Eduard Čech

Les théorèmes de dualité en topologie

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 17--25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121252

Les théorèmes de dualité en topologie.

Eduard Čech, Brno.

Avant de passer au sujet indiqué par le titre de cette conférence, il me semble utile de dire quelques mots d'un caractère plus général. Parmi les méthodes actuellement en vogue dans la topologie, celle que je préfère personnellement c'est la méthode fondée sur la théorie générale d'ensembles, la *mengentheoretische Methode* des géomètres allemands. Le développement de cette méthode dans la topologie a été tout-à-fait parallèle à celui de la même méthode dans la théorie des fonctions de variables réelles. Çà et là, on a commencé par une étude patiente et minutieuse des phénomènes qu'on a appelés pathologiques, c'est-à-dire par la construction d'une série étendue d'ingénieux exemples prouvant que beaucoup de lois classiques, valables pour une étroite famille d'objets élémentaires, cessent d'être vraies si on élargit la famille d'objets considérés. On a d'ailleurs d'abord accueilli avec beaucoup de méfiance ce nouveau genre de recherches, en y reprochant surtout le manque de contact avec les applications ainsi que l'isolement des autres branches de mathématiques. Dans la théorie des fonctions de variables réelles, il est maintenant universellement reconnu que les reproches que je viens de mentionner ont été tout-à-fait injustes: il y a déjà longtemps que le chaos d'une foule d'idées peu coordonnées s'est dissipé, et de grandes théories d'une merveilleuse harmonie en sont sorties, embrassant aussi bien les théories classiques que des cas „pathologiques". Grâce à cet examen patient d'objets rebelles au lois classiques, on a enfin triomphé en créant des lois extrêmement générales et en les démontrant d'une manière merveilleusement simple. Tout en continuant à poser et à résoudre des problèmes tout-à-fait nouveaux, on n'a nullement négligé les problèmes classiques, et les méthodes abstraites ont souvent réussi à découvrir des connexions inattendues entre des théories que l'on avait cru très éloignées l'une de l'autre, ou bien à découvrir des voies nouvelles là où on avait pensé d'avoir déjà dit tout. Dans la topologie, on entend encore souvent des reproches que nous ne sommes plus habitués à ouïr dans la théorie des fonctions réelles. L'ancienne méfiance contre les phénomènes pathologiques n'y est pas encore définitivement vaincue, bien que l'on puisse, ici encore, donner beaucoup d'exemples où l'examen d'un tel phénomène ait conduit à la découverte d'une loi générale et importante. P. ex., c'est en examinant l'exemple de Peano d'une courbe remplissant une aire que Hahn, le grand mathématicien de Vienne à qui la mort prématurée a défendu de prendre part à ce Congrès, a été conduit à la notion de connexité locale qui s'est montrée ensuite comme une des notions les plus importantes dans toute la topologie.

Ayant dit plus haut que je préfère la *mengentheoretische Methode* dans la topologie je voudrais insister que je suis infiniment loin d'estimer trop bas les résultats nombreux et importants que l'on a gagné en employant d'autres méthodes. Tout au contraire! Ce qui me plait au plus dans la *mengentheoretische Methode*. c'est qu'elle me semble capable de s'imbiber de tout ce qu'il y a de vraiment essentiel et fécond dans les autres méthodes. Avant dix années, on pouvait très clairement distinguer, dans la topologie, l'école de la théorie générale d'ensembles et l'école combinatoire. Dans ce temps-là, les méthodes combinatoires étaient limitées exclusivement à la recherche des *polyèdres topologiques*, c'est-à-dire des espaces topologiquement équivalents (homéomorphes) aux polyèdres rectilignes situés dans les espaces euclidiens (à un nombre quelconque de dimensions). A présent, la prédilection pour les polyèdres que l'on constate chez quelques topologues d'ailleurs éminents, est peut-être motivée surtout par des tendances finitistes, analogues aux idées bien connues de Kronecker dans l'algèbre. Quoique la tendance finitiste ait conduit sans doute à de très beaux résultats, p. ex. dans la théorie des noeuds, j'attribue une haute signification au fait que l'on a réussi à donner à la partie la plus avancée de la topologie combinatoire, à savoir à la théorie de l'homologie des cycles, une forme basée *exclusivement* sur la théorie générale d'ensembles. A mon avis, on peut même affirmer non seulement que la théorie de l'homologie constitue un chapitre de la *mengentheoretische Topologie*, mais aussi que c'est un des chapitres les plus systématiques et les plus avancés de cette science, déstiné à y jouer un rôle central.

La possibilité d'appliquer les notions combinatoires à chaque espace métrique et compact a été reconnue indépendamment par trois savants, MM. Alexandroff [1],[1]) Vietoris [1] et Lefschetz [1]. V. aussi Čech [1]; je voudrais remarquer ici que j'ai été conduit à l'idée d'étendre la théorie de l'homologie aux espaces non compacts par l'étude attentive du Mémoire de M. Alexandroff [3]. M. Alexandroff a maintes fois insisté sur la haute importance des méthodes combinatoires dans la *mengentheoretische Topologie*.[2]) Bien que je sois parfaitement d'accord avec M. Alexandroff sur l'importance des méthodes combinatoires, je ne

[1]) Les chiffres entre crochets se rapportent à la bibliographie placée à la fin.

[2]) Comp. aussi la conférence très instructive de M. Wilder [1].

saurais parfois être d'accord avec lui en ce qui concerne les autres méthodes employées dans la *mengentheoretische Topologie*; p. ex. tout en appréciant très haut les remarquables progrès que MM. Alexandroff et Pontrjagin ont obtenu dans la théorie de la dimension par la méthode combinatoire, je crois que ces progrès ne peuvent diminuer nullement l'importance d'autres résultats de la théorie de la dimension obtenus auparavant par Urysohn et par MM. Menger et Hurewicz avec l'emploi d'autres méthodes, et je ne sais pas comment on puisse arriver à ces résultats par la méthode combinatoire.

Or il est nécessaire de quitter ces généralités et d'aborder le sujet principal de cette conférence. Les théorèmes de dualité constituent un des sujets les plus intéressants de la topologie combinatoire. Limités d'abord au terrain étroit de la topologie polyédrale, ces théorèmes ont été ensuite élargis de manière à aboutir finalement au terrain beaucoup plus vaste de la *mengentheoretische Topologie*. Je vais passer rapidement en revue les phases principales du développement historique de ces théorèmes, en m'arrêtant de manière un peu plus détaillée à quelques résultats récents pas encore publiés.

C'est Poincaré [1] (v. aussi [2]) qui a obtenu déjà en 1895 le premier théorème de dualité. Soit V_n une *variété à n dimensions*, c'est-à-dire un polyèdre topologique connexe *localement* homéomorphe à E_n. (Ici, et dans ce qui suit, E_n signifie l'espace euclidien à n dimensions complété par un point à l'infini.) Alors, on a le *théorème de dualité de Poincaré*

$$\mathbf{B}^r(V_n) = \mathbf{B}^{n-r}(V_n) \quad (r = 0, 1, \ldots, n), \tag{1}$$

du moins dans le cas où la variété V_n est *orientable*, c'est-à-dire si la loi (1) est vraie pour le cas particulier de $r = 0$. Le symbole $\mathbf{B}^r$ signifie le nombre de Betti pour la dimension r.

C'est un autre théorème de dualité, découvert en 1922 par M. Alexander [1], qui a une portée bien plus vaste. Soit S un polyèdre topologique immergé dans E_n; alors on a le *théorème de dualité de M. Alexander*

$$\mathbf{B}^r(E_n - S) = \mathbf{B}^{n-r-1}(S) + \delta_r \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

avec $\delta_r = 0$ pour $r > 0$ et $\delta_0 = 1$. Particulièrement remarquable est le cas de $r = 0$ qui dit que le nombre des composantes de $E_n - S$ est déterminé par la structure intrinsèque de S, étant égal à $\mathbf{B}^{n-1}(S) + 1$. Ce cas particulier embrasse non seulement le théorème célèbre de Jordan, mais aussi sa généralisation n-dimensionnelle établie pour la première fois en 1912 par M. Brouwer [1].

Supposons plus généralement que S soit un sous-ensemble fermé de E_n complètement arbitraire ($0 \neq S \neq E_n$). La loi de dualité (2) reste valable; ceci a été prouvé indépendamment par MM. Alexandroff [2], Frankl [1] et Lefschetz [1]. M. Lefschetz a même déduit une loi plus générale. Soit S un sous-ensemble fermé d'une variété V_n (orientable) à n dimensions. Alors on a le *théorème de dualité de M. Lefschetz*

$$\mathbf{B}^r(V_n - S) = \mathbf{B}^{n-r}(V_n, S) \quad (r = 0, 1, \ldots, n), \tag{3}$$

le nombre de Betti à droite se rapportant aux *cycles relatifs* (notion due à M. Lefschetz lui-même) mod S dans V_n. Pour $S = 0$, la loi (3) se réduit à la loi (1) de Poincaré; la loi (2) de M. Alexander est aussi une conséquence immédiate de la loi (3). Le cas $S \subset V_n$ a été considéré aussi par M. Pontrjagin [1] qui a obtenu un théorème de dualité formellement distinct de celui de M. Lefschetz, l'énoncé de M. Pontrjagin ne contenant que des cycles absolus.

On peut *localiser* le théorème de dualité de M. Alexander de deux manières distinctes. Soit x un point donné d'un sous-ensemble fermé S d'une variété V_n. Soient deux entourages U et $U' \subset U$ de x. Soit $\alpha_r(U', U, V_n - S)$ le nombre maximum des cycles absolus à r dimensions dans U', indépendants rel. aux homologies dans U. Soit $\beta_s(U', U, S)$ le nombre maximum des cycles relatifs à s dimensions mod $S - U$ dans S indépendants rel. aux homologies mod $S - U'$ dans S. Par le double passage à la limite, d'abord $U' \to x$ et ensuite $U \to x$, on obtient de $\alpha_r(U', U, V_n - S)$ et de $\beta_s(U', U, S)$ des limites (finies ou infinies) $\alpha_r(x, V_n - S)$ et $\beta_s(x, S)$. Alors on a le théorème de dualité

$$\alpha_r\,(x, V_n - S) = \beta_{n-r-1}(x, S) + \delta'_r \quad (r = 0, 1, \ldots, n - 1) \tag{4}$$

où $\delta'_r = 0$ pour $r > 0$, tandis que $\delta'_0 = 0$ ou $\delta'_0 = 1$ suivant que x est ou non un point intérieur de S. Ce théorème de dualité local a été prouvé indépendamment par M. Alexandroff [4], [5] et par Čech [3], [4].

La seconde localisation du théorème de dualité est due à Čech [5]. Je ne l'expliquerai ici que dans le cas $r = 1$, $n = 2$. Soit x un point d'un sous-ensemble fermé S du plan. L'ensemble S est au point x localement connexe (au sens de Hahn-Mazurkiewicz) si et seulement si à chaque entourage U de x on peut attacher un entourage $U' \subset U$ de x tel que, pour chaque courbe simple fermée C telle que $US \cdot C = 0$, un des deux ensembles $U'S \cdot \mathrm{Int.}C$ et $U'S \cdot \mathrm{Ext.}\ C$ soit vide.

Malgré la généralité de l'ensemble S, les théorèmes de dualité que j'ai rapporté plus haut n'appartiennent pas encore à la *mengentheoretische Topologie*, car l'espace ambiant V_n y est supposé polyédral. La généralisation nouvelle, grâce à laquelle la loi de dualité (3) arrive définitivement sur le terrain de la topologie générale, a été donnée indépendamment par M. Lefschetz [3] et par Čech [2], où les deux auteurs, employant des méthodes tout-à-fait différentes l'une de l'autre, réussissent à donner une définition axiomatique de variétés, basée presque entièrement sur la notion seule d'homologie, et telle que la loi de dualité (3), et même une loi plus générale, due aussi à M. Lefschetz [2] [p. 142, formule (7)], où des cycles relatifs figurent dans tous les deux membres, reste valable. La méthode employée par Čech est beaucoup plus compliquée que celle de M. Lefschetz. On pourrait être tenté de croire que ce fait désagréable soit dû à l'une ou l'autre des deux manies que l'on remarque dans l'ouvrage cité de Čech, à savoir de n'employer jamais l'espace euclidien et de ne pas supposer que la variété soit métrisable. Or, en réalité, la longueur excessive de cet ouvrage est due, outre autres raisons moins importantes, au fait que la démonstration de la formule (3) y est conduite de telle manière que le nombre des axiomes employés dépend du nombre min $(r, n - r)$ d'où il vient que les résultats démontrés sont nouveaux même dans le cas où V_n est un polyèdre.

Les théorèmes de dualité, dans la forme que je leur ai donné dans ce rapport, n'affirment que l'égalité de deux nombres de Betti. En réalité, il y a entre les deux groupes de Betti qui y figurent une relation plus intime, pas exprimable par la seule égalité de leurs rangs. Cet approfondissement des théorèmes de dualité a été étudié surtout par M. Pontrjagin [1].

Il y a aussi un autre fait très important que je n'ai pas encore mentionné. Pour pouvoir parler, dans un espace donné, des cycles et des homologies, il faut choisir un *domaine de coefficients*. Les domaines habituels sont: l'ensemble des nombres rationnels (Poincaré et Lefschetz), l'ensemble des nombres entiers (Poincaré), l'ensemble des entiers réduits mod 2 (Tietze et Veblen) ou, plus généralement, réduits mod m, le nombre m $(= 2, 3, 4, \ldots)$ étant donné (Alexander). Or on peut (Pontrjagin) prendre comme domaine de coefficients un groupe commutatif quelconque. Les démonstrations rapportées plus haut sont valables rel. au domaine des nombres rationnels ou à celui des entiers réduits mod p, p étant un nombre premier, excepté l'ouvrage de M. Pontrjagin [1] qui concerne aussi le cas mod m. Or considérons le cas d'un sous-ensemble fermé S (non polyédral) contenu dans E_n. Les groupes de Betti de $E_n - S$ relatives au domaine de coefficients constitué par tous les nombres entiers (supposés connus pour toutes les dimensions!) déterminent les groupes de Betti de $E_n - S$ rel. à un domaine de coefficients donné arbitrairement. Au contraire, on sait que les groupes de Betti de S rel. au domaine des nombres entiers jouissent de propriétés paradoxales. Le problème qui en sort a été résolu récemment par M. Pontrjagin (v. sa communication au Congrès intern. de Zurich 1932; un exposé détaillé doit paraître aux Annals of Math. en janvier 1935): la loi de dualité (2) (non limitée à l'égalité des nombres de Betti) subsiste en prenant comme domaine de coefficients à gauche les nombres entiers, et à droite le groupe additif des nombres réels réduits mod 1. Ce résultat de M. Pontrjagin est en connexion étroite avec sa belle *Theory of topological commutative groups*. Annals of Math. (2) *35*, 361—388 (1934).

Revenons au sous-ensemble fermé S de E_n. Le cas particulier

$$\mathbf{B}^0(E_n - S) = \mathbf{B}^{n-1}(S) + 1 \tag{2'}$$

du théorème de dualité (2) signifie, comme j'ai déjà remarqué plus haut, que le nombre $\pi = \mathbf{B}^0(E_n - S)$ des composantes de $E_n - S$ est une propriété intrinsèque de S. Un énoncé plus faible, à savoir que l'inégalité $\pi > 1$ a une signification intrinsèque, a été prouvé par M. Borsuk [1] sans emploi des cycles. Or en employant les cycles, on peut arriver à des lois dont (2') n'est qu'un cas extrêmement particulier. Je vais esquisser ces lois, pas encore publiées excepté quelques cas particuliers énoncés chez Čech [6].

S étant toujours un sous-ensemble fermé donné de E_n, divisons d'une manière quelconque les composantes de $E_n - S$ en deux familles disjointes Φ et Φ'; soient T et T' la somme de toutes les composantes de la famille Φ, resp. Φ'; soient p et p' les nombres des dites composantes. Designons par $\mathbf{M}$ le module de tous les cycles (absolus) à $n - 1$ dimensions dans S (à coefficients rationnels), deux cycles de $\mathbf{M}$ étant considérés comme égaux s'ils sont homologues l'un à l'autre dans S. Désignons par $\mathbf{M}(\Phi)$ le module de tous les cycles de $\mathbf{M}$ qui sont homologues à zéro dans $E_n - T$, de manière que $\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}$. Désignons par q et q' le rang (nombre de Betti) du module $\mathbf{M} - \mathbf{M}(\Phi)$, resp. de $\mathbf{M}(\Phi)$. Alors on a

$$p = q + c, \quad p' = q' + c', \tag{5}$$

où: $c = 1$ si $q > 0$, tandis que pour $q = 0$ on a soit $c = 1$ soit $c = 0$; $c' = 1$, si l'on a simultanément $p' > 0$ et $p = 0$, tandis que $c' = 0$ si l'on a soit $p' = 0$, soit $p > 0$.

Il résulte de (5) que les nombres p et p' sont, à de petites réserves près, déterminés par la structure intrinsèque de S, pourvu que l'on choisisse la famille Φ de manière à pouvoir caractériser intrinsèquement le module $\mathbf{M}(\Phi)$. Or il y a des cas importants où ceci réussit. Tels sont les cas où l'on définit Φ comme la famille de toutes les composantes P de $E_n - S$ qui jouissent d'une des propriétés suivantes: (1) la frontière de P contient un point donné de S; ou plus généralement, (2) la frontière de P contient un sous-ensemble A donné de S; (3) la frontière de P rencontre un sous-ensemble A donné de S, où il faut supposer seulement que A soit connexe; ou plus généralement, (4) étant donné un sous-ensemble A de S ainsi qu'une famille ψ de sous-ensembles relativement fermés de A, l'ensemble $A \cdot P$ n'appartient pas à la famille ψ; ici, il faut supposer que, si B appartient à ψ, (I) chaque sous-ensemble C de B relativement fermé appartient aussi à ψ, (II) l'ensemble $A - B$ est connexe; (5) un point donné x de S est accessible de P, c'est-à-dire qu'il existe un arc simple contenant x dans $P + (x)$; ou, plus généralement, (6) A étant un sous-continu de S tel que $\mathbf{B}^1(A) = 0$, A contient un point accessible de P.

Les théorèmes d'invariance qui résultent des énoncés précédants deviennent encore beaucoup plus riches par le fait que, $\{\Phi_\iota\}$ étant un système quelconque de familles de composantes de $E_n - S$, les modules $\mathbf{M}(\Phi_\iota)$ déterminent le module $\mathbf{M}(\Pi\Phi_\iota)$ et, sous de certaines réserves, aussi le module $\mathbf{M}(\Sigma\Phi_\iota)$. D'autre part, les formules (5) sont des cas particuliers de la formule plus générale

$$p^* = q^* + c^* \tag{6}$$

dont voici la signification: On suppose données deux familles Φ_1 et $\Phi_2 \subset \Phi_1$ de composantes de $E_n - S$; p^* désigne le nombre de composantes de $E_n - S$ qui appartiennent à Φ_1 sans appartenir à Φ_2; q^* est le rang du module $\mathbf{M}(\Phi_2) - \mathbf{M}(\Phi_1)$. Dans les deux cas particuliers où soit la famille Φ_2 est vide soit la famille Φ_1 contient *toutes* les composantes de $E_n - S$, on retrouve les deux formules (5); ces deux cas étant exclus, on a $c^* = 0$.

D'après (6), on a $p^* = \infty$ si et seulement si $q^* = \infty$. Or, la manière dont se comporte le module $\mathbf{M}(\Phi_2) - \mathbf{M}(\Phi_1)$ donne aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour que les diamètres des composantes de la famille $\Phi_1 - \Phi_2$ converge vers zéro. Plus généralement, soit donnée une famille χ de sous-ensembles fermés de S telle que (1) l'ensemble $E_n - A$ soit connexe pour chaque ensemble A de la famille χ, (2) $\{A_\nu\}$ étant une suite convergente (au sens de M. Hausdorff) extraite de la famille χ, l'ensemble $\lim A_\nu$ appartienne aussi à χ. Alors, la manière dont se comporte le module $\mathbf{M}(\Phi_2) - \mathbf{M}(\Phi_1)$ détermine si la famille $\Phi_1 - \Phi_2$ possède ou non la propriété suivante: ε étant un nombre positif arbitrairement donné, la famille $\Phi_1 - \Phi_2$ ne contient qu'on nombre *fini* de composantes P telles que, si on choisit arbitrairement un ensemble A de la famille χ, P contienne toujours un point dont la distance de A soit $> \varepsilon$.

Ce qui précède reste vrai dans le cas beaucoup plus général où on remplace E_n par une *pseudo-variété simple à n dimensions*, c'est-à-dire par un espace métrique et compact W_n à n dimensions tel que (1) $\mathbf{B}^n(W_n) = 1$ tandis que $\mathbf{B}^n(S) = 0$ pour chaque sous-ensemble fermé $S \neq W_n$; (2) $\beta_n(x, W_n) = 0$ pour chaque point x

de W_n. Plus précisément, pour que les énoncés précédants soient *textuellement* vrais dans l'espace W_n, il faut supposer encore que $\mathbf{B}^{n-1}(W_n) = 0$ ainsi que $\beta_{n-1}(x, W_n) = 0$ pour chaque point x de W_n. Plus généralement, ce qui précède reste vrai, après quelques modifications, en remplaçant E_n par une *pseudo-variété à n dimensions m fois ramifiée* ($m = 1, 2, 3, \ldots$), c'est-à-dire par un espace métrique et compact W_n à n dimensions tel que (1) $\mathbf{B}^n(W_n) = m$ tandis que $\mathbf{B}^n(S) = 0$ pour chaque sous-ensemble fermé $S \neq W_n$; (2) $\beta_n(x, W_n) = m$ pour chaque point x de W_n.

Une pseudo-variété à une dimension est topologiquement équivalente à une circonférence et elle est donc toujours simple. Au contraire, pour $n \geqq 2$ il existe des pseudo-variétés à n dimensions m fois ramifiées pour chaque valeur de m. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble fermé F de E_{n+1} soit une telle pseudo-variété est que l'ensemble $E_{n+1} - F$ possède $m + 1$ composantes, qui soient toutes uniformément localement connexes et dont les frontières soient toutes égales à F. L'existence de telles frontières a été prouvée par M. Wilder [2].

Ouvrages cités.

J. W. Alexander.

[1] *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **23**, 333—349 (1922).

P. Alexandroff.

[1] *Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie*, Math. Annalen **96**, 489—511 (1927).

[2] *Über die Dualität zwischen den Zusammenhangszahlen einer abgeschlossenen Menge und des zu ihr komplementären Raumes*, Göttinger Nachrichten, année 1927, 323—329.

[3] *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Annals of Math. (2) **30**, 101—187 (1929).

[4] *Sur les propriétés locales des ensembles fermés*, Comptes Rendus Paris **198**, 227—229 (1934).

[5] *On the local properties of closed sets*, Annals of Math. (à paraître).

K. Borsuk.

[1] *Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume*, Math. Annalen **106**, 239—248 (1932).

L. E. J. Brouwer.

[1] *Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum*, Math. Ann. **71**, 314—319 (1912).

E. Čech.

[1] *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*, Fund. Math. **19**, 149—183 (1932).

[2] *Théorie générale des variétés et de leurs théorèmes de dualité*, Annals of Math. (2) **34**, 621—730 (1933).

[3] *Užití teorie homologie na teorii souvislosti* (*Applications de la théorie de l'homologie à la théorie de la connexité*) Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, année 1933, nº 188, 40 pages.

[4] *Sur les nombres de Betti locaux*, Annals of Math. (2) **35**, 678—701 (1934).

[5] *Sur la connexité locale d'ordre supérieur*, Compositio Math. (à paraître).

[6] *Sur la décomposition d'une pseudo-variété par un sous-ensemble fermé*, Comptes Rendus Paris **198**, 1342—1345 (1934).

F. Frankl.

[1] *Topologische Beziehungen in sich kompakter Teilmengen euklidischer Räume zu ihren Komplementen sowie Anwendung auf die Primendentheorie*, Wiener Berichte **136**, 689—699 (1927).

S. Lefschetz.

[1] *Closed point sets on a manifold*, Annals of Math. (2) **29**, 232—254 (1928).

[2] *Topology*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. XII (1930), IX + 410 pages.

[3] *On generalized manifolds*, Amer. Journal of Math. **55**, 469—504 (1933).

H. Poincaré.

[1] *Analysis Situs*, Journal de l'Ecole Polyt. (2) **1**, 1—123 (1895).

[2] *Complément à l'Analysis Situs*, Palermo Rendiconti **13**, 285—343 (1899).

L. Pontrjagin.

[1] *Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze*, Math. Ann. **105**, 165—205 (1931).

L. Vietoris.

[1] *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. **97**, 454—472 (1927).

R. L. Wilder.

[1] *Point sets in three and higher dimensions and their investigation by means of a unified analysis situs*, Bull. of the Amer. Math. Soc. **38**, 649—692 (1932).

[2] *On the properties of domains and their boundaries in E_n*, Math. Ann. **109**, 273—306 (1933).