Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Kořízek

O konstrukcích ploch 2. stupně, daných imaginární kuželosečkou a sdruženě imaginárními body neb tečnými rovinami

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 2, 1--7

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121233`

O konstrukcích ploch 2. stupně, daných imaginární kuželosečkou a sdruženě imaginárními body neb tečnými rovinami.

Napsal Dr. techn. *Karel Kořízek.*

(Došlo 25. června 1931.)

Konstrukcím uvedeným nebyla, pokud vím, věnována pozornost, ačkoliv nejsou pouhou aplikací známých konstrukcí kuželoseček z imaginárních elementů. Jsou zajímavé také tím, že specielně pro kružnici imaginární dají se řešiti též kolineací. V tomto pojednání chci podati jen stručný, obecný nástin řešení uvedených úloh, při čemž budu předpokládati pouze plochy reálné a k dalšímu, známému konstruování úplně způsobilé, jakmile na nich budou určeny 3 reálné kuželosečky, resp. 3 kužele dotyčné, a při řešení kolineací, bude-li znám střed i rovina kolineace, jakož i plocha kulová, k dané ploše kolineárně příslušná.

Naše konstrukce bude ovšem předpokládati pouze plochy 2. stupně nepřímkové, neboť reálná rovina (ve které jest imaginární kuželosečka K^i dána) nemůže protínati plochu přímkovou 2. stupně v imaginární kuželosečce.

Jde o konstrukce plochy 2. stupně určené:

Imaginární kuželosečkou K^i v reálné rovině π a

I. 2 páry sdruženě imaginárních bodů a_i, b_i; c_i, d_i;

II. 1 párem sdruženě imaginárních bodů a_i, b_i a párem sdruženě imaginárních rovin tečných γ_i, δ_i;

III. 2 páry sdruženě imaginárních rovin tečných α_i, β_i; γ_i, δ_i.

Při tom kuželosečka K^i nechť jest dána reálným středem s reálnými osami a na každé z nich eliptická involuce sdružených pólů ještě jedním párem. Pár imaginárních bodů a_i, b_i jest dán na přímce E středem o_E eliptické involuce I_E a absolutní hodnotou potence, vyjádřenou úsečkou $o_E e_0 \perp E$, pár imaginárních bodů c_i, d_i obdobně na přímce F středem o_F eliptické involuce I_F a úsečkou $o_F f_0 \perp F$, dále imaginární tečné roviny α_i, β_i, procházející přímkou

G určeme párem, jehož úhel rozpolují 2 příslušné roviny involuce I_G, k sobě kolmé, a podobně imaginární roviny tečné γ_i, δ_i, procházející přímkou H, stanovme takovým párem involuce I_H.

I.

Plocha 2. stupně P^2 jest určena imaginární kuželosečkou K^i a 2 družinami imaginárních bodů $a_i, b_i; c_i, d_i$.

Sestrojiti její *3 reálné kůželosečky.*

Přímka $a_ib_i \equiv E$ protne rovinu π kuželosečky v bodě p_E; $c_id_i \equiv F$ nechť protne π v bodě p_F. K bodu p_E přísluší v involuci I_E sdružený pól p'_E a k bodu p_F v involuci I_F bod sdružený p'_F. Dále k bodu p_E přísluší vzhledem ke kuželosečce K^i polára P_E a k bodu p_F přísluší pro tutéž kuželosečku polára P_F. Rovina $(p'_EP_E) \equiv \pi_E$ jest pak polární rovinou plochy P^2 vzhledem k pólu p_E a rovina $(p'_FP_F) \equiv \pi_F$ jest polární rovinou její vzhledem k pólu p_F. Obě roviny se protínají v přímce R', která jest druženou polárou ke spojnici $p_Ep_F \equiv R$. Přímka R protíná plochu P^2 v bodech imaginárních (neboť to jsou průsečíky té přímky s imaginární kuželosečkou K^i), tedy její sdružená polára R' musí P^2 protínati v bodech reálných. Rovina $(ER) \equiv \varepsilon$ protíná plochu P^2 v kuželosečce K^ε, určené sdruženě imaginárními body a_i, b_i, imaginár. samodružnými body i, j eliptické involuce $[p_E, p^1_E; p_F, p^1_F]$ na R (kde $p^1_E \equiv (P_ER)$, $p^1_F \equiv (P_FR)$) a pólem r'_E přímky R v průsečíku $(R'\varepsilon)$.

Podobně rovina $(FR) \equiv \varphi$ protne P^2 v kuželosečce K^φ, určené imaginárními body c_i, d_i, dále imaginárními body i, j a pólem r'_F přímky R v průsečíku $(R'\varphi)$.

Každá rovina ϱ, položená přímkou R', musí plochu P^2 protínati v reálné kuželosečce K^ϱ (poněvadž R' protíná P^2 v reálných bodech), která bude určena 3 páry bodů, v nichž rovina ϱ' té kuželosečky protíná kuželosečky K^i, K^ε, K^φ, (jejichž roviny jdou přímkou R) a polárou R' společného průsečíku r' spojnic těch 3 párů bodů. Je tedy třeba určiti průsečíky kuželosečky K^ε s přímkou $(\varrho\varepsilon)$, která musí procházeti průsečíkem $(R'\varepsilon)$ a podobně průsečíky kuželosečky K^φ s přímkou $(\varrho\varphi)$, která jde průsečíkem $(R'\varphi)$. Jde tedy o řešení úlohy:

a) Kuželosečka dána 2kráte dvěma sdruženě imaginárními body a pólem spojnice 2 z nich, který ovšem musí býti dán na poláře průsečíku spojnic těch sdruženě imaginárních bodů. Sestrojiti její průsečíky s přímkou, procházející tím pólem. Tato úloha se nám vyskytne též v dalších konstrukcích, i rozřešíme ji zvlášť.

Označíme-li nositelky těch 2 involucí, určujících sdruženě imaginární body, I_1, I_2, pak bude průsečíku obou q příslušeti v involuci I_1 bod q_1 a v involuci I_2 bod q_2. Spojnice q_1q_2 jest polára Q

bodu q a na té zvolme pól i_1 poláry I_1. Přímku, procházející bodem i_1, označme P.

Určeme involuci sdružených pólů na přímce Q. Jeden známý pár tvoří body i_1, q_1 a druhým párem budou ony dva reálné body x, y, v nichž se protínají vždy podvojně sdružené spojnice těch 4 imaginárních bodů. Stanovíme je tím,[1] že určíme v involuci I_1 sobě příslušné body k, l tak, že $(qq_1\,kl) = -1$ a na I_2 rovněž sobě příslušné body m, n tak, že $(qq_2mn) = -1$. Potom spojnice km protne poláru Q v bodě x a spojnice kn v bodě y. Involuce $I_Q \equiv$ $\equiv [i_1, q_1; x, y]$ jest buď hyperbolická neb eliptická. V případě prvém jest zřejmě příslušná kuželosečka reálná, v druhém imaginární.

Nyní již snadno určíme průsečíky u, v přímky P s tou kuželosečkou. K pólu i_1 přísluší sdružený pól $i'_1 \equiv (PI_1)$ a k průsečíku $j \equiv (PI_2)$ přísluší sdružený pól $j' \equiv (PJ)$, je-li J polára bodu j. Tuto obdržíme jako spojnici bodu j_2, příslušného k j v involuci I, a pólu i_2 poláry I_2 (který přísluší k bodu q_2 v involuci I^Q). Body u, v jsou pak samodružné body involuce $[i_1, i'_1; j, j']$.

Tak bychom tedy určili žádané průsečíky s kuželosečkami K^ε, K^φ a známým způsobem též průsečíky s kuželosečkou danou K^i.

Další konstrukce kuželosečky K^ϱ bude pak závislá na tom, zda kuželosečky K^ε, K^φ jsou obě reálné, či pouze jedna, neb žádná. V případě posledním, nejnepříznivějším, bychom určili jako v úloze *a*) involuci sdružených pólů na poláře R' pólu r', která musí býti vzhledem k tomu, že bod r' leží vně reálné plochy P^2, vždycky hyperbolická, a tedy i tečny z bodu r' k reálné kuželosečce K^ϱ.

Dále bychom pak již sestrojili kuželosečku K^ϱ některou ze známých konstrukcí.[2] Sestrojíme-li 3 kuželosečky K^ϱ, bude tím plocha P^2 úplně k dalším konstrukcím určena.

II.

Plocha 2. stupně P^2 jest určena imaginární kuželosečkou K^i, dvěma imaginárními body a_i, b_i na přímce E a dvěma sdruženě imaginárními tečnými rovinami γ_i, δ_i, procházejícími přímkou H. Sestrojiti její *3 reálné kuželosečky*.

Jako při konstrukci I. najdeme polární rovinu π_E, příslušnou k průsečíku $p_E \equiv (E\pi)$. Dále uvážíme, že přímka H, ježto jí procházejí imaginární tečné roviny plochy, musí protnouti plochu P^2 v reálných bodech a tečné roviny v nich protínají se ve sdružené poláře H' ku přímce H, která spojuje sdruženě imaginární dotyčné body tečných rovin, procházejících přímkou H a protíná rovinu π kuželosečky K^i v bodě s. Polární rovina σ bodu s musí býti sdruže-

[1]) V. Jarolímek: „Základové geometrie polohy“ díl IV., str. 32.
[2]) V. Jarolímek: „Základové geometrie polohy“ díl II.

nou rovinou k rovině (sH) v involuci I_H, a bude míti svoji stopu v přímce S, stopou p_H přímky H procházející, která však musí býti zároveň polárou bodu s vzhledem ke kuželosečce K^i. Musí tedy bod s ležeti na jednom z paprsků společného páru involuce, kterou indukuje v bodě p_H naše imaginární kuželosečka K^i a involuce, ve které protíná rovina π involuci I_H.

Vzhledem k tomu, že obě involuce jsou eliptické, musí býti ten společný pár reálný. Poněvadž pól s musí zřejmě ležeti také na reálné poláře P_H bodu p_H vzhledem ke kuželosečce K^i, máme určen bod s jako průsečík jednoho neb druhého paprsku toho společného páru s polárou P_H, čímž jsme vedeni ke dvěma řešením. Rovina σ, polární k bodu s, je pak určena přímkami S, H. Spojíme-li dále pól s s bodem p_E, obdržíme přímku R a její sdružená polára jest průsečnicí R' polárních rovin π_E a σ. Potom máme určenu v rovině $\varepsilon \equiv (ER)$ kuželosečku K^ε plochy $\mathbf{P}^2$ jako při úloze *a*), t. j. eliptickou involucí sdružených pólů I_E, eliptickou involucí sdružených pólů I_R na přímce R a pólem r přímky R v průsečíku $(R'\varepsilon)$. Duálně máme určenu plochu kuželovou, ploše $\mathbf{P}^2$ opsanou, o vrcholu $v \equiv (R'H)$ dvěma páry imaginárních tečných rovin, daných eliptickými involucemi o osách R' a H a rovinou (vR), polárně sdruženou ve svazku v s paprskem R'.

Každá rovina ϱ, položená přímkou R', musí protínati plochu P^2 v reálné kuželosečce K^ϱ (poněvadž R' plochu protíná v reálných bodech). Tato kuželosečka musí procházeti:

1. průsečíky roviny ϱ s danou imaginární kuželosečkou K^i, která se sestrojí známým způsobem;
2. průsečíky roviny ϱ s kuželosečkou K^ε, které se určí konstrukcí *a*);
3. musí se dotýkati dvou sdruženě imaginárních tečen, v nichž rovina ϱ (bodem v procházející), protíná tu plochu kuželovou, ploše $\mathbf{P}^2$ opsanou.

Tato plocha kuželová bude určovati na rovině π kuželosečku, danou 2 eliptickými involucemi, které indukuje v bodech p_H, resp. r (stopě přímky R' na π) a polárou R bodu r.

Jde tedy o rozřešení této úlohy:

b) Kuželosečka jest dána 2kráte dvěma sdruženě imaginárními tečnami a polárou průsečíku 2 z nich, která ovšem musí procházeti pólem spojnice průsečíků těch sdruženě imaginárních tečen. Sestrojiti její průsečíky s přímkou, procházející oním z daných průsečíků dvojic sdruženě imaginárních tečen, jehož polára je dána.

Provedeme ji opět samostatně a pokud možno duálně k úloze *a*). Označíme-li nositele těch 2 involucí i_1, i_2, pak bude spojnici obou Q příslušeti v involuci i_1 paprsek Q_1 a v involuci i_2 paprsek Q_2. Průsečík $(Q_1\ Q_2)$ jest pól q přímky Q a jím zvolme poláru I_1 bodu i_1. Libovolnou přímku, procházející bodem i_1, označme P.

Určeme involuci sdružených polár v bodě q. Jeden známý pár tvoří paprsky I_1, Q_1 a druhým párem zvolme ony 2 reálné přímky X, Y, na nichž se nalézají podvojně sdružené průsečíky těch 4 imaginárních tečen.[3]) Konstrukce jejich jest duální ke konstrukci v úloze a). Involuce $i_q \equiv [I_1Q_1, XY]$ jest pak buď hyperbolická (je-li kuželosečka reálná), nebo eliptická (je-li kuželosečka imaginární). Průsečíky u, v přímky P s tou kuželosečkou určíme jako samodružné body involuce sdružených pólů, jejíž jeden pár i_1, $i'_1 \equiv \equiv (I_1P)$ známe a druhý j, j' určíme takto:

K paprsku P určeme příslušný P' v involuci i_1, který protne poláru I_1 bodu i_1 v pólu p přímky P. Přímka X, pólem q procházející, má pól x v průsečíku své sdružené poláry Y s polárou Q. Tedy k průsečíku $j \equiv (PX)$ musí příslušeti polára $J \equiv px$, která protne P v bodě j', sdruženém k bodu j.

Další konstrukce kuželosečky K^ϱ dá se pak již převésti na známé konstrukce kuželoseček z imaginárních elementů. Položíme-li přímkou R' ještě 2 roviny, obdržíme tak 3 reálné kuželosečky naší plochy, čímž je úloha rozřešena.

III.

Plocha 2. stupně $\mathbf{P}^2$ jest určena imaginární kuželosečkou K^i v rovině π a 2 dvojicemi tečných rovin sdruženě imaginárních α_i, β_i; γ_i, δ_i, určených eliptickými involucemi sdružených rovin *polárních o osách* G, H.

Involuční svazek rovin o ose G protíná rovinu π v involuci paprskové o vrcholu p_G a pod. involuční svazek rovin o ose H protne rovinu π v involuci paprskové o vrcholu p_H. K bodu p_G přísluší polára P_G vzhledem ke kuželosečce K^i a k bodu p_H polára P_H vzhledem k téže kuželosečce. Sestrojme společný pár involuce, kterou indukuje kuželosečka K^i v bodě p_G, a involuce výše uvedené. Potom jeden z paprsků toho společného páru protne poláru P_G v bodě s_G, který jest pólem roviny σ_G, určené osou G a druhým paprskem S_G společného páru těch involucí.[4]) Podobně najdeme bod s_H a jeho polární rovinu σ_H. Poněvadž volbu bodů s_G a s_H můžeme provésti na čtvero způsobů, obdržíme 4 řešení.

Spojnici R bodů s_G, s_H přísluší průsečnice $R' = (\sigma_G\sigma_H)$ jako sdružená polára, procházející pólem r poláry R vzhledem ke kuželosečce K^i a protínající přímky G, resp. H v bodech g, resp. h. Nyní známe dotyčné kužele plochy $\mathbf{P}^2$ o vrcholech g, resp. h. Kužel o vrcholu g jest určen 2 tečnými rovinami α_i, β_i, dále tečnými rovinami φ_1, ψ_1, jakožto samodružnými prvky eliptické involuce sdružených polárních rovin o ose R' a rovinou (gR), polární k paprsku R' v polárním svazku o vrcholu g.

[3]) V. Jarolímek: „Základové geometrie polohy“ IV. díl, str. 33.
[4]) Podle odst. II.

Podobně jest určen kužel o vrcholu h dvěma imaginárními tečnými rovinami γ_i, δ_i, dále tečnými rovinami φ_i, ψ_i a rovinou (hR), polární k paprsku R svazku h. Jak se dají takto určené plochy kuželové dále konstruovati, bylo uvedeno v předchozím. Položíme-li potom přímkou R' rovinu ϱ jako v předešlé úloze, bude protínati plochu $\mathbf{P}^2$ v reálné kuželosečce, pro kterou budeme znáti 2 body, v nichž tato rovina protíná kuželosečku K^i a 4 tečny, v nichž protíná plochy kuželové o vrcholech g, resp. h. Tím jest opět v podstatě naše úloha rozřešena.

IV.

Jak bylo již na počátku řečeno, dají se naše úlohy v případě, že jest dána v rovině π imaginární kružnice K_i, výhodně řešiti centrální kolineací s plochou kulovou K'. Vztah kolineární jest výhodné určiti takto:

Nechť jest dána imaginární kružnice svým středem o a absolutní hodnotou potence eliptické involuce, kterou ta kružnice indukuje na libovolném průměru. Nanesme tuto potenci, jistou úsečkou vyjádřenou, na kolmici ve středu od tohoto bodu, čímž obdržíme bod s. Naši kružnici K_i přisuďme jako kolineární útvar imaginární kružnici kulovou v nekonečnu K'_i, ve které protíná, jak známo, úběžná rovina ν'_∞ každý pravoúhlý svazek polární. Potom příslušný střed kolineace bude zřejmě v bodě s. Rovina $\pi \equiv \nu$ bude potom rovinou příslušnou k rovině úběžné ν'_∞, čili bude úběžnicí, se kterou musí býti rovina kolineace rovnoběžná. Zvolme tedy kdekoliv rovinu ω, paralelní s rovinou $\pi \equiv \nu$ za rovinu kolineace. Pro danou rovinu kolineace ω, střed kolineace s a úběžnicí ν jest již určen centrálně kolineární vztah mezi 2 prostory P, P' a k prvnímu z nich čítáme plochu $\mathbf{P}^2$, danou imaginární kružnicí K_i a dalšími 4 prvky. Plocha $\mathbf{P}^2$ se pak kolineárně transformuje v plochu, která bude určena 4 prvky, příslušnými k těm daným a křivkou, do níž se transformuje naše kuželosečka K_i. Touto křivkou jest však, následkem zvláštní volby středu kolineace s, imaginární kružnice kulová v nekonečnu K'_i, kterouž tedy musí příslušná plocha $\mathbf{P}'^2$ k ploše $\mathbf{P}^2$ procházeti, t. j. musí to býti plocha kulová $K' \equiv \mathbf{P}'_2$, jež bude určena těmi zbývajícími 4 prvky, příslušnými k daným prvkům plochy $\mathbf{P}^2$. Jestliže dovedeme plochu kulovou z těch 4 prvků konstruovati, dovedeme již také kolineací snadno konstruovati danou plochu $\mathbf{P}^2$.

V našem případě jde tedy o sestrojení plochy kulové:

1. ze 4 bodů podvojně sdruženě imaginárních;
2. ze dvou bodů sdruženě imaginárních a 2 tečných rovin sdruženě imaginárních;
3. ze 4 rovin podvojně sdruženě imaginárních.

Všecky tyto úlohy provádí V. Jarolímek ve II. svazku svých „Základů geometrie polohy“.

Sur les constructions de quadriques déterminées par une conique imaginaire et par des points ou des plans imaginaires conjugués.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne la construction d'une quadrique contenant une conique imaginaire K_i, située dans un plan réel π et

I. passant par deux couples de points imaginaires conjugués a_i, b_i, c_i, d_i;

II. passant par un couple de points imaginaires conjugués a_i, b_i et touchant un couple de plans tangents imaginaires conjugués γ_i, δ_i;

III. touchant deux couples de plans tangents imaginaires conjugués α_i, β_i, γ_i, δ_i.

Il s'agit, dans toutes ces constructions, de déterminer une droite R', conjugueé polaire à une certaine droite R, telle qu'un plan arbitraire passant par R' coupe la quadrique à construire suivant une conique réelle. Dans le cas I, on prend pour la droite R la droite joignant les points d'intersection p_E, p_F des droites $E \equiv a_ib_i$, $F \equiv c_id_i$ avec le plan π. La construction du cas II exige qu'on trouve le point d'intersection s du plan π avec la polaire conjuguée H' de la droite $H \equiv \gamma_i\delta_i$. C'est le point d'intersection de la polaire p_H du point $p_H \equiv (H\pi)$ par rapport à la conique K_i avec l'une des droites du couple commun à l'involution induite au point p_H par la conique K_i et à celle déterminée dans le plan π par les plans tangents γ_i, δ_i. La droite R est alors la droite joignant le point s à la trace de la droite $E \equiv a_ib_i$ dans le plan π. Dans la construction III, on détermine les points s_G, s_H, où le plan π est coupé par les polaires conjugués G', H' aux droites $G \equiv \alpha_i\beta_i$, $H \equiv \gamma_i\delta_i$ comme dans le cas II; on prend comme droite R la droite joignant $S_{G'}, S_H$.

Si K_i est un cercle, on peut faire usage de l'homographie centrale transformant la quadrique cherchée en une sphère; il faut choisir les éléments déterminant cette homographie de sorte que le cercle imaginaire donné se transforme en le cercle absolu de l'espace.