá záporná s jsou vyjadřitelny v zakončeném tvaru; pro kladná celistvá s podaří se je převésti na logarithmointegrál, s použitím poloukonvergentní řady (1), neboť integrály

$$\int_\omega^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^s}$$

vedou v tom případě na logarithmointegrál. To ve zvláštním případě $s = 2$ dává výpočet funkce dilogarithmické

$$\sum_{\nu=1}^\infty \frac{z^\nu}{\nu^2} = -\int_0 \log(1 - z) \frac{dz}{z};$$

volíme $z = e^{-u}$, a stanovíme zbytek

$$R = \sum_{\nu=m}^\infty \frac{e^{-\nu u}}{\nu^2} = \sum_0^\infty \frac{e^{-(\nu+m)u}}{(m+\nu)^2};$$

zde tedy $\omega = mu$;

$$\frac{R}{u^2} = \frac{1}{u} \int_\omega^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^2} + \frac{e^{-\omega}}{2\omega^2} + \frac{e^{-\omega}}{\omega^2} \sum_{\nu=1,2,3\ldots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu u^{2\nu-1}}{(2\nu)!} G(\omega, 2)_\nu;$$

$$\int_\omega^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^2} = \frac{e^{-\omega}}{\omega} + li(e^{-\omega}).$$

Kdybychom měli počítati řadu

$$S = \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-\nu u}}{\nu^2} \quad \text{pro } u = 0{\cdot}405,$$

rozložíme ji na

$$S = \sum_{\nu=1}^{5} \frac{e^{-\nu u}}{\nu^2} + S_1, \quad S_1 = \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{-(m+6)u}}{(m+6)^2}.$$

Podle (1) pak bude při $\omega = 6u = 2{\cdot}43$

$$S_1 = uQ(-1, \omega) + \frac{e^{-\omega}}{72} + \frac{e^{-\omega}}{36} \sum_{\nu} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu u^{2\nu-1}}{(2\nu)!} G_{2\nu-1},$$

píšeme-li $G_{2\nu-1}$ za $G(\omega, 2)_\nu$. Čísla G_n se určí dle (8²) z rovnice

$$2{\cdot}43\, G_{n+1} = (n + 4{\cdot}43)\, G_n - n G_{n-1};$$

výpočet se ulehčí tím, že si sestavíme násobky čísla

$$\frac{1}{2{\cdot}43} = 0{\cdot}4115226;$$

nalezneme tak hodnoty

$$\begin{aligned} G_1 &= 1{\cdot}8230452 \\ G_2 &= 3{\cdot}662195 \\ G_3 &= 8{\cdot}19003 \\ G_4 &= 20{\cdot}5207 \\ G_5 &= 57{\cdot}707. \end{aligned}$$

Tři členy v řadě semikonvergentní dávají sedm míst a okolnost, že

$$\frac{e^{-\omega}}{36} = 0{\cdot}002\ldots,$$

zaručuje nám tak 9 desetinek spolehlivých.

Tabulky pro funkci $li(e^{-\omega})$ jsou málo přístupny aneb jen čtyřmístné; při této příležitosti poukazuji opět ke vzorci (1) který dává při $s = 1$, $\omega = pv$

$$Q(0, \omega) = -\log(1 - e^{-v}) - \sum_{1}^{p-1} \frac{e^{-\nu v}}{\nu} - \frac{e^{-\omega}}{2p}$$

$$- \frac{e^{-\omega}}{p} \sum (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu v^{2\nu-1}}{(2\nu)!} G(\omega, 1)_\nu;$$

$$G(\omega,\,1)_\nu = \overline{G}_{2\nu-1}\,; \quad e^{-\omega}\,\overline{G}_n = H_n\,,$$

$$H_n = \frac{n}{\omega}\,H_{n-1} + e^{-\omega}\,; \text{ pro } \omega = 2{\cdot}43 \text{ pak } H_0 = 0{\cdot}088037$$

$$H_1 = 0{\cdot}124266\,, \quad H_2 = 0{\cdot}190313\,, \quad H_3 = 0{\cdot}322734.$$

Zvolíme $p = 10$, takže $v = 0{\cdot}243$. Odstraníme-li z výrazů H_n členy $\frac{n\,!}{\omega^n}$, zbude řada konvergentní a odstraněné členy se nahradí známou funkcí

$$\psi(p) - \log p + \frac{1}{2p}\,;$$

$$Q(0,\,\omega) = \psi(p) - \log p + \frac{1-e^{-\omega}}{2p} - \sum_1^{p-1}\frac{e^{-\nu v}}{\nu} - \log(1-e^{-v})$$

$$+ \sum_1^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu\,v^{2\nu}}{(2\nu)\,!}\,A_{2\nu-1}\,;$$

$$\psi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1} - E,\quad E = 0{\cdot}57721566\ldots$$

Řada konverguje sice pro $v < 2\pi$, užitečna je hlavně pro $v \leqq 1$, aneb jen pro hodnoty o málo větší.

6.

Vraťme se k polynomům a číslům $C_\nu(a)$ z čl 4.

$$\frac{1}{a-\log(1+z)} = \sum_0^{\infty}\frac{C_\nu(a)}{\nu\,!}\,z^\nu\,,\quad a > \log 2,$$

tedy k rovnici

$$\text{(1)}\qquad \frac{1}{a+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{C_\nu(a)}{\nu\,!}\left(e^{-x}-1\right)^\nu.$$

V té kladu $x = nv$ a násobiv e^{-nuv} sečtu výsledky pro $n = p,\ p+1, \ldots$ Vyjde

$$\sum_{n=p}^{\infty}\frac{e^{-nuv}}{a+nv} = \sum_{n=p}^{\infty} e^{-nuv}\sum_0^{\infty}\frac{C_\nu(a)}{\nu\,!}\left(e^{-nv}-1\right)^\nu;$$

při tom značí u, v kladné veličiny a dvojnásobná řada, která zde tvoří pravou stranu, konverguje absolutně, pokud $u > 1$. Abychom to dokázali, buď $\mathfrak{M}$ konstanta, pod níž leží veličiny

$\left|\frac{G_\nu(a)}{\nu!}\right|$; dvojnásobná řada kladných členů

$$\sum_{n=p}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\mathfrak{M}\left(1-e^{-nv}\right)^{\nu}e^{-nuv}$$

má členy větší než řada uvažovaná a rovná se řadě

$$\sum_{n=p}^{\infty}\frac{\mathfrak{M}e^{-nuv}}{1-\left(1-e^{-nv}\right)}=\Sigma\,\mathfrak{M}e^{-nv(u-1)},$$

jež konverguje pro $u>1$. Bude tudíž

$$\sum_{n=p}^{\infty}\frac{e^{-nuv}}{a+nv}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{C_\nu(a)}{\nu!}\sum_{n=p}^{\infty}\left(e^{-nv}-1\right)^{\nu}e^{-nuv};$$

při označení z počtu rozdílového

$$\Delta f(u)=f(u+1)-f(u),\ldots$$

je však

$$\left(e^{-nv}-1\right)^{\nu}e^{-nuv}=\Delta_u^{\nu}e^{-nuv},$$

a tak vyjde

$$\sum_{n=p}^{\infty}\frac{e^{-nuv}}{a+nv}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{C_\nu(a)}{\nu!}\Delta_u^{\nu}\frac{e^{-puv}}{1-e^{-uv}},\qquad \Delta u=1. \tag{2}$$

Zvláště pro $p=1$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{-nuv}}{a+nv}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{C_\nu(a)}{\nu!}\Delta_u^{\nu}\frac{1}{e^{uv}-1},\qquad (\Delta u=1,\ u>1). \tag{2*}$$

Volme $a=1$ a znamenejme $uv=\omega$, $\frac{1}{v}=c$, i bude

$$\frac{e^{-\omega}}{c+1}+\frac{e^{-2\omega}}{c+2}+\frac{e^{-3\omega}}{c+3}+\ldots=\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{e^{\omega}-1}+\Delta\frac{1}{e^{\omega}-1}+\right. \tag{2°}$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\Delta^2\frac{1}{e^{\omega}-1}+\frac{2}{3!}\Delta^3\frac{1}{e^{\omega}-1}+\ldots+\frac{C_n}{n!}\Delta^n\frac{1}{e^{\omega}-1}+\ldots\right\},$$

$$C_2=1,\ C_3=2,\ C_4=4,\ C_5=14,\ C_6=38,\ldots$$

při čemž difference Δ odpovídají přírůstku $\Delta\omega=\frac{1}{c}$, a veličiny c, ω jsou kladné, $\omega>\frac{1}{c}$.

Pro ω jisté velikosti je konvergence levé strany rychlá a transformace nemá užitku; ale již pro $\omega = 1$ není konvergence řady v levo dosti uspokojivá; tu pak bude pravá strana rychle konvergentní, je-li $\frac{1}{c}$ dosti malé, aby difference rychle klesaly. Pro ω velmi malá máme pak jednoduché elementární prostředky k vyčíslení řady.

Užitečnost vzorce (2⁰) dobře illustruje příklad $\omega = 1$, $c = 10$:

x	$e^x - 1$	$1:(e^x - 1$	$-\Delta$	Δ^2	$-\Delta^3$	Δ^4	$-\Delta^5$
1	1·718282	0·581977					
			83016				
1·1	2·004166	498961		15068			
			67948		3503		
1·2	2·320117	431013		11565		1002	
			56383		2501		339
1·3	2·669297	374630		9064		663	
			47319		1838		
1·4	3·055200	327311		7226			
			40093				
1·5	3·481688	287218					

Členy v závorce $\{\ \}$ na pravé straně (2⁰) jsou střídavě kladné a záporné a mají hodnoty

$$\begin{array}{rr} +\,0{\cdot}581977 & -\,0{\cdot}083016 \\ 7534 & 1168 \\ 167 & 40 \end{array}$$

Součet $= 0{\cdot}505454$; potlačíme poslední decimálku a dělíme $c = 10$:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{10+n} = 0{\cdot}050545.$$

Není sporu o tom, že v uvažovaném případě celistvého c se obdrží hodnota řady v zakončeném tvaru, zde tedy

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{10+n} = e^{10}\left\{\log\frac{1}{1-\frac{1}{e}} - \sum_{\nu=1}^{10}\frac{e^{-\nu}}{\nu}\right\};$$

ale tu jest uvážiti, že výpočet pravé strany vyžaduje tabulek o jedenácti místech, ana se pravá strana jeví jako rozdíl dvou velkých čísel, která obyčejné tabulky nestanoví s dostačující přesností (na př. dávají e^{10} bez tisícin), Podobně jako (2) odvodíme

$$(3)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{-nuv}}{a+nv}=\sum_{0}^{\infty}\frac{C_\nu(a)}{\nu!}\Delta_u^{\nu}\frac{1}{e^{uv}+1}\quad(\Delta u=1,\ u>1),$$

a zvlášť pro $a=1$

$$(3^0)\qquad \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{-n\omega}}{c+n}=\frac{1}{c}\sum_{0}^{\infty}\frac{C_\nu}{\nu!}\Delta^{\nu}\frac{1}{e^{\omega}+1},$$

$$\left(\Delta\omega=\frac{1}{c}>0,\ \omega>\frac{1}{c}\right).$$

Příklad, $\omega=\frac{1}{2}$, $c=10$.

x	e^x+1	$1:(e^x+1)$	$-\Delta$	Δ^2	$+\Delta^3$	$-\Delta^4$	$+\Delta^5$
0·5	2·648721	0·3775406	231969				
0·6	2·822119	3543437	225314	6655	813		
0·7	3·013752	3318123	217866	7448	666	147	
0·8	3·225541	3100257	209752	8114	551	115	32
0·9	3·459603	2890505	201085	8667			
1	3·718282	2689420					

$$\begin{array}{rrcrcr} \sum\frac{C_\nu}{\nu!}\Delta^{\nu} & = & 0·3775406 & - & 0·0231969 & = 0·3547015 \\ & & 3327 & & 24 & \\ & & 271 & & & \\ & & 4 & & & \end{array}$$

tedy

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{11}-\frac{e^{-1}}{12}+\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{13}\pm\ldots=0.03547015.$$

Funkce tato (3^0) a zároveň $1:(e^{\omega}+1)$ má v okolí $\omega=0$ povahu celistvé funkce, difference mají tedy hladký průběh, takže tu řada (3^0) nachází příznivější podmínky, kdežto funkce (2^0) má v $\omega=0$ singulární bod logarithmický a funkce $1:(e^{\omega}-1)$ singularitu polární, takže konvergence musí býti velmi zdlouhava pro malá ω, ač-li vůbec neodpadne $\left(\text{pro } \omega<\frac{1}{c}\right)$.

Jiného druhu vyjádření uvažované řady (2⁰) podává Eulerův vzorec transformační

$$(4)\qquad c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \ldots = c_0 \frac{x}{1-x} + \Delta c_0 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \\ + \Delta^2 c_0 \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \ldots,$$

v němž $\Delta^\nu c_0$ značí počáteční člen ν-té řady rozdílové vytvořené ze základní posloupnosti $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$

Pro dosti malá x je řada v pravo vždy konvergentní, a pravá strana poskytne analytické prodloužení funkce definované prvkem na levé straně, pokud sama konverguje; neboť ji lze psáti jako řadu mocnin

$$(4')\qquad c_0 z + \Delta c_0 z^2 + \Delta^2 c_0 z^3 + \Delta^3 c_0 z^4 + \ldots, \qquad z = \frac{x}{1-x}.$$

Kruhům $\mathfrak{C}$ $|z| =$ konst. v rovině komplexní proměnné z odpovídají v rovině (x) opět kruhy $\mathfrak{A}$, které mají své středy na ose realné a sekou orthogonálně kruhy svazku, jehož vrcholy jsou $x = 0$ a $x = 1$.

Jedním z kruhů $\mathfrak{A}$ je přímka $|x| = |1 - x|$, osa symetrie bodů $x = 0$ a $x = 1$, jež dělí kruhy $\mathfrak{A}$ ve dvě kategorie, pravou a levou, podle toho, na které její straně tyto kruhy leží. Kruhy $\mathfrak{A}$ levé řady obsahují uvnitř bod $x = 0$, kdežto týž bod leží zevně kruhů kategorie pravé. Vnitřek kruhu $\mathfrak{C}$ odpovídá oné straně kruhu $\mathfrak{A}$, která obsahuje počátek $x = 0$, t. j. odpovídá mu vnitřek kruhu řady levé ($|z| < 1$), ale vnějšek řady pravé ($|z| > 1$).

Konverguje-li řada (4⁰) uvnitř kruhu, jehož poloměr je větší jedné, definuje v oboru proměnné x analytickou funkci, pravidelnou zevně kruhu $\mathfrak{A}$, i v nekonečnu. Její singularity jsou vesměs umístěny uvnitř kruhu $\mathfrak{A}$.

Je-li naopak poloměr konvergenční řady (4⁰) menší jedné, přísluší kruhu $\mathfrak{C}$ kruh řady levé, a funkce x řadou definovaná je pravidelná pouze uvnitř kruhu $\mathfrak{A}$; jeho obvod obsahuje aspoň jedno singulární místo funkce (4⁰) vůči proměnné x.

V případě řady

$$(5)\qquad \mathfrak{L}(x, c) = \sum_0^\infty \frac{x^m}{c+m}$$

je zřejmo, že funkce není pravidelna v nekonečnu, neboť

$$x^c \mathfrak{L}(x, c) = \int_0 \frac{x^{c-1} dx}{1-x}$$

a substituce $x = \frac{1}{\xi}$ dává

$$x^c \mathfrak{L}(x, c) = A + \int \frac{\xi^{-c} d\xi}{1-\xi} = A + \xi^{1-c} \mathfrak{L}(\xi, 1-c),$$

t. j.

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{L}(x, c) = \frac{A}{x^c} + \frac{1}{x} \mathfrak{L}\left(\frac{1}{x}, 1-c\right).$$

Kdyby funkce byla pravidelnou na vnější straně určitého kruhu $\mathfrak{A}$, ležel by jediný ještě možný bod zvláštní $x = 1$ na jeho obvodě; kruh ten by se smrštil na jediný bod $x = 1$ a funkce byla by celistvou transcendentní vůči $\frac{1}{x-1}$. Že to nenastane, o tom nás poučí její povaha v okolí bodu $x = 1$. Položme $x = 1 - \zeta$, obdržíme

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} x^c \mathfrak{L}(x, c) &= -\int (1-\zeta)^{c-1} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ &= C + \sum_1^\infty (-1)^{\nu-1} \binom{c-1}{\nu} \frac{\zeta^\nu}{\nu} - \log \zeta, \end{aligned}$$

čímž nemožnost supposice vysvětlena.

Po levé straně osy symetrie bodů $x = 0$, $x = 1$ chová se však $\mathfrak{L}(x, c)$ pravidelně, kruh $\mathfrak{A}$ tvoří tedy levou stranu roviny od této přímky.

Rozvoj (4) příslušný k funkci $x \mathfrak{L}(x)$ konverguje tedy pouze uvnitř kruhu $|z| \leqq 1$, t. j. pro $|x| < |x-1|$, při reálné proměnné x tedy pro $x < \frac{1}{2}$; a sice zní*)

---

*) Uvažoval jsem jej s jinými sem spadajícími otázkami v článku Sur une série qui se présente dans la théorie du logarithme intégral (Giornale di Matematiche di Battaglini diretto dal Prof. A. Cappelli, vol. XLV.).

$$\sum_0^\infty \frac{x^m}{c+m} = \frac{1}{c}\frac{1}{1-x} - \frac{1}{c(c+1)}\frac{x}{(1-x)^2} +$$

$$(6) \qquad + \frac{2!}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^2}{(1-x)^3} -$$

$$- \frac{3!}{c(c+1)(c+2)(c+3)}\frac{x^3}{(1-x)^4} + \ldots$$

Vzorec tento se výborně hodí k výpočtu pro záporná x, a může nahraditi vzorec (3^0), ježto $x = -e^{-\omega}$ dává

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{e^\omega + 1} < \frac{1}{2},$$

a součinitelé jsou veličiny malé pro $c \geqq 6$. K výpočtu řady (2^0) se však vzorec (6) hodí jen při $\omega > \log 2$, a pro větší hodnoty c. Je-li c veliké, a veličina $e^{-\omega} = x$ neznačně větší než $\frac{1}{2}$, bude pravá strana (6) sice divergentní, ale způsobilá k výpočtu, náleejí c k řadám poloukonvergentním; zbytek (chyba) je u ní částkou prvního vynechaného členu

Pro počítání řady $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{10+n}$ dle (6) máme

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{10+n} = \frac{z}{11} - \frac{z^2}{11\,.\,12} + \frac{1\,.\,2\,z^3}{11\,.\,12\,.\,13} -$$

$$- \frac{1\,.\,2\,.\,3\,z^4}{11\,.\,12\,.\,13\,.\,14} + \ldots, \quad z = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}+1}.$$

$\operatorname{Log} z = 0{\cdot}5769637-1$, a sice dostaneme 7 míst s pěti členy. Řadě (6) tu náleží očividně přednost před pravou stranou (3^0).

Rovnici (β) můžeme psáti

$$\sum_0^\infty \frac{x^{c+m}}{c+m} + \log(1-x) = C + \sum_1^\infty (-1)^{\nu-1}\binom{c-1}{\nu}\frac{\xi^\nu}{\nu},$$

$$\xi = 1 - x;$$

vychází odtud pro určení stálé C

$$C = \lim_{x=1}\left\{\sum_0^\infty \frac{x^{c+\nu}}{c+\nu} - \sum_0^\infty \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right\} = \lim_{x=1}\left\{\sum_0^\infty\left(\frac{1}{c+\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right)x^{c+\nu} + \right.$$
$$\left. + (x^{c-1}-1)\sum_0^\infty \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right\}$$

$$C = \lim_{x=1}\sum_0^\infty\left(\frac{1}{c+\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right)x^{c+\nu} - \lim_{x=1}\{(x^{c-1}-1)\log(1-x)\}.$$

Druhá limita je patrně nulla a zbývá

$$C = \sum_0^\infty\left(\frac{1}{c+\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) = \psi(1) - \psi(c), \quad \psi(c) = \frac{\Gamma'(c)}{\Gamma(c)}.$$

Tím získán vzorec

$$\sum_0^\infty \frac{x^{c+m}}{c+m} = -\log(1-x) + \tag{7}$$
$$+\psi(1) - \psi(c) - \sum_{\nu=1}^\infty \binom{c-1}{\nu}\frac{(x-1)^\nu}{\nu},$$

který charakterisuje povahu funkce $\mathfrak{L}(x, c)$ v sousedství kritického místa $x = 1.$ *) Je li c číslo celistvé (kladné), zakončí se řada v pravo, jakož vůbec se tato funkce vyjádří elementárními výrazy, je-li hodnota parametru c číslo racionální.

K výpočtu se hodí pravá strana (7) pro zdlouhavou konvergenci jen pro x velmi blízká jedné, tedy (při $x = e^{-\omega}$) pro malá ω.

Rozvoj v citovaných pracích uvedený zní

$$\sum_0^\infty \frac{x^{m+c}}{c+m} = x^{c-1}\sum_1^\infty s_m\binom{c-1}{m}\left(\frac{1-x}{x}\right)^m - \log(1-x) + \tag{7⁰}$$
$$+\psi(1) - \psi(c),$$

při čemž společná konvergence nastane v oboru společném kruhu $|x| \leqq 1$ a polorovině Real. $x > \frac{1}{2}$, a kde psáno

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \dots s_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}.$$

---

*) Rozvoj ten jest o něco jednodušší, než řada vyvinutá v naší rozpravě Různé výsledky v theorii funkce gamma (Rozpr. České Akademie roč. V., čís. 14; 1896), na kterou se připíná posledně zmíněná práce.

Dělme x^c a derivujme vůči c; vyjde

$$(8)\quad -\sum_0^\infty \frac{x^{c+m}}{(c+m)^2} = -\psi'(c) + [\psi(c) - \psi(1)]\log x +$$

$$+ \log x \log(1-x) + x^{c-1} \sum_1^\infty s_m \binom{c-1}{m} \sum_{\alpha=1}^m \frac{1}{c-\alpha} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)^m,$$

kterážto rovnice vyjadřuje chování se funkce definované prvkem

$$\sum_0^\infty \frac{x^m}{(c+m)^2}$$

v okolí svého singulárního místa $x = 1$, a mimo to slouží k jejímu výpočtu v případě x blízkého 1. Pravá strana rovnice

$$\sum_0^\infty \frac{x^m}{c+m} = \int_0^1 \frac{\xi^{c-1} d\xi}{1 - x\xi}$$

definuje funkci $\mathfrak{L}(x, c)$ v celé rovině mimo řez podél části realné osy od $x = 1$ do $x = \infty$, derivování dává zobecněný dilogarithmus

$$\sum_0^\infty \frac{x^m}{(c+m)^2} = -\int_0^1 \frac{\xi^{c-1} \log \xi \, d\xi}{1 - x\xi},$$

v případě $c = 1$

$$\operatorname{dil}(x) = \sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu^2} = -x \int_0^1 \frac{\log \xi \, d\xi}{1 - x\xi} = -\int_0^x \log(1-x) \frac{dx}{x}.$$

Rovnice (6) psaná ve tvaru $(\Delta c = 1)$

$$\sum_0^\infty \frac{x^{m+1}}{c+m} = \sum_0^\infty z^{m+1} \Delta^m \frac{1}{c}, \quad z = \frac{x}{1-x},$$

podá derivováním dle c:

$$(9)\quad \sum_0^\infty \frac{x^{m+1}}{(c+m)^2} = \sum_{m=0}^\infty \Delta^m \frac{1}{c^2} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{m+1}, \quad \text{Real. } x \leqq \frac{1}{2},$$

kterýžto tvar se velmi dobře hodí k výpočtům (při $c \geqq 6$).

Pro $c \sim 1$ máme patrně

$$\binom{c-1}{m} \sum_{\alpha=1}^m \frac{1}{c-\alpha} \sim \frac{(-1)^{m-1}}{m},$$

tedy (8) dává

$$\text{dil}\,(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{s_m}{m} \left(\frac{x-1}{x}\right)^m + \frac{\pi^2}{6} - \log x \log (1-x)$$

jako rozvoj dilogarithmu v okolí bodu $x = 1$, vlastně v polorovině Real. $x > \frac{1}{2}$.

Také užitím polynomů $C_\nu(a)$ daných rovnicí (1) dospějeme k výrazům sloužícím k výpočtu zobecněné funkce dilogarithmické. Derivujme v (1) dle x, tedy

$$\frac{1}{(a+x)^2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{C_{\nu+1}(a)}{\nu!} \left(e^{-x} - 1\right)^\nu e^{-x};$$

položme $x = nv$, násobme e^{-nuv} a sečtěme pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Máme pak nejprve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nuv}}{(a+nv)^2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{C_{\nu+1}(a)}{\nu!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-nv} - 1\right)^\nu e^{-nv(u+1)}$$

tedy

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nuv}}{(a+nv)^2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{C_{\nu+1}(a)}{\nu!} \Delta_u^\nu \frac{1}{e^{v(u+1)} - 1}, (\Delta u = 1,\ u > 1)$$

a zvláště při $a = 1$, $\frac{1}{v} = c$, $uv = \omega$

$$(10^0) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\omega}}{(c+n)^2} = \frac{1}{c^2} \sum_{0}^{\infty} \frac{C_{\nu+1}}{\nu!} \Delta^\nu \frac{1}{e^{\omega + \frac{1}{c}} - 1}, \left(\begin{matrix} \Delta\omega = \frac{1}{c} \\ \omega > \frac{1}{c} \end{matrix}\right).$$

Podobně bude s týmiž podmínkami

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{-n\omega}}{(c+n)^2} = \frac{1}{c^2} \sum_{0}^{\infty} \frac{C_{\nu+1}}{\nu!} \Delta^\nu \frac{1}{e^{\omega + \frac{1}{c}} + 1}.$$

(Pokračování.)