Nicolas Kryloff; Nicolas Bogoliuboff

Méthodes de mécanique non linéaire appliquées à la théorie des oscillations stationnaires

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 107--115

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121274`

Méthodes de mécanique non linéaire appliquées à la théorie des oscillations stationnaires.

Prof. Dr. *Nicolas Kryloff* et Dr. *Nicolas Bogoliùboff*, Kieff.

Les différents problèmes de la théorie des oscillations non linéaires ont été l'objet de nombreux travaux déjà du début même du Calcul Infinitésimal. Ainsi par ex. dans les travaux des fondateurs de l'Analyse moderne, dans les mémoires bien connus d'Euler, de Lagrange, de Laplace et d'autres chercheurs, dont les noms brillent d'un vif éclat sur l'horizon mathématique des siècles passés, ont été étudiés les cas différents du mouvement périodique des planètes. Il est à noter cependant que ce n'est que vers la fin du XIX siècle que dans les immortels travaux, universellement connus, de H. Poincaré et de A. Liapounoff ont été élaborées les méthodes mathématiques rigoureuses pour l'étude des solutions périodiques des équations différentielles non linéaires.

Ces solutions périodiques au point de vue de mathématique et de physique ne représentent, bien entendu, qu'une classe assez particulière des solutions et H. Poincaré lui même voit par ex. le mérite principal de ses méthodes en ce qu'elle permettent d'établir avec une rigueur mathématique suffisante toute une série des résultats dans le domaine où comme il s'exprime on faisait „bon marché" de la rigueur mathématique exigée dans d'autres branches de l'analyse.

Au commencement de ce siècle a été faite par P. Bohl, fondateur de la théorie des fonctions quasi-périodiques, une tentative hardie et importante d'étendre les résultats de Poincaré-Liapounoff à une classe plus générale des solutions quasi-périodiques qui peuvent avoir une importance toute particulière pour les applications.

Dans ses travaux bien connus P. Bohl a considéré les équations différentielles qui correspondent au point de vue de la physique aux systèmes oscillants autopériodiques (c'est à dire aux systèmes ne pouvant pas produire des oscillations propres non amorties) se trouvant sous l'influence d'une perturbation quasi-périodique suffisamment petite.

Le problème de l'existence des solutions quasi-périodiques des équations différentielles correspondantes aux systèmes oscillants autopériodiques restait donc ouvert et, à notre savoir, l'existence de telles solutions n'a pas été établi jusqu'à présent avec une rigueur mathématique nécéssaire pour les classes plus ou moins générales des équations différentielles non linéaires.

On doit noter ici cependant les profondes recherches de H. Poincaré lui même sur les caractéristiques à la surface du tore, brillamment complétées en 1932 par M. A. Denjoy et relatives à l'équation

$$\frac{d\Theta}{dt} = f(t, \Theta)$$

où la fonction $f(t, \Theta)$ est périodique en t et Θ avec le période 2π.

D'autre part par les recherches de G. Birkhoff relatives aux systèmes canoniques à deux dégrés de la liberté a été mis en pleine lumière le rapport intime entre l'existence de la courbe invariante (par rapport à une certaine transformation ponctuelle correspondante à des équations différentielles données) et l'existence des solutions quasi-périodiques.

De même à l'illustre géomètre américain appartiennent les résultats profonds rélatifs aux différentes propriétés des mouvements dits „récurrents".

Remarquons en passant qu'en se basant sur les résultats de M. Birkhoff on peut entre autre établir que tout mouvement recurrent, stable au sens de Liapounoff, sera presque périodique et même les résultats plus généraux. Récemment les résultats intéressants ont été obtenus dans cette direction par M. Ph. Franklin et M. H. Bohr, fondateur de la théorie moderne des fonctions presque-périodiques.

En terminant cette brève esquisse de l'histoire de la question on doit attirer l'attention sur l'oeuvre du célèbre savant italien M. Tullio Levi-Civita qui récemment a établi entre autre qu'en général il n'existe pas des familles analytiques des solutions quasi-périodiques des équations canoniques.

Dans nos travaux dans le domaine de la Mécanique non Linéaire (théorie des oscillations non linéaires) nous avons posé le problème d'établir la correspondance entre les propriétés de quasi-périodicité des solutions exactes des équations différentielles non linéaires, rélatives à des systèmes autopériodiques et les propriétés de leurs prémières approximations.

Ces approximations peuvent être aisément formées à l'aide des méthodes spéciales élaborées par nous, et très élémentaires du reste, en partant des données du problème.

§ 1. En présentant ici le court résumé de nos recherches, considérons prémièrement les oscillations, sensiblement harmoniques, des systèmes à un dégré de liberté décrits par les équations de la forme suivante

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left((t, x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon\right) \tag{1}$$

où ε — le petit paramètre, $\mathrm{f}\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \varepsilon\right)$ — la fonction analytique présentée par le dévéloppement

$$\mathrm{f}\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \varepsilon\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \, \mathrm{f}_n\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right),$$

convergente pour les petites valeurs de ε. Supposons de plus que les fonctions

$$\mathrm{f}_n\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

sont des polynomes entiers par rapport à $\sin t$, $\cos t$, x, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

Deux cas sont à distinguer: le cas de résonance et celui de non résonance.

On se trouve dans le cas de non résonance si ω n'est pas au voisinage des nombres de la forme

$$\frac{r}{s}, \tag{2}$$

où r et s sont des nombres entiers pour lesquels les expressions

$$\begin{aligned} L_{r,s} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \mathrm{f}_0(\Theta, a \sin \varphi, a\omega \cos \varphi) \cos \varphi \, e^{-j(r\Theta + s\varphi)} \, \mathrm{d}\Theta \, \mathrm{d}\varphi; \\ M_{r,s} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \mathrm{f}_0(\Theta, a \sin \varphi, a\omega \cos \varphi) \sin \varphi e^{-j(r\Theta + s\varphi)} \, \mathrm{d}\Theta \, \mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

seront différents de zéro.

Le cas de résonance sera celui où la fréquence ω se trouve au voisinage d'un des nombres (2), à savoir

$$\omega = \frac{r}{s} + \varepsilon\sigma. \tag{4}$$

Nos recherches sont basées sur la construction d'une méthode spéciale des transformations succéssives, et cette méthode, en continuant l'itération indéfiniment, permet d'obtenir les solutions formelles des équations différentielles considérées sous la forme de certains dévéloppements procédant suivant les puissances de ε.

Il est à remarquer que ces dévéloppements dans le cas de non résonance sont analogues aux dévéloppements bien connus (dans la Mécanique Céleste) de Lindstedt et contiennent des „petits diviseurs".

En général les développements construits par nous sont divergents quelque petit que soit ε et en ces cas de la non intégrabilité (términologie de M. Birkhoff) ils ne peuvent pas donc être utilisés pour l'étude rigoureuse des propriétés des solutions exactes.

En s'arrêtant par conséquent à la première itération nous avons réçu ainsi les équations de la première approximation dont la solution nous fournit immédiatement l'expression de la solution approchée.

Ainsi dans le cas de non résonance on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\omega} F(\bar{a}), \\ \frac{d\bar{\Theta}}{dt} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega \bar{a}} \Phi(\bar{a}), \end{aligned} \tag{5}$$

où

$$F(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\Theta, a \sin \varphi, a\omega \cos \varphi) \cos \varphi \, d\Theta \, d\varphi$$

$$\Phi(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\Theta, a \sin \varphi, a\omega \cos \varphi) \sin \varphi \, d\Theta \, d\varphi.$$

En étudiant de près la correspondance entre les propriétés des solutions approchées

$$x = \bar{a} \sin \bar{\Theta} + \varepsilon \sum_n \sum_m \frac{f_{n,m}(\bar{a})}{\omega^2 - (n + m\omega)^2} e^{j(nt + m\Theta)}, \tag{6}$$

où $\qquad n^2 + (1 - m^2)^2 \neq 0$

et $f_{n,m}$ sont les coefficients de Fourier dans le développement de la fonction

$$f_0(t, a \sin \Theta, a\omega \cos \Theta)$$

et les propriétés des solutions exactes à l'aide des méthodes basées sur les théorèmes profonds de Poincaré-Denjoy (dont nous avons parlé plus haut) nous avons obtenu des résultats, dont les plus importants sont les suivants: Si l'équation algébrique

$$F(a) = 0$$

possède la racine simple a_0 différente de zéro, alors l'équation différentielle considérée admet une famille des solutions quasi-périodiques de la forme

$$x = z(t, \nu t)$$

où ν est une fonction continue de z vérifiant la condition de Lipschitz et $z(\Theta, \varphi)$ — une fonction périodique de Θ, φ (avec le période 2π) dépendant en général de ε.

Si ν est irrationnel ces solutions sont effectivement quasi-périodiques au sens de P. Bohl avec les deux fréquences fondamentales et dépendent d'une constante d'intégration.

Dans le cas, où ν est rationnel, la famille considérée dégénère en une famille des solutions simplement périodiques qui forment en général un ensemble discret. Si $F'(a_0) < 0$ la famille considérée possède la stabilité positive (stabilité dans le futur) et si $F'(a_0) > 0$ la stabilité sera négative (stabilité dans le passé). Nous avons démontré de plus que les expressions

$$z(\Theta, \varphi),\ \nu$$

ne sont pas en général analytiques dans leur dépendance du paramètre ε, de sorte que les séries formelles

$$\begin{aligned} z(\Theta, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m z_m(\Theta, \varphi). \\ \nu &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \omega_m \end{aligned} \tag{7}$$

divergent en général quelque petit que soit ε.

Ces développements possèdent néanmoins certaines propriétés assymptotiques. Ainsi, comme nous avons démontré, les inégalités suivantes ont lieu:

$$\begin{aligned} &\left| \nu - \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^m \omega_m \right| \leqq C_{n-1} \varepsilon^{n+1}, \\ &\left| z(\Theta, \varphi) - \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^m z_m(\Theta, \varphi) \right| \leqq C^*_n \varepsilon^{n+2} N + K^*_n D(\nu, N) + L^*_n \varepsilon^{n+1} \end{aligned} \tag{8}$$

où

$$C_n,\ C^*_n,\ K^*_n,\ L^*_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sont des constantes ne dépendantes ni de ε, ni de N; $D(\nu, N)$ est la distance maximum entre les deux points consécutifs (sur la circonférence du rayon un) avec les coordonnées angulaires

$$\Theta = \nu n; \qquad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Ici N signifie un nombre positif entier arbitraire qu'on pourrait choisir de manière à rendre les majorations (8) minimum.

Dans le cas de résonance nous établissons les théorèmes analogues avec cette différence essentielle, qu'au lieu des racines de l'équation algébrique $F(a) = 0$ il s'agit ici des solutions périodiques des équations de la première approximation qui prennent à présent la forme que voici:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \varepsilon\, F(\bar{a}, \overline{\Theta}) \\ \frac{d\overline{\Theta}}{dt} &= \varepsilon\, \Phi(\bar{a}, \overline{\Theta}), \end{aligned} \tag{9}$$

où

$$F(a, \Theta) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{ns+mr=0}\sum L_{n,m}(a)\, e^{jm\Theta},$$

$$\Phi(a, \Theta) = G - \frac{1}{\omega_0 a} \sum_{ns+mr=0}\sum M_{n,m}(a)\, e^{jm\Theta}.$$

Au lieu du signe de $F'(a_0)$ on doit tenir compte ici du signe de l'exposant caractéristique rélatif à la solution périodique considérée.

Dans les deux cas (de résonance et de non résonance) nous avons démontré que les solutions simplement périodiques forment un ensemble partout dense.

En d'autres termes, étant donné une valeur suffisamment petite ε_0 (du paramètre) on peut toujours trouver une telle valeur ε_1 (si proche à ε_0 que l'on veut) que pour ε_1 les solutions quasi-périodiques considérées dégénèrent en des solutions simplement périodiques.

§ 2. A l'aide de nos méthodes de la Mécanique non Linéaire nous avons traité aussi les oscillations sensiblement harmoniques d'un système à deux dégrés de liberté, dont les équations se présentent sous la forme

$$\frac{d^2 q_s}{dt^2} + \omega_s^2 q_s = \varepsilon\, f_s\left(q_1, q_2, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}\right); \quad s = 1, 2 \tag{10}$$

où ε — le petit paramètre et f_1, f_2 — les fonctions analytiques.

Supposons que le rapport ω_1/ω_2 soit un nombre irrationnel, vérifiant l'inégalité de Liouville

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{n}\right| \geqq \frac{A}{n^a}; \quad A, a = \text{const.}; \ \alpha \geqq 2,$$

et de plus que les équations de la première approximation, qui seront dans le cas actuel

$$\frac{da_k}{dt} = \varepsilon\, F_k(a_1, a_2); \quad k = 1, 2$$

où

$$F_k(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k\{a_1 \sin \Theta_1, a_2 \sin \Theta_2, a_1\omega_1 \cos \Theta_1, a_2\omega_2 \cos \Theta_2\} \cos \Theta_k \, d\Theta_1 \, d\Theta_2$$

admettent un point d'équilibre stable

$$F_k(a_1^0, a_2^0) = 0, \quad k = 1, 2$$

dont les exposants caractéristiques sont différents et possèdent les parties réelles négatives.

Alors pour les valeurs suffisamment petites du paramètre ε les équations (10) admettent une famille stable des solutions stationnaires qui peuvent être présentées sous la forme

$$q_k = Q_k(\tau, \nu\tau),$$

$$t = \int_0^t T(\tau, \nu\tau)\, d\tau; \quad T > 0$$

où $Q_k(\Theta, \varphi)$, $T(\Theta, \varphi)$ sont les fonctions périodiques de Θ, φ (avec le période 2π), dépendant en général de ε et ν est une fonction continue de ε vérifiant la condition de Lipschitz.

En examinant de près les solutions appartenant à cette famille dans leur dépendance de la variable t nous avons établi pour ce cas aussi que les solutions simplement périodiques forment un ensemble partout dense, car pour chaque valeur de ε pour laquelle ν est rationnel nos solutions dégénèrent en solutions simplement périodiques.

Pour l'étude des solutions, dans le cas où ν est irrationnel, nous avons eu recours à une équation spéciale en différences finies

$$\Theta_{n+1} - \Theta_n = f(\Theta_n), \tag{11}$$

où $f(\Theta)$ est une fonction périodique de Θ (avec le période 2π), dépendant de ε et qui peut être effectivement formée en partant des données du problème.

La solution générale de cette équation (11) pour ν irrationnel se présente sous la forme

$$\Theta_n = \nu n + \psi + E(\nu n + \psi)$$

où $E(\Theta)$ est une certaine fonction périodique de Θ avec le période 2π et ψ est une constante arbitraire.

Le résultat que nous avons démontré est le suivant: si $E(\Theta)$ possède la troisième dérivée de carré intégrable, alors les solutions des équations (10) appartenant à la famille considérée sont quasi-périodiques au sens de P. Bohl pour toutes les valeurs irrationnels de ν sauf celles appartenant à un certain ensemble de mésure nulle.

Les résultats qui viennent d'être énumérés restent vrais, à ce qu'il paraît, même si le rapport ω_1/ω_2, tout en restant irrationnel, ne vérifie pas les conditions de Liouville, à ce sujet nous éspérons de revenir dans nos articles prochains.

Pour les systèmes à deux dégrés de liberté le cas de résonance peut être également traité. Les formules analogues à celles de (8) pour la majoration de l'erreur commise en utilisant les développements formels s'obtiennent aisément dans les deux cas considérés (cas de résonance et de non résonance).

Pour conclure remarquons que les méthodes mathématiques dont nous nous sommes servis pour la démonstration des résultats, ci-dessus énumérés, se prètent non seulement pour l'étude des oscillations sensiblement sinusoidales, mais restent encore valables aussi pour l'étude des oscillations de toute autre nature, par exemple pour traiter les problèmes de la perturbation des oscillations de rélaxation.

Ce sujet a été examiné dans notre monographie ,,Méthodes de la Mécanique non Linéaire appliquées à l'étude des oscillations stationnaires" (actuellement sous presse) où se trouvent les démonstrations des théorèmes énumérés brièvement dans ce résumé.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE DES TRAVAUX RÉCENTS

du prof. dr. Nicolas Kryloff et dr. Nicolas Bogoliùboff dans le domaine de la Mécanique non Linéaire et de ses différentes applications.

1. ,,Quelques exemples d'oscillations non linéaires". Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. 194, p. 957 (14. III. 1932).

2. ,,Sur le phénomène de l'entraînement en radiotechnique". Ibid., t. 194, p. 1064 (21. III. 1932).

3. ,,Les phénomènes de démultiplication de fréquence en radiotechnique". Ibid., t. 194, p. 1119 (29. III. 1932).

4. ,,Sur quelques propriétés générales des résonances dans la Mécanique non Linéaire". Ibid., t. 197, p. 903 (23. X. 1933).

5. ,,Problèmes fondamentaux de la Mécanique non Linéaire". Revue générale des Sciences (N^0 du 15. I. 1933).

6. ,,Recherches sur la stabilité dynamique des machines synchrones". (Monographie. En langue russe avec une préface en français) 100 pp., Kieff, 1932.

7. ,,Recherches sur la stabilité longitudinale des avions". (Monographie en russe avec un résumé en français.) 60 pp., Kieff, 1932.

8. ,,Recherches sur la stabilité statique et la stabilité dynamique des machines synchrones". Rapport N^0 14 à la 3ème Section du Congrès International d'Electricité, Paris, 1932.

9. ,,Problèmes fondamentaux de la Mécanique non Linéaire" (en russe). Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, N^0 4, 1933.

10. ,,Fundamental Problems of the Non Linear Mechanics". Congrès International des Mathématiciens, Zurich, 1932.

11. „Méthodes nouvelles de la Mécanique non Linéaire dans leur application à l'étude du fonctionnement de l'oscillateur à lampe. Partie première. Etude des régimes stationnaires dans le cas de l'absence des forces extérieures périodiques". N⁰ 7 dans la Collection de monographies scientifiques du prof. dr. N. Kryloff et dr. N. Bogoliùboff (en russe avec une préface en français), 242 pp., Moscou (sous presse).

12. „Méthodes nouvelles de la Mécanique non Linéaire dans leur application à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonance s'y rapportant". 100 pp. (sous presse).

13. „Les méthodes symboliques de la Mécanique non Linéaire dans leur application à l'étude de résonance dans l'oscillateur" (en russe). Bull. de l'Académie des Sciences de l'URSS; 1934.

14. „Über einige Methoden der nichtlinearen Mechanik in ihren Anwendungen zur Theorie der nichtlinearen Resonanz". Bauzeitung, 1934, Bd. 103, Nr. 22 u. 23.

15. „Sur quelques développements formels dans la Mécanique non Linéaire" (sous presse).

16. „L'application des méthodes de la Mécanique non Linéaire à la théorie de la perturbation des systèmes canoniques (sous presse).

17. „Méthodes de la Mécanique non Linéaire appliquées à l'étude des oscillations stationnaires" (sous presse).