Bedřich Procházka

Příspěvek ke křivkám 2. stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 3, 209--215

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121162

Příspěvek ke křivkám 2. stupně.

Napsal

prof. **Bedřich Procházka.**

Úlohu sestrojiti tečnu a kružnici oskulační křivky 2. stupně dané pěti body použitím geometrie kinematické lze, pokud se druhé části této úlohy týká, řešiti také jiným způsobem, lišícím se od řešení uvedeného ve článku: „Kinetický způsob sestrojování tečen a středů křivosti křivek 2. stupně.“ *)

1. Majíce sestrojiti tečnu ke křivce 2. stupně v jednom z pěti bodů tuto křivku určujících, pokládejme dva z těchto bodů za středy ${}^1s$ a ${}^2s$ projektivných svazků určených třemi družinami paprskovými ${}^1A{}^2A$, ${}^1B{}^2B$ a ${}^1C{}^2C$, jež stanoveny jsou ostatními třemi danými body abc křivky K. Protněme svazek ${}^1s$ přímkou ${}^1P \equiv {}^2A$, svazek ${}^2s$ přímkou ${}^2P \equiv {}^1A$. Vzniklé tím řady bodové ${}^1a{}^1b{}^1c \ldots$ a ${}^2a{}^2b{}^2c \ldots$ na přímkách ${}^1P$ a ${}^2P$ jsou perspektivné, sdruženými body řad jsou dány paprsky ${}^1b{}^2b \equiv B$, ${}^1c{}^2c \equiv C$, jistého svazku o středu s, v němž se protínají i tečny ${}^1G$ a ${}^2F$ odpovídající paprskům ${}^2G$ a ${}^1F$, jež se stotožňují s přímkou ${}^1s{}^2s$. Tečnu T v bodě a křivky K sestrojíme, ustanovíce směr, kterýmž se pohybuje bod a za vytvořování křivky. Předpokládejme, že bodu a příslušící paprsek A svazku s otáčí se určitou rychlostí vyjádřenou rychlostí $\overline{at}$ bodu a kolmou k tomuto paprsku. Zvolíce tuto rychlost jakkoliv, odvodíme rychlost $\overline{a{}^1u}$, kterou se pohybuje bod a v přímce ${}^1P \equiv {}^2A$ tím, že vedeme bodem t přímku $R \parallel A$, kteráž protíná přímku ${}^1P$ v bodě ${}^1u$. Táž rovnoběžka určuje ve přímce ${}^2P$ rych-

*) Rozpravy České Akademie, III. ročn. Tř. II. čís. 19.

lost $\overline{a^2u}$, kterou se pohybuje bod a v přímce ${}^2P \equiv {}^1A$. Úhlopříčna av rovnoběžníku sestrojeného z obou rychlostí $\overline{a^1u}$ a $\overline{a^2u}$ určuje směr pohybu průsečíku a a tudíž i tečnu T.

Střed křivosti o křivky K v bodě a lze potom sestrojiti na základě v uvedeném článku odvozeného vzorce:

$$\varrho = \frac{\omega^2}{\sigma},$$

— ve kterém značí ϱ poloměr křivosti, ω rychlost $\overline{av}$ bodu a v tečně T a σ rychlost otáčení $\overline{vq}$ bodu v tečny T, — jakožto průsek normály N v bodu a ku křivce K sestrojené, s kolmicí spuštěnou s bodu v na přímku aq.

Rychlost pohybu bodu dotyčného $\overline{av} \equiv \omega$ dovedeme sestrojiti co do směru i co do velikosti, zbývá nám tudíž jen stanoviti rychlost otáčení $\overline{vq} = \sigma$ jeho tečny.

Tuto rychlost možno také stanoviti způsobem obecnějším na základě následního názoru.

Probíhá-li bod a křivku K a projde body $b, c, \ldots$ protínají jemu příslušné tečny přímku ${}^3P \equiv {}^2F$ (tečnu v bodě ${}^2s$ ku křivce K sestrojenou) v řadě bodů ${}^3a{}^3b{}^3c \ldots$, která jest jak známo projektivnou ku svazku ${}^2s$ paprsků ${}^2A{}^2B{}^2C \ldots$ Proto bude také svazek přímek ${}^3A{}^3B{}^3C \ldots$, spojujících střed jeho ${}^3s \equiv {}^1s$ s body ${}^3a{}^3b{}^3c \ldots$ přímky ${}^3P$, projektivný se svazkem přímek ${}^2A{}^2B{}^2C \ldots$ o středu ${}^2s$, a můžeme ustanoviti ze zvolené rychlosti paprsku ${}^2A$ svazku ${}^2s$ rychlost otáčení paprsku ${}^3A \equiv \overline{{}^3s{}^3a}$. Z rychlosti bodu ${}^3a$ při otáčení paprsku ${}^3A$ odvodíme rychlost bodu ${}^3a$ ve přímce ${}^3P$ jakožto průsečíku jejího s touto přímkou. Na konec pak stanovíme rychlost σ, kterou se tento bod ${}^3a$ jakožto bod tečny T kol bodu a otáčí, abychom pomocí této sestrojili poloměr křivosti křivky K v bodu a.

Abychom co nejvýbodněji odvodili rychlost paprsku ${}^3A$, vytkněme vedle tohoto paprsku svazku ${}^3s \equiv {}^1s$ ještě jiné dva ${}^3F \equiv {}^1F$ a ${}^3G \equiv {}^1G$, jimž ve svazku ${}^2s$ odpovídají paprsky ${}^2F$ a ${}^2G$ a protněme svazek ${}^2s$ přímkou ${}^2P' \equiv {}^3A$, svazek ${}^3s$ přímkou ${}^3P' \equiv {}^2A$. Vzniklé tím řady bodové ${}^2a'{}^2f'{}^2g' \ldots$ (${}^2f' \equiv {}^3a$, ${}^2g' \equiv {}^3s$) a ${}^3a'{}^3f'{}^3g' \ldots$ (${}^3f' \equiv {}^2s$) na přímkách ${}^2P'$ a ${}^3P'$ jsou perspektivné; sdruženými body řad dány jdou paprsky ${}^2f'\,{}^3f' \equiv F' \equiv {}^2F$ a ${}^2g'\,{}^3g' \equiv G' \equiv {}^3G$ svazku, jehož středem jest bod $s' \equiv s$ dříve sestrojeným. Jedním paprskem tohoto svazku jest paprsek A' jdoucí bodem samodružným ${}^2a' \equiv {}^3a'$ perspektivných řad ${}^2P' \equiv {}^3P'$.

Předpokládejme nyní, že bod a v tečně T dříve sestrojené pohybuje se rychlostí vyjádřenou délkou $\overline{a\,{}^3a}$. Z této rychlosti odvodíme si rychlost $\overline{{}^3a'h}$, kterou se pohybuje bod ${}^3a'$ přímky ${}^3A$ v rovnoběžce ${}^3a'h$ s přímkou tečnou T, omezíme-li ${}^3a'h \parallel T$ spojnicí ${}^2s\,{}^3a \equiv {}^2F$. Z této rychlosti vyplývá na přímce ${}^2P' \equiv {}^3A$ rychlost $\overline{{}^2a'i}$, $(hi \parallel {}^2A)$, kterou bod ${}^2a' \equiv {}^3a'$ se pohybuje na přímce ${}^2P' \equiv {}^3A$.

S pohybem otáčení paprsku ${}^2A$ souvisí otáčení paprsku A' svazku $s' \equiv s$, kterýž stále průsečíkem paprsku ${}^2A$ s přímkou ${}^2P' \equiv {}^3A$ procházeje, protíná přímku ${}^3P' \equiv {}^2A$ v bodech, jimiž zase paprsek ${}^3A$ prochází. Průsečík paprsku A' s přímkou ${}^3P'$ pohybuje se na této přímce rychlostí $\overline{{}^3a'k}$, kterou $ik \parallel sA'$ na ní odetíná.

Z rychlosti této odvodíme si rychlost $\overline{{}^3a'l}$, kterou se bod ${}^3a$ při otáčení paprsku ${}^3A$ ve přímce $\parallel$ s A' pohybuje, jest-li přímkou ${}^3al \parallel A'$ protneme přímku ${}^3sk$.

Dále odvodíme rychlost $\overline{{}^3am}$, kterou se bod ${}^3a$ pohybuje v přímce ${}^3P \equiv {}^2F$ (dotýkající se křivky K v bodě ${}^2s$) tím, že vedeme bodem l přímku $lm \parallel {}^3A$, která přímku ${}^3P$ v bodě m protíná. Z rychlosti této určíme konečně rychlost $\overline{{}^3an}$ bodu ${}^3a$, kterou se pohybuje tento bod při otáčení tečny T kolem bodu t, omezíme-li přímku ${}^3an \perp T$ přímkou $mn \parallel T$. Spustíme-li dle odvozené konstrukce středu křivosti s bodu ${}^3a$ kolmici ku spojnici an, protne tato přímka normálu N, v bodě a ku křivce K sestrojené, v hledaném středu křivosti o této křivky.

Zvlášť jednoduše se utváří tato konstrukce, sestrojíme-li střed křivosti v krajních bodech dvou sdružených průměrů ab a cd, jimiž jest ellipsa dána.

Sestrojujíce střed křivosti pro bod a, zvolíme za středy svazku ${}^1s$ a ${}^2s$ body c a d. Potom jest tečna T v bodě a sestrojená rovnoběžna s průměrem cd. Přímky ${}^1G$ a ${}^2F$ jakožto tečny ellipsy v bodech c a d jsou s průměrem ab rovnoběžny, střed s jest bodem nekonečně vzdáleným a přímka A' také rovnoběžna s průměrem ab.

V tomto případě jest poměr

$$\frac{^3al}{^3a'k} = \frac{^3ac}{^3a'c} = \frac{ad}{^3a'd}$$

a poměr

$$\frac{ad}{^3a'd} = \frac{^3ad}{hd} = \frac{^3a^3a'}{i^3a'} = \frac{^3a'd}{^3a'k}.$$

Proto rovnají se i poměry

$$\frac{^3al}{^3a'k} = \frac{^3a'd}{^3a'k},$$

z čehož plyne, že délka $\overline{^3al} = {}^3a'd$.

Jelikož $^3al \parallel {}^3a'd$ jest spojnice $ld \parallel {}^3ac$ a proto bod m v tomto případě stotožňuje se s bodem d.

Další konstrukce t. j. sestrojení bodu n a průsečíku o, kolmice ^3ao, spuštěné s bodu ^3a na přímku an s normálou N, v bodě a křivky K sestrojenou, jest shodnou se známou konstrukcí poloměru křivosti v krajních bodech sdružených průměrů ellipsy.

Kdyby byly dány osy ab a cd ellipsy, potom by i bod n se stotožil s bodem d a střed křivosti o docílil by se konstrukcí, která úplně souhlasí se známou konstrukcí, odvozenou na základě vzorce $\varrho = \frac{\alpha^2}{\beta}$, v kterém α a β značí poloosy dané ellipsy.

2) Reciprokými úvahami dospějeme k sestrojení dotyčného bodu a středu křivosti křivky 2. třídy.

Předpokládejme, že jest křivka 2. třídy K určena svými pěti tečnami. Dvě z daných tečen pokládejme za spojnice ^1S a ^2S projektivných řad bodových, určených třemi družinami bodovými $^1a^2a$, $^1b^2b$ a $^1c^2c$, jež stanoveny jsou ostatními třemi danými tečnami ABC křivky K.

Abychom také zde sestrojili co nejvýhodněji dotyčný bod t tečny A s křivkou K, promítněme řadu ^1S s bodu $^1p \equiv {}^2a$, řadu ${}^2S$ s bodu ${}^2p \equiv {}^1a$. Vzniklé tím svazky ${}^1A{}^1B{}^1C\ldots$, ${}^2A{}^2B{}^2C\ldots$ o středech ${}^1p$ a ${}^2p$ jsou perspektivné; sdruženými paprsky svazků dány jsou body ${}^1B{}^2B \equiv b$, ${}^1C{}^2C \equiv c, \ldots$ jisté řady bodové S.

Křivka K dotýkajíc se daných pěti tečen, obsahuje body ${}^1g$ a ${}^1f$, odpovídající bodům ${}^2g$ a ${}^1f$, stotožňujícím se s průsekem p spojnic ${}^1S$ a ${}^2S$. Body ${}^1g$ a ${}^2f$ určují přímku S. Dotyčný bod t tečny A s křivkou 2. třídy K sestrojíme, jakožto střed otáčení přímky A za vytvořování křivky. Předpokládejme, že bod průsečný a paprsku ${}^1A$ s přímkou S se pohybuje určitou rychlostí $\overline{az}$ v této přímce. Zvolíce tuto rychlost jakkoli, odvodíme rychlost, kterou se otáčí paprsek ${}^1A$ bodem a procházející kolem bodu ${}^1p$, jestliže stanovíme rychlost otáčení $\overline{ah}$ jeho bodu a, omezíce přímku $ah \perp {}^1A$ přímkou $zh \parallel {}^1A$. Z rychlosti bodu a tohoto paprsku odvodíme rychlost ${}^1\overline{ai}$ jeho bodu ${}^1a$ tím, že kolmici ${}^1ai$ v bodě ${}^1a$ vztýčenou omezíme přímkou $h{}^1p$. Tím také známe již rychlost bodu ${}^1a$ přímky A, která se stotožňuje co do polohy s přímkou ${}^1A$, ačkoliv se otáčí kol dosud neznámého bodu t. Zrovna tak určíme rychlost ${}^2\overline{aj}$ bodu ${}^2a$ této přímky A, když kolmici ${}^2aj$ v bodě ${}^2a$ k tečné A vztýčenou, omezíme přímkou ${}^1ah$. Průsek přímky ij s přímkou A jest oním bodem této přímky, jemuž náleží rychlost otáčení rovná nulle, kterýž jest tedy jakožto její střed otáčení jejím dotyčným bodem t.

Konstrukcí touto však docílíme nejen bodu dotyčného, nýbrž i rychlosti otáčení tečny A kol tohoto bodu Rychlost ta jest vyjádřena buď: rychlostí otáčení ${}^1\overline{ai}$ bodu ${}^1a$, buď rychlostí ${}^2\overline{aj}$ bodu ${}^2a$ aneb rychlostí $\overline{al}$ bodu a, kterou obdržíme, jestliže kolmici v bodu a ku přímce A vztýčenou, omezíme přímkou ij.

Znajíce bod dotyčný t tečny A a její rychlost otáčení, můžeme kinematicky obecnějším způsobem sestrojiti i střed křivosti křivky 2. třídy, uvedeným způsobem vytvořené.

Bude nám ještě sestrojiti rychlost, kterou se pohybuje bod dotyčný t v tečné A.

Přímka A obalujíc při pohybu křivku K, přijde do poloby $BC\ldots$ a dotýká se křivky této v bodech určujících s bodem ${}^3p \equiv {}^2f$ (v němž se přímka ${}^2S$ křivky dotýká) svazek ${}^3A{}^3B{}^3C\ldots$, který jest jak známo projektivný k řadě bodů ${}^2a^2b^2c$ . . . , přímky ${}^2S$.

Proto také bude řada bodů ${}^3a^3b^3c$... ve přímce ${}^3S \equiv {}^1S$, v nichž paprsky ${}^3A^3B^3C$... svazku ${}^3p$ přímku ${}^3S$ protínají projektivnou s řadou ${}^2a^2b^2c$... na přímce ${}^2S$ a můžeme ustanoviti ze zvolené rychlosti bodu ${}^2a$ řady ${}^2S$ rychlost bodu ${}^3a$ na přímce ${}^3S$. Z rychlosti takto stanovené ustanovíme potom rychlost paprsku ${}^3A \equiv {}^2f^3a$ a tím i rychlost bodu t ve přímce T.

Abychom co nejvýhodněji rychlost bodu ${}^3a$ sestrojili, vytkneme vedle tohoto bodu řady ${}^3S \equiv {}^1S$ ještě jiné dva body ${}^3f \equiv {}^1f$ a ${}^3g \equiv {}^1g$, jimž v řadě ${}^2S$ odpovídají body ${}^2f$ a ${}^2g$, a spojme body řady ${}^2S$ s bodem ${}^2p' \equiv {}^3a$ a body řady ${}^3S$ s bodem ${}^2a \equiv {}^3p'$. Vzniklé tím projektivné svazky ${}^2p'$ a ${}^3p'$ jsou v perspektivné poloze a proto sdružené paprsky se protínají v bodech jedné přímky S' totožné s dříve sestrojenou přímkou S.

Jedním bodem této přímky S' jest bod a', jakožto průsečík samodružných paprsků ${}^2A' \equiv {}^3A'$ perspektivných svazků ${}^2p'{}^3p'$.

Předpokládejme nyní, že se přímka A kol bodu dotyčného t otáčí rychlostí takovou, že bodu ${}^2a$ přísluší rychlost $\overline{{}^2au}$ ve přímce ${}^2S$. Z této rychlosti odvodíme si rychlost $\overline{a'v}$ bodu a' při otáčení paprsku ${}^2A'$ svazku ${}^2p'$ ve směru av, rovnoběžném s přímkou ${}^2S$, tím, že $\overline{a'v}$ omezíme spojnicí ${}^2p'u$. Z rychlosti $\overline{a'v}$ bodu a' odvodíme rychlost $\overline{{}^3aw}$ bodu ${}^3a$ při otáčení paprsku ${}^3A'$, otáčejícího se kol bodu ${}^3p'$ a procházejícího bodem a', omezíme-li přímku ${}^3aw \parallel {}^2S$ přímkou v^3p'. Z rychlosti $\overline{{}^3aw}$ přímky ${}^3A'$ odvodíme rychlost $\overline{{}^3aw'}$ ve přímce ${}^3S$ ($ww' \parallel {}^3A'$), z které určíme rychlost $\overline{tx}$ bodu t přímky ${}^3A$ ve směru přímky ${}^3aw' \equiv {}^3S$, omezíme-li přímku $tx \parallel {}^3S$ spojnicí $w'{}^2f$. Vedouce bodem x přímku $xy \parallel {}^3A$, odetne nám na tečně A úsečku $\overline{ty}$, udávající rychlost, kterou se bod t šine v této přímce.

Odvodíme-li ještě z rychlosti $\overline{{}^3au}$ bodu ${}^3a$ tečny A, ve přímce ${}^2S$ se pohybujícího, rychlost ${}^2az$ tohoto bodu kolmou ku tečně A přímkou uz rovnoběžnou s touto přímkou, potom kolmice se dříve sestrojeného bodu y ku spojnici tz spuštěná protíná normálu N křivky K, v bodě t sestrojenou, v hledaném středu křivosti o. —

Použijíce této konstrukce také ku stanovení poloměru křivosti křivky elliptické v krajních bodech dvou sdružených průměrů nebo obou os tuto křivku určujících, přijdeme k známým konstrukcím, shodujícím se zároveň s oněmi, v prvé části tohoto článku odvozenými. —

O jisté vlastnosti trojúhelníka.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot**,
professor v Plzni.

V čísle 2. VI. ročníku časopisu „L'enseignement mathematique“ uvádí Japonec pan Kariya větu tuto:

Opišme ze středu O kružnice vepsané v trojúhelník ABC libovolnou kružnici, jež protne kolmice P_{BC}, P_{AC}, P_{AB} ze středu O na strany BC, AC, AB spuštěné v bodech A_1, B_1, C_1; i protínají se pak přímky AA_1, BB_1, CC_1 v bodě jediném, kterýžto bod nazval „point de Kariya“.

Věta tato jest velice speciálním případem věty obecné a bod Kariyův jen zvláštním bodem jistého bodu obecného, patřícího k trojúhelníku danému.

To dovolíme si ukázati v následujícím.

Nechť jest dán trojúhelník ABC (viz obr.) a libovolná kuželosečka K; stanovme poly stran trojúhelníka ABC hledíc ke kuželosečce a ty nechť jsou: pol A_1 patřící ku straně BC, pol B_1 patřící ku straně AC, pol C_1 patřící ku straně AB.

Trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ jsou pak polárně reciproké, o nichž jest známo, že jsou navzájem perspektivické, t. j. spojnice AA_1, BB_1, CC_1 protínají se v bodě jediném S a průsečíky stran stejnolehlých, t. j. průsečíky přímek AB, A_1B_1, — AC, A_1C_1, — BC, B_1C_1, nacházejí se na téže přímce, která jest patrně polárou bodu S, hledíc ke kuželosečce K.

K vůli úplné jasnosti podejme důkaz této věty, který ve formě analytické jest velmi jednoduchý.

Trojúhelník daný volme za základ soustavy trojúhelníkové,