Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 2, 181--184

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121199

sestrojme kružnice K_g, K_h, jichž průsečíky s K_e, K_f, jsou resp. i, j. Plyne pak, že:

$$\overline{ig} = \overline{gh} = \overline{hj} = \overline{ie} = \overline{jf} = \ldots \overline{ab}.$$

Jest tedy úsečka $\overline{ab}$ paprsky $\overline{cg}$, $\overline{ch}$ rozdělena na tři stejné díly.

Pokračujíce naznačeným způsobem sestrojme kružnice K_i, K_j, jež protnou K_g, K_h, v bodech m, n. Průsečík $(K_g, K_h) \equiv k$, $(K_m, K_i) \equiv p$ $(K_m, K_j) \equiv q$. Patrno, že paprsky $\overline{cm}$, $\overline{ck}$, $\overline{cn}$ dělí úsečku $\overline{ab}$ na 4 stejné díly.

Podobně paprsky $\overline{cr}$, $\overline{cs}$, $\overline{ct}$, $\overline{cu}$ dělí $\overline{ab}$ na 5 stejných dílů, paprsky $\overline{cv}$, $\overline{cw}$, $\overline{cx}$, $\overline{cy}$, $\overline{cz}$ na 6 stejných dílů etc.

Při půlení úsečky $\overline{ab}$ netřeba sestrojovati K_d, při dělení na 3 díly, K_g a K_h, na 4 díly K_m, K_k, K_n etc.

Konstrukce tato nabývá stále větších a větších rozměrů, zvláště je-li úsečka $\overline{ab}$ značnější, za to však nepozbývá se vzrůstajícím n na přesnosti, neboť nesprávnost rýsování při velikých rozměrech nepadá tu tolik na váhu jako při obvykle užívaných konstrukcích. Jednoduchost její jeví se v tom, že rýsujeme kruhové oblouky stále jedním poloměrem, kdežto při užívaných konstrukcích stává se nepohodlným stálé rýsování rovnoběžných příček.

Dělení však na tři, pět, šest, sedm stejných dílů lze vždy ještě prováděti rychle touto konstrukcí, není-li úsečka $\overline{ab}$ příliš veliká. Jinak lze rozděliti polovinu, resp. čtvrtinu na týž počet stejných dílů; hledaným dílem dané úsečky jest pak dvojnásobný, resp. čtyrnásobný díl přímo konstrukcí stanovený.

Úlohy.

Úloha 29.

Stanovte součet řady

$$1 + 1\,.\,1! + 2\,.\,2! + \ldots n\,.\,n!$$

Ant. Lochmann.

Úloha 30.

Ustanoviti jest součet

$$\binom{1}{r} + \binom{2}{r} + \binom{3}{r} + \ldots\ldots + \binom{n}{r}.$$

Ant. Lochmann.

Úloha 31.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^2 - yz = a, \quad y^2 - xr = b, \quad z^2 - xy = c.$$

K. Rychlík.

Úloha 32.

Dokázati, že levou stranu rovnice

$$b_0 x^3 + 3b_1 x^2 + 3b_2 x + b_3 = 0$$

lze vždy vyjádřiti ve tvaru

$$a_1 (x + \lambda_1)^3 + a_2 (x - \lambda_2)^3.$$

Řešiti pomocí toho výsledku rovnice:

$$x^3 + x^2 + 11x - 13 = 0,$$

$$2x^3 - 39x^2 + 66x - 18 = 0.$$

K. Rychlík.

Úloha 33.

Kdy jest možno rovnici pátého stupně

$$b_0 x^5 + 5b_1 x^4 + 10b_2 x^3 + 10b_3 x^2 + 5b_4 x + b_5 = 0$$

vyjádřiti ve tvaru

$$a_1 (x + \lambda_1)^5 + a_2 (x + \lambda_2)^5 = 0.$$

Řešiti rovnici toho druhu

$$x^5 - 25x^4 + 170x^3 - 370x + 5x + 475 = 0.$$

K. Rychlík.

Úloha 34.

Nalézti trojúhelníky racionální (t. j. trojúhelníky, jichž strany i plocha jsou vyjádřeny racionálními čísly), jichž strany tvoří řadu arithmetickou.

K. Rychlík.

Úloha 35.

Označme s_k *součet řady nekonečné*

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots .$$

Jakou hodnotu má součet této nekonečné řady

$$s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n + \ldots \ldots ?$$

K. Rychlík.

Úloha 36.

Ukažte, značí-li k jakékoliv číslo celé $\geqq 0$, že při označení užitém v úloze předešlé jest

$$\binom{k+1}{k} \cdot s_{k+2} + \binom{k+2}{k} s_{k+3} + \binom{k+3}{k} s_{k+4} + \ldots = 1.$$

r.

Úloha 37.

Dokázati jest, že, spustíme-li z bodu M ležícího na hlavní ose hyperboly kolmici MN na asymptotu, z paty N této kolmice, kolmici NP zase na hlavní osu, protne NP hyperbolu v bodě, jehož normála prochází bodem M.

Jos. Kálal.

Úloha 38.

Dány jsou dvě kolmé přímky Ox, Oy. Sestrojme parabolu p, která se dotýká těchto přímek v bodech A, B.

Dokázati jest: Je-li bod A pevný, jest geometrické místo ohnisek parabol p kruh nad průměrem OA; a obecněji, jsou-li body A, B na přímce procházející stále bodem M, jest geometrické místo ohnisek parabol p kruh nad průměrem OM.

K. Rychlík.

Úloha 39.

Dokázati jest dále: Dotýkají-li se přímky AB úlohy předešlé stále pevného kruhu o středu v počátku, jest geometrické místo ohnisek parabol p týž kruh, geometrické místo pak vrcholů parabol asteroida do toho kruhu vepsaná.)*

K. Rychlík.

Úloha 40.

Buďtež dány dva pevné kruhy K, K'. Sestrojme dva jiné kruhy k_1, k_2, které se dotýkají obou kruhů K, K'.

Jest dokázati: 1. Chordála kruhů k_1, k_2 prochází jedním z bodů podobnosti kruhů K, K'.

2. Dotýkají-li se kruhy k_1, k_2 navzájem, jest příslušný dotyčný bod na kružnici k, jejížto střed jest jeden z bodů po-

---

*) Asteroida jest křivka, která při vhodné volbě soustavy souřadnic má rovnici

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

dobnosti kruhů K, K'; chordála pak kružnic k, K a chordála kružnic k, K' jsou totožny. *r.*

Oprava. V úloze 8. v řádku prvním místo 7. má býti 6.

Vypsání cen za řešení úloh:

Výbor Jednoty českých mathematiků usnesl se, aby za správná řešení úloh v „*Příloze*“ uveřejněných uděleny byly *studujícím středních škol* ceny tyto:

1. Ceny první:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. XII.
Briot-Pšenička: Mechanická theorie tepla.
Monin: O některých druzích souřadnic projektivických.
Studnička: Úvod do analytické geometrie v rovině.

2. Ceny druhé:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. XII.
Machovec: Zobrazování tečen a středů křivosti křivek.
Šafaříková: William Herschel a jeho sestra Karolina.
Šolín: Arithmografie.

3. Ceny třetí:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. XII.
Čubr: O měření země.
Jarolímek: Deskriptivní geometrie v úlohách.
Seidler: Izák Newton a jeho principia.
Studnička: O kvaternionech.

Ceny *první* obdrží 10 řešitelů za správné a nejlepší řešení co největšího počtu úloh; z ostatních řešitelů obdrží dle počtu a dokonalosti řešení 15 řešitelů ceny *druhé* a dalších 20 řešitelů ceny *třetí.*

Připomenutí. Pp. řešitelé se žádají, aby zasílali řešení úloh psaná na čtvrtkách obyčejného formátu a každou čtvrtku, *obsahující pouze řešení jediné úlohy,* aby opatřili svým podpisem.

Řešení buďtež zaslána nejdéle do 15. dubna 1906.