Bohuslav Hostinský

Sur les progrès récents de la théorie des probabilités

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 94--106

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121253`

Sur les progrès récents de la théorie des probabilités.

B. Hostinský, Brno.

La théorie des probabilités a été, dans ces derniers ans, l'objet d'un très grand nombre de travaux de sorte qu'il est presque impossible de se rendre compte de tous leurs résultats. Mais plus le nombre de travaux sur les probabilités s'accroît chaque année, plus leur problèmes et méthodes sont variés, plus il est intéressant de connaître les vues générales et les principales directions de recherche dans ce genre de calcul.

Je me propose aujourd'hui de donner une revue de certaines recherches modernes qui se rattachent à une loi de Laplace et au théorème de Bernoulli. Je tâcherai de montrer d'abord quelles étaient les généralisations immédiates de ces résultats classiques; ensuite je voudrais attirer votre attention à la notion de limite en probabilité et aux diverses notions qui en résultent, à l'usage des notions d'espérance mathématique et à celle de moment et enfin à la théorie des probabilités en chaîne et leurs applications en physique.

I. *Le problème de Laplace et la loi des grands nombres.*

Supposons qu'il y ait une probabilité constante a pour qu'une certaine expérience réussisse. Dans une série de n expériences consécutives il y aura un certain nombre m ($m \leqq n$) de celles qui ont réussi. Désignons par z un nombre positif quelconque et par $P(A)$ la probabilité pour qu'une relation A ait lieu. Avec ces notations le théorème de Laplace s'exprime par la formule

$$\lim_{n=\infty} P\left(| m - na | < z\sqrt{2na(1-a)}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2}\,du, \tag{1}$$

et la loi de Bernoulli s'écrit

$$\lim_{n=\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - a\right| > \varepsilon\right) = 0, \tag{2}$$

ε étant un nombre positif donné quelconque.

Plus généralement, supposons que, dans une série d'expériences, les conditions varient d'une expérience à l'autre; la $k^{\text{ième}}$ expérience pourra donner différents résultats avec les probabilités respectives $p_k^{(1)}, p_k^{(2)} \ldots$, dont la somme $= 1$. Attachons à chacun de ces résultats une valeur numérique $x_k^{(i)}$ de la quantité aléatoire x_k.

La valeur moyenne ou espérance mathématique de x_k sera déterminée par la formule

$$E(x_k) = p_k^{(1)}\, x_k^{(1)} + p_k^{(2)}\, x_k^{(2)} + \dots$$

Nous aurons donc une suite de quantités aléatoires que nous supposons indépendantes entr'elles

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \tag{3}$$

Posons

$$E(x_n) = a_n, \quad b_n = E(x_n - a_n)^2$$

et demandons-nous quelles conditions doivent être satisfaites pour que (z étant un nombre positif)

$$\lim_{n=\infty} P\left(\left| \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \right| < z \sqrt{2 \sum_{i=1}^{n} b_i} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2}\, du \tag{4}$$

et

$$\lim_{n=\infty} P\left(\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - a_i}{n} \right| > \varepsilon \right) = 0 \tag{5}$$

ε étant un nombre positif quelconque. Les formules (4) et (5) comprennent (1) ou (2) comme des cas particuliers.

On dit, suivant un usage employé dans les travaux russes, que la suite (3) obéit à la loi des grands nombres, si (5) a lieu. Cette loi est donc une extension du théorème de Bernoulli.

Le problème de trouver la probabilité pour que la somme d'un très grand nombre de quantités aléatoires soit comprise dans des limites données [formule (4)] a été proposé par Laplace et repris ensuite par Tchébycheff et par son école. Liapounoff, Markoff, Khintchine, S. Bernstein, Kolmogoroff et autres ont précisé et étendu les résultats de Tchébycheff. Quant à la loi des grands nombres (5), Markoff a démontré ([1]) qu'elle s'applique, si

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} b_n = 0. \tag{6}$$

Dans les cas où cette formule ne s'applique pas, il faut employer d'autres critères. Pour cela Tchébycheff a introduit les moments. Le moment du $k^{\text{ième}}$ degré de x_i est défini par la formule

$$m_i^{(k)} = \varepsilon(x_i - a_i)^k. \tag{7}$$

Le critère le plus général de validité de (4) a été trouvé par Liapounoff ([1]); il emploie les moments d'ordre 2 (c'est à dire les quantités b_i) et les moments d'ordre $2 + \delta$, δ étant une quantité positive. Plus tard Lindeberg ([2]) établit une condition plus simple qui ne fait intervenir que les moments du second degré $m_1^{(2)} = b_1$,

$m_2^{(2)} = b_2, \ldots$ mais qui leur impose une certaine propriété qui n'est pas exigé dans l'énoncé de Liapounoff. Notons que Lindeberg suppose que x_i puisse varier d'une façon continue; le moment du $k^{\text{ième}}$ degré du x_i est chez lui donné par l'intégrale de Stieltjes

$$m_i^{(k)} = \int x_i^k(u)\, \mathrm{dF}(u);$$

les valeurs possibles de x_i sont ici exprimées en fonction du paramètre u et $\mathrm{dF}(u) = P\,(u < x_i < u + \mathrm{d}u)$.

Un progrès essentiel a été réalisé ici par Kolmogoroff [3] qui, au moyen d'une méthode due à Petrovsky [4], ramène le calcul du second membre de (4) à l'intégration de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Au moyen des fonctions qui satisfont à une équation peu différente de (8) Kolmogoroff arrive à démontrer (4) sous les conditions de Lindeberg. Un exposé de cette méthode se trouve dans un ouvrage récent de Chinčin (Khintchine) [5]. Remarquons que des intégrales telles que le second membre de (4) se présentaient d'abord dans les formules donnant une expression approchée de certaines probabilités, qu'elles se sont présentées dans la théorie de la chaleur et de la diffusion et qu'aujourd'hui elles donnent des valeurs limites de probabilités telles que (4) et que l'on les obtient en intégrant l'équation de la chaleur ou équations analogues.

Je rappelle encore que des inégalités plus générales que (4) ont été étudiées par Kolmogoroff [6] et que Khintchine [7] a trouvé des inégalités de nature assez différente de (4).

II. *Notion de convergence en probabilité.*

Le théorème de Bernoulli (2) peut être résumé en disant que le rapport m/n s'approche indéfiniment de a quand n augmente indéfiniment. Mais ce n'est pas une convergence vers une limite au sens ordinaire. Cantelli [8] a donné au théorème de Bernoulli une forme nouvelle en introduisant la notion de convergence en probabilité. Nous ferons usage de la notation introduite par Slutsky; la formule (2) sera alors remplacée par la formule équivalente

$$\lim_{\substack{B \\ n=\infty}} m/n = a;$$

lim B veut dire limite en probabilité (ou dans le sens du Calcul des probabilités); B rappelle le nom de Bernoulli. Le rapport m/n tend donc vers a en probabilité. Fréchet [9] a montré que cette notion de convergence en probabilité est tout à fait analogue de la convergence en mesure sous la condition de remplacer la notion de mesure par celle de probabilité. En effet soit $\mathbf{f}_1(x), \mathbf{f}_2(x), \ldots$ une suite de fonctions définies pour les valeurs de x appartenant à un certain ensemble mesurable. Si la mesure de l'ensemble où $| f - f_n | > \varepsilon$ a pour limite (pour $n = \infty$) zéro, on dit que la suite $f_1, f_2, \ldots$ converge en mesure vers f.

La convergence en probabilité de m/n vers a a été étudiée en détail dans une série de travaux par Cantelli (10), (11), Fréchet (9), Slutsky (12), Mezzanotte (13), Khintchine (14), Kolmogoroff (15) et P. Lévy (16). Désignons plus précisément par m_n le nombre d'expériences qui ont réussi, parmi les n premières. Voici quelques problèmes qui se posent. Remarquons d'abord qu'il faut distinguer deux probabilités suivantes, ε étant donné:

$$P\left(\left|\frac{m_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right), \text{ et}$$

$$P\left(\left|\frac{m_n}{n} - a\right| > \varepsilon, \left|\frac{m_{n+1}}{n+1} - a\right| > \varepsilon, \left|\frac{m_{n+2}}{n+2} - a\right| > \varepsilon \ldots\right).$$

Or le théorème de Bernoulli consiste à ce que la première tend vers zéro si n augmente indéfiniment. Il faut le démontrer encore pour la seconde; cette démonstration a été faite par Cantelli (10).

D'autres questions se posent sur les signes des quantités

$$\frac{m_1}{1} - a, \frac{m_2}{2} - a, \ldots, \frac{m_n}{n} - a, \ldots$$

Il y a, avec une probabilité égale à l'unité, une infinité de termes positifs dans cette suite et une infinité de négatifs. Cette probabilité, égale à l'unité, doit être considérée comme distincte de la certitude. Considérons en effet le cas où il y a un nombre fini de termes positifs, tous les autres étant négatifs. Au point de vue mathématique, ce cas est possible, mais sa probabilité est égale à zéro et celle du cas contraire est égale à l'unité. On peut se demander quel est le rapport entre la probabilité pour que la différence $m/n - a$ soit positive et entre celle pour que $m/n - a$ soit négative. Ce rapport dépend du moment du troisième ordre. Des questions analogues se posent sur les séries plus générales (3).

Une série infinie de quantités aléatoires est-elle convergente ou non? Cette question dont l'étude a été commencée par Borel (17) en 1909 a été objet de travaux de Khintchine et de Kolmogoroff (18) qui ont trouvé un critère de convergence c'est à dire la probabilité pour que la série soit convergente. P. Lévy (19) a continué ces recherches; il introduit, au lieu de sommes de variables aléatoires, des intégrales de Stieltjes $x(t) = \int dx(t)$ où la variable t remplace l'indice de sommation (ou le nombre n de termes) dans le cas précédent. Nous avons déjà rencontré une fois l'intégrale de Stieltjes; pour comprendre, dans une seule formule, la valeur moyenne d'une variable aléatoire x_i qui varie d'une façon continue ou discontinue on écrit $\int x_i(u)\,\mathrm{dF}(u)$. Maintenant, en remplaçant l'indice i par une variable continue t on aura, au lieu de la somme $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ l'intégrale $\int \mathrm{d}x(t)$.

Je vais maintenant vous dire quelques mots sur le point de vue de E. Slutsky (20) qui en prenant comme base la notion de „convergence en probabilité" (ou convergence stochastique) en déduit les notions de continuité en probabilité, de dérivée et de l'intégrale en probabilité. Slutsky suppose qu'une valeur aléatoire $x(t)$ correspond à chaque point t d'un intervalle donné (a, b) et qu'il résultera une valeur définie $x(t)$ pour chacune de ces variables en faisant sur chacune une épreuve. Il admet que t et $t + h$ étant deux points dans (a, b), les quantités

$$E[x(t)], \qquad E[x(t)]^2, \qquad E[x(t)\,.\,x(t+h)] \tag{9}$$

soient des fonctions continues de t et de h. Il en résulte que

$$\lim_{h=0} P\,(|\,x(t+h) - x(t)\,| < \varepsilon) = 1$$

ce qui exprime la condition que la fonction aléatoire $x(t)$ soit une fonction continue en probabilité. Pour définir l'intégrale en probabilité d'une fonction $x(t)$ on commence par construire la somme comme dans la définition ordinaire de l'intégrale. Cette somme n'admet pas de limite si les intervalles formés par les points de division tendent vers zéro; mais la probabilité pour qu'elle ne diffère plus de ε en valeur absolue d'un certain nombre tend vers l'unité sous les hypothèses (9). Il y a donc une intégrale en probabilité. De même en admettant certaines hypothèses sur les valeurs moyennes du rapport $\Delta x/\Delta t$ on trouve qu'il y a une dérivée en probabilité.

En somme, il s'agit dans toutes ces définitions et constructions, d'envisager les propriétés des fonctions d'une variable réelle à un point de vue particulier. On considère un ensemble de fonctions, les valeurs que prend une telle fonction sont choisies arbitrairement, mais on fait des suppositions telles que (9) sur la continuité des valeurs moyennes. La notion d'une fonction qui admet l'intégrale en probabilité ou la dérivée en probabilité est plus générale de celle d'une fonction intégrable ou dérivable au sens ordinaire; elle comprend ces dernières comme des cas particuliers.

III. *Valeurs moyennes et moments.*

La démonstration la plus simple du théorème de Bernoulli (2) consiste à employer la formule de Bienaymé-Tchébycheff

$$P\,(\,|\,x\,| \geqq c) \leqq E(x^2)/c^2; \tag{10}$$

il suffit de poser $x = m$, $c = n/a$ pour obtenir (2). Elle est applicable aussi dans d'autres recherches et elle est susceptible de différentes généralisations comme l'ont exposé Cantelli ([21]) et Khintchine ([22]). Revenons aux notations (3) et au problème général (5).

Tchébycheff et ceux qui ont après lui continué les recherches sur la loi des grands nombres ont essayé d'introduire les moments supérieurs des quantités (3). Nous savons que Markoff a montré que (6) suffit pour la validité de la loi. Donc, dans ce cas où (6) s'applique il suffit de considérer les moments $b_i = E(x_i - a_i)^2$ du second degré. Mais si dans des cas plus généraux (6) ne s'applique pas et on peut penser qu'il faut introduire des moments supérieurs. Markoff qui s'occupait de cette question a exprimé ses doutes sur ce qu'il fût possible de former, au moyen de moments seuls, les conditions nécéssaires et suffisantes pour la validité de la loi des grands nombres. Khintchine ([23]) a montré ensuite qu'il est impossible d'obtenir ces conditions sous une forme telle que les moments seuls (de degré quelconque) y interviennent. En effet il a construit deux séries de variables aléatoires telles que le moment de degré arbitraire de la $k^{\text{ième}}$ variable dans la première série est égal au moment correspondant dans la seconde; pourtant, la loi des grands nombres s'applique à la première et pas à la seconde.

Je voudrais faire encore une remarque sur le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires x et y. Supposons, pour simplifier, que les valeurs moyennes soient égales à zéro et que les valeurs moyennes de leurs carrés soient $= 1$. Alors le coefficient de corrélation r ne sera autre chose que la valeur moyenne ou espérance mathématique de leur produit

$$r = E(xy) = \sum_i \sum_k p_{ik}\, x_i\, y_k$$

où

$$p_{ik} = P\,(x = x_i,\ y = y_k).$$

Le coefficient r joue un rôle dans certaines recherches; beaucoup de chercheurs sont disposés à introduire r dans les calculs sans employer explicitement les probabilités p_{ik}.

IV. *Chaînes de Markoff et problèmes voisins.*

Dans une communication présentée au premier Congrès des mathématiciens des Pays slaves en 1929 ([24]) j'ai exposé mes premières recherches sur la théorie des chaînes fondée par Markoff sous une forme purement algébrique et employée plus tard (indépendamment de Markoff) sous une autre forme par Smoluchowski dans ses travaux sur la diffusion. J'ai commencé à étudier ces questions en 1927 en m'appuyant surtout sur un travail de Hadamard ([25]), sans connaître d'abord les mémoires de Markoff. Plus tard, dans mes cours à l'Université de Brno, dans les leçons que j'ai eu à la Faculté des Sciences de l'Université Charles à Prague ([26]) et à l'Institut Poincaré à Paris ([27]) j'ai insisté sur l'importance des idées de Markoff; j'ai tâché moi-même de les complèter et j'ai proposé à mes élèves de s'en occuper ([28]). D'une part mes élèves Kaucký ([29]), Konečný ([30]) et Potoček ([31]) ont travaillé sur ce sujet, d'autre part Fréchet a développé dans une série de travaux importants la théorie de chaînes. Il suffit de rapprocher ma communication faite en 1929 au congrès de Varsovie ([24]) aux derniers travaux de Fréchet ([32]) (surtout à un travail qui a paru en 1934 dans le Bulletin de la Société mathématique de France) pour voir le progrès réalisé pendant les cinq ans derniers. Je signale encore le livre de R. v. Mises ([33]) sur la théorie des probabilités où surtout les applications aux problèmes physiques sont développées.

Dans une conférence remarquable qui est imprimée dans le 1er volume de Comptes Rendus du Congrès international tenu à Zurich en 1932, S. Bernstein a exposé différentes questions qui se posent dans la théorie des variables aléatoires liées ([34]). Cette conférence contient pour ainsi dire un programme de recherches. En 1932-34 quelques points de ce programme ont été développés. S. Bernstein lui même qui dans ses travaux plus anciens a beaucoup contribué à étendre et à préciser les résultats obtenus par Markoff, montre, dans ses mémoires récents, comment il faut calculer les quantités qui dépendent des variables aléatoires liées entre elles; il considère les équations différentielles au point de vue des probabilités ([35]). D'autre part les chaînes de Markoff, qui offrent un exemple simple de liaison entre les variables aléatoires, les équations fonctionnelles qui leur se rattachent et leur rapport avec les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique ont été l'objet d'un certain nombre de travaux.

Je vais donner une revue rapide de quelques résultats de la théorie des chaînes obtenus dans ces derniers ans et d'autres travaux sur des questions voisines.

Au point de vue purement analytique le problème original, énoncé par Markoff, peut être réduit à la question suivante: étant donnée une matrice $p_{ik}(i, k = 1, 2, \ldots, r)$ dont les éléments sont positifs ou nuls, calculer les coefficients des matrices qui en résultent par itération et déterminer ce qu'ils deviennent quand l'indice d'itération augmente indéfiniment. Markoff a donné les résultats essentiels dans le cas où les quantités p_{ik} sont toutes positives. Aujourd'hui grâce aux travaux que j'ai déjà rappellés, la théorie est perfectionnée et généralisée en deux points: d'abord le cas où quelques quantités p_{ik} sont nulles a été étudié et, au point de vue d'applications physiques, le résultat suivant dû à Fréchet me paraît important: Si p_{ik} désigne le coefficient de la matrice itérée quelleque soient les p_{ik}, pourvu que $p_{ik}^{(n)} < c$, la limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_{ik} + p_{ik}^{(2)} + \ldots + p_{ik}^{(n)}}{n}$$

existe toujours. Ensuite toute la théorie a été étendue au cas de variables continues qui remplacent les indices discontinus i et k. C'est encore à Fréchet que nous devons ici les résultats fondamentaux; dans les travaux cités il a donné des démonstrations précises el générales des résultats fondamentaux et de certains théorèmes énoncés par Hadamard en 1928 ([36]).

Une dernière généralisation consiste à introduire une variable continue à la place de l'indice d'itération. Les problèmes sur les chaînes se ramènent ainsi à l'étude des équations fonctionnelles. Je me borne ici à rappeller l'équation de Smoluchowski

$$\Phi(x, y, u + v) = \int_a^b \Phi(x, z, u)\, \Phi(z, y, v)\, dz. \tag{11}$$

Admettons que la probabilité pour qu'un point — qui se meut au hasard sur le segment (a, b) — passe de la position x à une autre comprise entre y et $y + dy$ en t secondes, soit exprimable par la formule $\Phi(x, y, t)\, dt$; alors Φ satisfait à l'équation de Smoluchowski (11).

Dans un travail que j'ai publié en 1932 et dont les compléments viennent de paraître ([37]) j'ai donné une solution de cette équation qui repose sur le principe suivant: L'équation (11) est analogue de

$$e^{u+v} = e^u \, . \, e^v$$

à condition de remplacer la multiplication ordinaire de u et de v par une multiplication symbolique de deux fonctions qui consiste à les multiplier et à intégrer ensuite le produit. Une transformation convenable de la série de Maclaurin pour e^u donne la solution cherchée de (11); c'est en somme une méthode dont le principe a donné Volterra dans sa théorie des équations intégrales. Je remarque que dans ces calculs certains produits infinis jouent un rôle; des cas particuliers de ces produits ont été envisagés par M. Popovici dans un travail publié en 1914 ([38]).

L'équation (11) exprime une proposition générale qui au fond ne diffère pas de ce qu'on appelle Principe d'Huygens. Pour calculer la valeur de Φ relative à une valeur $t = u + v$ il suffit de connaître les valeurs que prend Φ pour $t = u$ et pour $t = v$. C'est pour cela que, par exemple les fonctions qui satisfont à l'équation de la chaleur sont en même temps solutions de (11). J'ai rappelé cette manière d'envisager le problème [qui est due à Hadamard ([39])]

dans une conférence que j'ai eu l'honneur de lire devant le Congrès des mathématiciens roumains tenu à Turnu Severin en 1932 ([40]). Une Physique mathématique plus générale sera donc fondée sur des équations telles que (11); ces équations se ramènent, dans des cas particuliers, aux équations aux dérivées partielles. Ainsi Kolmogoroff a pu montrer ([41]) quelles sont les conditions de continuité et de dérivabilité qui doivent être remplies pour qu'une fonction qui satisfait à l'équation fonctionnelle de Chapman ($s < u < t$)

$$\Phi(x, y, s, t) = \int_a^b \Phi(x, z, s, u)\, \Phi(z, y, u, t)\, \mathrm{d}z$$

satisfasse en même temps à une équation aux dérivées partielles du type parabolique. Et j'ai montré que, sous autres conditions, une fonction qui satisfait à l'équation de Chapman donne la solution d'une équation aux dérivées partielles du type elliptique ([42]).

Enfin, je voudrais dire quelques mots sur un problème relativement simple qui donne une bonne idée de la nature des questions plus générales qui ont été développées dans les travaux de Slutsky ([43]), S. Bernstein ([34]) et de Khintchine ([44]) sur les relations générales entre les variables aléatoires. Les uns de ces travaux se placent à un point de vue voisin de celui des chaînes de Markoff. Il y en a d'autres qui introduisent des hypothèses plus générales. Par exemple, dans un travail récent Khintchine admet que les probabilités rélatives au développement d'un système physique postérieur à une époque t_0 dépendent de tout ce qui se passait avant cette époque.

L'exemple simple que j'ai déjà signalé est dû à Slutsky. Il s'agit d'un théorème que j'énonce, en interprétation cinématique, comme il suit: Un point se meut au hasard sur un segment (a, b) et soient $x_1, x_2, x_3, \ldots$ les valeurs de son abscisse aux époques $t, 2t, 3t, \ldots$ Admettons les hypothèses

$$E(x_i) = 0,\ E(x_i^2) = 1,\ r = E(x_i x_k) = \text{fonction de } | i - k |$$

et de plus que le coefficient de corrélation R entre x_i et entre la seconde différence de x_i soit très voisin de l'unité. Alors la probabilité pour que les valeurs $x_1, x_2, \ldots$ soient très voisines des ordonnées d'une sinusoïde, est elle-même très voisine de l'unité. Elle devient $= 1$, si $R = 1$. S'il y avait une équation rigoureuse de forme $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + kx = 0$, x serait une fonction trigonométrique ou exponentielle de t; mais dans le cas que nous venons de considérer (nous introduisons des différences finies au lieu de différentielles), si R est voisin de l'unité, on n'obtient que des fonctions approximativement périodiques. Je crois que ce point de vue pourrait être utile dans l'étude des phénomènes physiques qui résultent d'un très grand nombre de mouvements à peu près périodiques.

Cet exemple nous renseigne bien sur la nature des applications du Calcul des probabilités. Introduire les probabilités dans les formules de la Physique cela ne veut pas dire: rénoncer au déterminisme. Il ne suffit pas de considérer des équations rigoureuses; il faut se demander quelle est la probabilité pour que la différence entre les deux membres de l'équation soit comprise entre les limites données. Une relation entre les probabilités ou entre les valeurs moyennes est plus générale que par exemple une équation différentielle relative aux valeurs précises; en faisant des hypothèses supplémentaires, les relations entre les probabilités ou entre les valeurs moyennes de certaines quantités deviennent des équations rigoureuses (p. ex. des équations différentielles) entre ces quantités.

Je ne saurais terminer ce rapport sans vous rappeller le souvenir d'un homme très estimé par tous qui le connaissaient. K. Vorovka, notre ami et collègue, a le grand mérite de nous avoir aidé pour comprendre différentes questions de la philosophie scientifique et surtout les travaux de H. Poincaré et ses idées sur le Calcul des probabilités. L'analyse si intelligente et précise des vues de Poincaré que nous devons à Vorovka nous a montré clairement ce point important qui ne doit pas être oublié: pour appliquer le Calcul des probabilités il faut se décider pour cette espèce de déterminisme que nous regardons comme indispensable dans toutes les recherches théoriques en Physique.

Bibliographie.

(1) *A. Chinčin* (*Khintchine*): Osnovnyje zakony těorii věrojatnostej, Moskva, 1932. Ce petit livre, peru sous une autre forme déjà en 1926, donne une très bonne idée des travaux russes sur la loi des grands nombres. La démonstration du théorème de Liapounoff se trouve dans le 1ère chapitre.

(2) *J. Lindeberg:* Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Mathem. Zeitschrift *15*, 1922, p. 211 bis 224).

(3) *A. Kolmogoroff:* Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Izvěstija Ak. Nauk SSSR, 1933, p. 363—372).

(4) *J. Petrovsky:* Über das Irrfahrtproblem (Mathem. Annalen *109*, 1934, p. 425—444). Ce travail contient des applications très intéressantes des équations aux dérivées partielles à la théorie du mouvement Brownien.

(5) *A. Khintchine:* Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1933, chap. I.

(6) *A. Kolmogoroff:* Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapounoffschen Satzes (Izv. Ak. Nauk SSSR, 1931, p. 959—962).

(7) *A. Khintchine:* Über einen neuen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Math. Ann. *101*, 1929, p. 745—752).

(8) *P. Cantelli:* La tendenza ad un limite nel senso del Calcolo delle probabilità (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, *41*, 1916, p. 191—201).

(9) *M. Fréchet:* Sur la convergence probable, C. R. de l'Ac. des Sc., Paris, *188*, 1929_{I}, p. 213—214; Sur la convergence en probabilité (Metron, *8*, No. 4, 1930, p. 1—48).

(10) *P. Cantelli:* Sulle probabilità comme limite della frequenza (Rendiconti Acc. Lincei (5) *26*, 1917_{I}, p. 39—45).

(11) *P. Cantelli:* Sulla oscillazione delle frequenze intorno alla probabilità (Metron, *3*, No. 2, 1923).

(12) *E. Slutsky:* Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte (Metron, *5*, No. 3, 1925).

(13) *A. Mezzanotte:* Estensioni di un teorema sulla oscillazione delle frequenze intorno alla probabilità, . . . (Rendiconti del Circ. mat. di Palermo, *52*, 1928, p. 1—14).

(14) *A. Khintchine:* Über die positiven und negativen Abweichungen des arithmetischen Mittels (Math. Ann. *101*, 1929, p. 381—385); Sur un théorème général relatif aux probabilités dénombrables (C. R. de l'Ac. des Sc., Paris, *178*, 1924_{I}, p. 617); Über das Gesetz der großen Zahlen (Math. Ann. *96*, 1926, p. 152—168); voir aussi l'ouvrage (1), chap. III.

(15) *A. Kolmogoroff:* Über das Gesetz des iterierten Logarithmus (Math. Ann., *101*, 1929, p. 126—135).

(16) *P. Lévy:* Sulla legge forte dei grandi numeri (Giornale dell'Istituto it. dei attuari, *2*, 1931, p. 1—21).

(17) *E. Borel:* Les probabilités dénombrables et leur applications arithmétiques (Rendiconti del Circ. mat. di Palermo, *27*, 1909_{I}, p. 247—263).

(18) *A. Khintchine - A. Kolmogoroff:* Über Konvergenz von Rehen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden (Sbornik Mat. Obš., Moskva, *32*, 1925, p. 668—677).

A. Kolmogoroff: Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Größen (Math. Ann. *99*, 1928, p. 309—319, Bd *102*, 1929, p. 184—188).

(19) *P. Lévy:* Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes (Studia Matematica, *3*, 1931, p. 119—155).

(20) *E. Slutsky:* Sur un critérium de la convergence stochastique des ensembles de valeurs éventuelles (C. R. de l'Ac. des Sc., Paris, *187*, 1928_{II}, p. 370—372); Sur les fonctions éventuelles continues, intégrables et dérivables dans le sens stochastique (C. R. *187*, p. 878—880); Quelques propositions sur les limites stochastiques (C. R., *189*, 1929_{II}, p. 384—386); Sur les fonctions éventuelles compactes (Atti del Congresso internaz. dei mat. 1928, Bologna, *6*, p. 111—115).

(21) *P. Cantelli:* Sui confini della probabilità (Atti del Congresso internaz. dei mat., Bologna, 1928, *6*, p. 47—59).

(22) *Khintchine* voir l'ouvrage (1), p. 40—41.

(23) *A. Khintchine:* Über die Anwendbarkeitsgrenzen des Tchebyscheffschen Satzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Sbornik Mat. Obšč., Moskva, *32*, 1926, p. 678—688); voir aussi l'ouvrage (1), Chap. II.

(24) *B. Hostinský:* Sur la théorie générale des phénomènes de diffusion (C. R. du premier Congrès des math. des Pays slaves, Warszawa 1929, p. 341—347).

(25) *J. Hadamard:* Sur le battage des cartes (C. R. de l'Ac. des Sc., Paris, *185*, 1929_{II}, p. 5—9).

(26) *B. Hostinský:* Čtyři přednášky o různých problémech teoretické fysiky (Časopis pro pěstování mat. a fys., Praha, *61*, 1934, p. 33—80).

(27) *B. Hostinský:* Applications du Calcul des probabilités à la théorie du mouvement Brownien (Annales de l'Institut H. Poincaré, Paris, *3*, 1932, p. 1—74).

(28) Un résumé de la théorie des chaînes se trouve dans l'ouvrage *B. Hostinský:* Méthodes générales du Calcul des probabilités (Mémorial des sciences math., Paris, fasc. *52*, 1931) et dans l'article *B. Hostinský:* O teorii Markovových řetězů a o integraci lineárních transformací (Časopis pro pěst. mat. a fys., *63*, 1934, p. 167—187; résumé de deux conférences faites à la Société math. Tchécoslovaque à Prague); la bibliographie à la fin de cet article fait suite de celle qui se trouve dans le fasc. *52* du Mémorial.

(29) *J. Kaucký:* Několik poznámek o Markovových řetězech (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, 1930, No. 131).

(30) *M. Konečný:* K theorii Markovových řetězů (Publ. de la Fac. des Sc., Brno, 1931, No. 147); Trois théorèmes sur la limite des transformations itérées (Publ. de la Fac. des Sc., Brno, 1932, No. 183).

(31) *J. Potoček:* O dispersi v teorii Markovových řetězů (Publ. de la Fac. des Sc., Brno, 1932, No. 154).

(32) La bibliographie de travaux de M. Fréchet publiés en 1931—33 se trouve dans le Časopis pro pěst. mat. a fys., *63*, 1934, p. 185—186. Voir aussi *M. Fréchet:* Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne (Bull. de la Soc. math. de France, *61*, 1933, p. 182—185); Sur l'allure asymptotique de la suite des itérées d'un noyau de Fredholm (The Quarterly Journal of Math., Oxford series, *5*, 1934, p. 106—144); Sur l'allure asymptotique des densités dans le problème des probabilités en chaîne (Bull. de la Soc. math. de France, *62*, 1934, p. 60—83); De l'importance, dans les applications, des noyaux échappant à la théorie de Fredholm (C. R. de l'Ac. des Sc., Paris, *198*, 1934_{I}, p. 2053—55).

(33) *R. v. Mises:* Vorles. aus dem Gebiete der angew. Mathem. Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig und Wien, 1931).

(34) *S. Bernstein:* Sur les liaisons entre les variables aléatoires (Verh. des internat. Mathematiker-Kongresses in Zürich, 1932, I., p. 288—309).

(35) *S. Bernstein:* Sur les chaînes de Markoff (C. R. de l'Ac. des Sc. de l'URSS, nouvelle série, *1*, 1934, p. 4—9; 361—364); Sur la diffusion avec absorption (même volume p. 234); Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques (Travaux de l'Inst. Phys. Math. de l'Ac. des Sc. de l'URSS, *5*, p. 95—124); Sur l'équation différentielle de Fokker-Planck (C. R. de l'Ac. des Sc., Paris, *196*, 1933_{I}, p. 1062—64).

(36) *J. Hadamard:* Sur le battage des cartes et ses relations avec la mécanique statistique (Atti del Congresso intern. dei matem. Bologna, 1928, *5*, p. 133—140).

(37) *B. Hostinský:* Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités (Public. de la Fac. des Sc., Brno, 1932, No. 156; seconde partie 1934, No. 194).

(38) *C. Popovici:* L'influence du mouvement d'un astre sur la réfraction à travers son atmosphère (Annales de l'Observ. d'Astron. et Metéor. de Bucarest, 1914, p. 1c—15c).

(39) *J. Hadamard:* Le principe d'Huygens (Bull. de la Soc. math. de France, *52*, 1924, p. 610—640).

(40) *B. Hostinský:* Sur quelques applications de l'Analyse infinitésimale à l'étude des phénomènes discontinus (Conférence tenue à Turnu Severin en mai 1932; sous presse).

(41) *A. Kolmogoroff:* Über die analyt. Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Math. Ann., *104*, 1931, p. 415—458); Zur Theorie der stazionären zufälligen Prozesse (Math. Ann., *108*, 1933, p. 149—160).

(42) *B. Hostinský:* Une équation fonctionnelle relative au problème de Dirichlet (Prace matem.-fizyczne, *42*, 1934, p. 1—5); Sur une équation fonctionnelle considérée par Chapman et par Kolmogoroff (C. R. (Doklady) de l'Ac. des Sc. de l'URSS, *2*, 1934, p. 395—97).

(43) *E. Slutsky:* Sur un théorème limite relatif aux séries des quantités éventuelles (C. R. de l'Ac. des Sc., Paris, *185*, 1927II, p. 169—171); *V. Romanovsky:* Sur la loi sinusoïdale limite (Rendic. del Circolo mat. di Palermo, *56*, 1932, p. 1—30); Sur une généralisation de la loi sinusoïdale limite (même recueil, *57*, 1933, p. 130—136). *A. Gelfond - A. Chinčin:* Determinanty Grama dlja stacionarnych rjadov (tirage à part d'un journal russe).

(44) *A. Khintchine:* Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse (Math. Ann., *109*, 1934, p. 604—615).