Juraj Hronec

Diferenciálne systémy s konstantnými koeficientmi

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 145--146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121282

cos nx a sin nx. Jak Goldstein r. 1927 ukázal, tu při této definici existují určité hodnoty q, při nichž všechny koeficienty příslušných Fourierových řad se stávají nekonečně velkými, vyjma koeficienty při cos nx a sin nx. Stanovíme-li ale podmínku, aby

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_0^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{se}_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi;\ n \neq 0, \tag{6}$$

pak se opět pro $q = 0$ redukují funkce Mathieuovy na cos nx a sin nx, ale pro dotyčné hodnoty q se koeficienty u sin nx a cos nx stávají rovné nule, kdežto ostatní koeficienty zůstávají konečnými.

Přirozeně se tu vyskytuje problém konvergence takto vzniklých rozvojů v řady funkcí Mathieuových.

Zajímavým problémem (R. S. Varma 1931) jsou vztahy mezi rozličnými Mathieuovými funkcemi a asymptotické rozvoje zejména funkcí Mathieuových druhého druhu.

Účelem této přednášky bylo upozorniti na teorii funkcí Mathieuových a na nové problémy tu se vyskytující.

Diferenciálne systémy s konstantnými koeficientmi.

J. Hronec, Brno.

Vezmime lin. dif. systém

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} y_\lambda, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

kde $a_{i\lambda}$ sú konstanty. Keď použijeme substitúcie $(y_{ik}) = (a_{ik})\,(\eta_{ik})$, $(\zeta_{ik}) = (\gamma_{ik})\,(\eta_{ik})$, $(z_{ik}) = (\gamma_{ik})\,(y_{ik})$, kde je $\| \gamma_{ik} \| \neq 0$, vtedy sú $(z_{ik}) = (b_{ik})\,(\zeta_{ik})$, $(b_{ik}) = (\gamma_{ik})\,(a_{ik})\,(\gamma_{ik})^{-1}$. Určíme-li γ_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ z lin. systémov

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_{i\lambda}\,(a_{\lambda k} - \delta_{\lambda k} r_i) = 0, \tag{2}$$

kde r_i sú korene charak. rovnice n-ho stupňa, vtedy je $(z_{ik}) = (\delta_{ik} r_i)\,(\zeta_{ik})$, kde je $\delta_{ik} = 1$ pri $i = k$ a zase je $\delta_{ik} = 0$ pri $i \neq k$. Použijeme-li lin. substitúciu

$$z_i = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{i\nu} y_\nu, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

kde $\gamma_{i\nu}$ určíme z(2), dostaneme tento k a n o n i c k ý tvar dif. systému

$$\frac{dz_i}{dx} = r_i z_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Jestliže charak. rovnica má samé rozličné korene, z (3) dá sa určiť systém riešenia $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dif. systému (1).

Keď charak. rovnica má $n - \varkappa$ násobný koreň, pomocou (4) z (3) dostaneme

$$y_\nu = \sum_{i=1}^{\varkappa+1} d_{\nu i} c_i e^{r_i x} + \sum_{i=\varkappa+2}^{n} d'_{\nu i} y_i, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa+1), \tag{5}$$

kde $d_{\nu i}$ a $d'_{\nu i}$ sú determinanty a konstanty. c_i sú integračné konstanty. Pomocou týchto dostaneme z (1) nehomogenný lin. dif. systém o $n - \varkappa - 1$ rovniciach pre $y_{\varkappa+2}, \ldots, y_n$. Každá funkcia $y_1, y_2, \ldots, y_n$ takto určená obsahuje n integ. konst. hodnôt, preto riešenie je obecné.

Jestliže je r_{α_1} $\alpha_1, \ldots, r_{\alpha_\varrho}$ zase α_ϱ-násobným koreňom $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_\varrho = n)$, vtedy pre $\gamma_{i\lambda}$ máme ϱ lin. hom. systémov tvaru (2), (3), (4) a (5).

O interpolaci.

V. Hruška, Praha.

V poslední době byly vydány některé mnohamístné tabulky bez vyšších diferencí, což v nich velmi znesnadňuje interpolaci. Uvádím na př. K. Hayashiovy Sieben- u. mehrstellige Tafeln ... a Andoyerovy 14místné Nouvelles Tables Trigonométriques. K interpolaci v těchto tabulkách osvědčilo se mi užívati mnohočlenů, které pro $x = a$ a pro $x = a + h$ nabývají týchž hodnot jako interpolovaná funkce $f(x)$ a jichž derivace v těchto bodech nabývají resp. hodnot $f'(a)$ a $f'(a + h)$. Takovou formuli [Láska-Hruška, Teorie a prakse numerického počítání, str. 130, vzorec (8)]

$$f(a + nh) = f_0 + n^2 (3 - 2n)(f_1 - f_0) + n(n - 1)^2 h f'_0 + n^2 (n - 1) h f'_1 + Z_3(x), \quad x = a + nh, \quad 0 \leqq n \leqq 1, \tag{1}$$

$$Z_3(x) = \tfrac{1}{24} n^2 (n - 1)^2 h^4 f^{IV}(a + \Theta h), \qquad 0 < \Theta < 1 \tag{2}$$

lze snadno psáti v symetrickém tvaru velmi vhodném pro numerický výpočet, klademe-li v ní $m = 1 - n$,

$$f(a + nh) \approx m^2 (3 - 2m) f_0 + n^2 (3 - 2n) f_1 + nmh (m f'_0 - n f'_1). \tag{3}$$

Práce spojená s interpolací touto formulí jest přibližně stejná jako při interpolaci Everettovou formulí o druhých diferencích, hranice zbytku vzorce (3) však jest

$$| Z_3(x) | < \tfrac{1}{384} h^4 f^{IV}(a + \Theta h),$$