Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr

O řešení lineárných rovnic. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 3, 101--110

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121139`

O řešení lineárných rovnic.

Napsal

Ed. Weyr.

V následujících úvahách podávám řešení této úlohy: Dán je jistý počet lineárných rovnic o jistém počtu neznámých; má se rozhodnouti, zdali lze neznámé tak ustanoviti, aby vyhověly všem daným rovnicím a v případě, že lze, mají se stanoviti všecka řešení oněch rovnic.

Úplné řešení tohoto problemu podal *Kronecker* a nalezne je čtenář v Baltzerově „Theorie und Anwendung der Determinanten"; je tam však vyloženo způsobem sice elegantním ale tak stručným, že jeho nutnost začátečníkům ihned nevysvítá, za kterouž asi příčinou do žádné elementarnější knihy o determinantech pojato nebylo. A přece jest odpověď k vytknuté otázce nad míru důležita pro nesčetné úvahy i elementárné mathematiky, tvoříc nejhlavnější applikaci theorie determinantů. Odhodlal jsem se tudíž upraviti odpověď k dané otázce způsobem do jisté míry novým (§. I., II. a VII.) a, doufám, dosti průhledným. Mimo to bude snad lze následujících úvah i jinde užiti, o čemž nechť čtenář sám rozhodne. Konečně podotýkám, že v §. II. předpokládám, že čtenář již ví, že n lineárným rovnicím o n neznámých v případě, kdy determinant koefficientů nezmizí, lze vždy a to jen jedním systemem neznámých vyhověti, ač důkaz k tomu výroku se teprve v §. V. nalezá; avšak důkaz tam položen z formalných důvodů a nikterak se neopírá o předchozí úvahy.

§. I. Definice podstatně různých a nerůzných soustav x.

V našich úvahách má značiti výraz „soustava x" n hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o nichž vždy předpokládáme, že nejsou *všecky* nullami, tedy že alespoň jedna z nich jest $\gtrless 0$.

Dvě soustavy x a x' nazýváme *podstatně různými*, jestliže nevymizí všechny determinanty

$$\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ x'_i & x'_j \end{vmatrix},$$

v nichž i a j značí dvě různá z čísel 1, 2, 3, ..., n; jest tedy alespoň jeden takový determinant pak $\gtrless 0$. Vymizí-li však všecky tyto determinanty, pravíme o soustavách x a x', že nejsou podstatně různé.

Tři soustavy x, x' a x'' nazýváme podstatně různými, jestliže nevymizí všechny determinanty

$$\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ x'_i & x'_j & x'_k \\ x''_i & x''_j & x''_k \end{vmatrix},$$

kde i, j, k značí tři různá čísla z řady 1, 2, 3, ..., n. Vymizí-li všecky tyto determinanty, tu pravíme, že soustavy x, x', x'' nejsou podstatně různé.

Jest patrné, že jsou-li tři soustavy podstatně různé, musí každé dvě z nich býti též podstatně různé, neboť kdyby x a x' nebyly podstatně různé, tu by všecky adjunkty elementů třetího řádku zmizely, tedy by byl determinant vždy nullou, proti supposici.

Obecně nazýváme ν systemů $x, x', x'', .. x^{(\nu-1)}$ při $\nu \leqq n$, podstatně různými, jestliže nevymizí všechny determinanty

$$\begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & .. & x_{k_\nu} \\ x'_{k_1} & x'_{k_2} & .. & x'_{k_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{(\nu-1)}_{k_1} & x^{(\nu-1)}_{k_2} & .. & x^{(\nu-1)}_{k_\nu} \end{vmatrix};$$

zde značí k_1, k_2, .., k_ν libovolná různá čísla řady 1, 2, 3, .., n.

Vymizí-li všecky tyto determinanty, tu pravíme, že ony systemy nejsou podstatně různými. Rozkladem těchto determinantů dle subdeterminantů libovolných stupňů jest patrno, že, jsouli $x, x', \ldots, x^{(\nu-1)}$ podstatně různé systemy, jsou každé dva z nich, každé tři atd. též podstatně různé. Totéž ostatně vychází z úvah následujícího paragrafu.

§. II. O skládání podstatně různých systemů.

Dána buď nějaká soustava x; tu každá s ní podstatně nerůzná soustava x' jest dána formulí

$$x'_k = \lambda x_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

kde λ značí stálou hodnotu různou od nully.

Důkaz. Dle supposice alespoň jedna z hodnot x_k není nullou; na př. $x_1 \gtrless 0$. Pak musí i $x'_1 \gtrless 0$, neboť dle supposice o nerůznosti soustav platí

$$x_1 x'_k - x_k x'_1 = 0, \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Kdyby $x'_1 = 0$, tu by patrně $x'_k = 0$ a tedy by se soustava x' skládala ze samých null, proti sjednání.

Při $x_k \gtrless 0$ máme obdobně $x'_k \gtrless 0$ a tedy dle poslední rovnice

$$\frac{x'_1}{x_1} = \frac{x_k'}{x_k}.$$

Nazveme-li tento podíl λ, máme

$$x'_1 = \lambda x_1; \qquad x'_k = \lambda x_k.$$

Při $x_k = 0$ plyne z citované rovnice $x'_k = 0$, tedy i zde platí rovnost $x'_k = \lambda x_k$, čímž tvrzení dokázáno.

Dány buďtež za druhé dvě podstatně různé soustavy x a x'. Každá soustava x'', jež s nimi tvoří tři podstatně nerůzné soustavy, jest dána formulí

$$x''_k = \lambda x_k + \mu x'_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

kdež λ a μ značí dvě stálé hodnoty.

Pravíme pak, *že soustava x''* jest *složena ze soustav x a x'.*

Důkaz. Poněvadž jsou x a x' dvě podstatně různé soustavy, nevymizí alespoň jeden z hodnot x a x' utvořený determinant druhého stupně; nechť na př.

$$x_\varrho x'_\sigma - x_\sigma x'_\varrho \gtrless 0.$$

Je-li index τ různý od ϱ i σ, máme dle druhé supposice

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_\varrho & x_\sigma & x_\tau \\ x'_\varrho & x'_\sigma & x'_\tau \\ x''_\varrho & x''_\sigma & x''_\tau \end{vmatrix} = 0.$$

Položme

$$(2) \qquad \begin{aligned} x''_\varrho &= \lambda x_\varrho + \mu x'_\varrho \\ x''_\sigma &= \lambda x_\sigma + \mu x'_\sigma, \end{aligned}$$

čímž hodnoty λ a μ jsou úplně stanoveny, neboť determinant jich koefficientů $x_\varrho x'_\sigma - x_\sigma x'_\varrho$ nemizí. Odečteme-li nyní v (1) λ-násobný první řádek a μ-násobný druhý od třetího, nabývá tato rovnice tvaru

$$\begin{vmatrix} x_\varrho & x_\sigma & x_\tau \\ x'_\varrho & x'_\sigma & x'_\tau \\ 0 & 0 & x''_\tau - \lambda x_\varrho - \mu x'_\tau \end{vmatrix} = 0$$

t. j.

$$(x_\varrho x'_\sigma - x_\sigma x'_\varrho)(x''_\tau - \lambda x_\tau - \mu x'_\tau) = 0\,,$$

z čehož soudíme

$$x''_\tau = \lambda x_\tau + \mu x'_\tau\,. \qquad (\tau \gtrless \varrho,\ \tau \gtrless \sigma)$$

Při $\tau = \varrho$ a $\tau = \sigma$ platí však tato rovnice vůči (2), tedy platí při $\tau = 1, 2, \ldots, n$, q. e. d.

Je patrné, že obě hodnoty λ a μ nemohou býti současně nullami, jinak by se soustava x'' skládala ze samých null, proti sjednání.

Přikročme k obecnému případu. Dáno ν podstatně různých soustav $x, x', x'', \ldots, x^{(\nu-1)}$. Každá soustava $x^{(\nu)}$, jež s nimi tvoří $\nu + 1$ podstatně nerůzných soustav, jest dána formulí

$$x_k^{(\nu)} = \alpha x_k + \alpha_1 x'_k + \alpha_2 x''_k + \ldots + \alpha_{\nu-1} x_k^{(\nu-1)}\,,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

v níž $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu-1}$ značí stálé hodnoty, které nemohou býti všecky nullami. Pravíme pak, že soustava $x^{(\nu)}$ jest složena ze soustav $x, x', \ldots, x^{(\nu-1)}$.

Důkaz. Dle první supposice nevymizí alespoň jeden z hodnot $x, x', \ldots x^{(\nu-1)}$ utvořený determinant ν-ho stupně. Nechť na př.

$$(3) \qquad \varDelta = \begin{vmatrix} x_{s_1} & x_{s_2} & . & . & x_{s_\nu} \\ x'_{s_1} & x'_{s_2} & . & . & x_{s_\nu}' \\ . & . & . & . & . \\ x_{s_1}^{(\nu-1)} & x_{s_2}^{(\nu-1)} & . & . & x_{s_\nu}^{(\nu-1)} \end{vmatrix} \gtrless 0\,.$$

Dle druhé supposice máme však, je-li index k různý od indexů $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$,

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x_{s_1} & x_{s_2} & . & . & x_{s_\nu} & x_k \\ x'_{s_1} & x'_{s_2} & . & . & x_{s_\nu}' & x'_k \\ . & . & . & . & . & . \\ x_{s_1}^{(\nu)} & x_{s_2}^{(\nu)} & . & . & x_{s_\nu}^{(\nu)} & x_k^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Položme

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
x_{s1}^{(\nu)} &= \alpha x_{s1} + \alpha_1 x'_{s1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x_{s1}^{(\nu-1)} \\
x_{s2}^{(\nu)} &= \alpha x_{s2} + \alpha_1 x'_{s2} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x_{s2}^{(\nu-1)} \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdot \\
x_{s\nu}^{(\nu)} &= \alpha x_{s\nu} + \alpha_1 x'_{s\nu} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x_{s\nu}^{(\nu-1)},
\end{aligned}
$$

kterýmiž rovnicemi jsou hodnoty α, α_1, α_2, .., $\alpha_{\nu-1}$ právě a úplně stanoveny, poněvadž determinant z jich koefficientů dle (3) nevymizí. Odečteme-li nyní ve (4) od posledního řádku α-násobný první řádek, α_1 násobný druhý, α_2 násobný třetí atd., tu se objeví v posledním řádku samé nully až na poslední element, a (4) přejde do tvaru

$$
\Delta\left(x_k^{(\nu)} - \alpha x_k - \alpha_1 x'_k - \ldots - \alpha_{\nu-1} x_k^{(\nu-1)}\right) = 0,
$$

z čehož vzhledem ku $\Delta \gtrless 0$ plyne

$$
x_k^{(\nu)} = \alpha x_k + \alpha_1 x'_k + \ldots + \alpha_{\nu-1} x_k^{(\nu-1)}.
$$

Index k supponován různý od s_1, s_2, ..., s_ν; však platí tato formule dle (5) i tenkráte, kdy k se rovná některému z těchto čísel, čímž je dokázána pro všecky hodnoty 1, 2, ..., n indexu k.

K vůli stručnosti pravím o soustavě $x^{(\nu)}$, dané poslední formulí, že jest *složena čili odvozena ze soustav* x, x', ..., $x^{(\nu-1)}$ *pomocí faktorů* α, α_1, ..., $\alpha_{\nu-1}$. Platí pak tato věta: *Dáno-li $s \leqq n$ podstatně různých soustav*

(A) $\qquad x_{k1},\ x_{k2},\ \ldots,\ x_{kn} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s)$

a odvodíme-li z nich s nových soustav

(B) $\qquad x_{k1},\ x_{k2},\ \ldots,\ x_{kn} \qquad (k = s+1, s+2, \ldots, 2s)$

pomocí faktorů

$$
a_{j1},\ a_{j2},\ \ldots,\ a_{js} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s),
$$

tu tvoří odvozené soustavy s podstatně různých soustav jen tehdy, kdy determinant $D = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, ..\, a_{ss}$ *je různý od nully.*

Důkaz. Každý determinant s-ho stupně S′ ze soustavy (B) se patrně jeví jakožto součin determinantu s-ho stupně S ze soustavy (A) a determinantu D. Dle supposice jest alespoň jeden determinant S různý od nully, tedy bude příslušný determinant S′ též různý od nully, jakmile $D \gtrless 0$; je-li ale $D = 0$, jsou veškeré $S' = 0$ a tedy systemy (B) nejsou pak podstatně různé.

Platí další věta: *Z s podstatně různých soustav lze odvoditi nanejvýše s podstatně různých soustav.*

Důkaz. Dejme tomu, že odvodíme z s podstatně různých soustav (A) pomocí faktorů

$$a_{j1}\,,\ a_{j2}\,,\ \ldots,\ a_{js} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s+1)$$

$s+1 \leqq n$ soustav (C). Soustavy (C) patrně též obdržíme, složíme-li podstatně různé soustavy v počtu $s+1$, které obdržíme ze soustav (A) přidáním libovolné soustavy

$$x_{s+1,1},\ x_{s+1,2},\ \ldots,\ x_{s+1,n}$$

pomocí faktorů

$$a_{j1}\,,\ a_{j2}\,,\ \ldots,\ a_{js}\,,\ 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s+1).$$

Avšak determinant D těchto faktorů se rovná nulle, nejsou tedy složené systemy dle předcházející věty podstatně různé, q. e. d.

§. III. Řešení n homogenních lineárných rovnic o n neznámých.

Dáno budiž n homogenních lineárných rovnic s tolikéž neznámými $x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ x_n$:

$$(6)\qquad \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}$$

Předpokládáme, že koefficienty a kterékoli z těchto rovnic nejsou všecky nullami; supposice dovolená, neboť by jinak taková rovnice byla zbytečnou.

Povaha řešení těchto rovnic podstatně závisí na determinantu utvořeném z koefficientů t. j. na

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a na jeho podřízených determinantech (minorech).

Není-li determinant $\varDelta$ nullou, tedy vyhoví daným rovnicím jedině hodnoty

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0.$$

Důkaz. Utvořme adjunkty determinantu $\varDelta$ náležející ku elementům k-ho sloupce t. j. ku $a_{1k},\ a_{2k},\ \ldots\ a_{nk}$; násobme těmito adjunkty resp. rovnice (6) a sečtěme výsledky, i obdržíme patrně

$$\Delta x_k = 0,$$

z čehož vůči $\Delta \gtrless 0$ plyne $x_k = 0$.

Předpokládejme nyní, že $\Delta = 0$; tu závisí povaha řešení na minorech tohoto determinantu. Utvořme jeho podřízené determinanty n—1-ho stupně a předpokládejme, že alespoň jeden z nich není nullou*). K vůli pohodlí zatím předpokládejme, že je to jeden z oněch minorů, jehož elementy jsou vzaty z prvních (n—1) řádků. Pak jsou soustavy v počtu n—1, totiž

$$a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn} \qquad (k = 1, 2, \ldots, [n-1])$$

podstatně různé, kdežto soustavy

$$a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

nejsou podstatně různé, poněvadž $\Delta = 0$; dovedeme tedy dle článku II. stanoviti n—1 takových hodnot $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, aby

$$a_{nj} = \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \ldots + \alpha_{n-1} a_{n-1,\,j}. \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Obdržíme tedy poslední rovnici (6) z ostatních tím, že je resp. násobíme hodnotami $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ a že výsledky sečteme. Z toho jde, že je tato poslední rovnice vždy vyplněna, je-li vyhověno ostatním, pročež netřeba ji v úvahu bráti.

Dejme dále tomu, že $\Delta = 0$ a že všecky subdeterminanty jeho stupně n—1-ho vymizí. Pak nutno tvořiti subdeterminanty stupně n—2-ho a přihlížeti, zdali některý nevymizí. Předpokládejme, že se tak stane, a že na př. nevymizí některý minor stupně n—2-ho utvořený z elementů vzatých z prvních n—2 řádků. Pak jsou systemy

$$a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn} \qquad (k = 1, 2, \ldots, [n-2])$$

podstatně různé, avšak přibéřeme-li system $k = n - 1$ aneb system $k = n$, máme $n - 1$ podstatně nerůzných systemů. Tedy lze ustanoviti čísla α a β tak, aby

$$a_{n-1,\,j} = \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \ldots + \alpha_{n-2} a_{n-2,\,j},$$
$$a_{n,j} = \beta_1 a_{1j} + \beta_2 a_{2j} + \ldots + \beta_{n-2} a_{n-2,\,j},$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Z toho vychází, že obdržíme předposlední rovnici (6), násobíme-li předcházející rovnice resp. hodnotami $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ a

*) Netřeba všecky tyto minory vždy počítati, stačí dojdeme-li k *jednomu*, jenž jest $\gtrless 0$; kdyby všecky vymizely, nastane případ, o němž na dalším místě jednáme.

sečteme-li výsledky; z těchže rovnic plyne pomocí násobitelů $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}$ poslední rovnice (6). Netřeba tedy poslední dvě rovnice (6) bráti v úvahu.

Jest nyní patrno, kterak můžeme pokračovati. Dejme tomu, že vymizí Δ a že vymizí *všecky* jeho minory stupně n—1-ho, *všecky* stupně n—2-ho, *všecky* n—3-ho atd. až konečně *všecky* stupně $s+1$-ho, že však všecky minory stupně s-ho nevymizí; k tomu dojíti musí, neb v opačném případě by i nejnižší minory t. j. *všecky* hodnoty a_{ik} zmizeti musily, což arci vylučujeme, neboť pak jsou hodnoty všech neznámých libovolné. Nechť na př. nevymizí některý minor stupně s-ho vzatý z prvních s řádků, řekněme třeba onen, jehož elementy jsou vzaty z prvních s sloupců, t. j. nechť

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{ss} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Pak lze $s+1$-ní, $s+2$-hou, atd. n-tou rovnici (6) odvoditi z prvních s rovnic tím, že je násobíme vhodně stanovenými čísly $\alpha, \beta, \ldots$ a sečteme; jsou tedy ony rovnice vyplněny, jakmile vyhověno těmto. Stačí tedy řešiti rovnice v počtu s o n neznámých:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Zvolme za $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ libovolné hodnoty a položme k vůli stručnosti

$$\begin{aligned} a_{1,\,s+1}x_{s+1} + a_{1,\,s+2}x_{s+2} + \ldots + a_{1n}x_n &= \alpha_1, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots \\ a_{s,\,s+1}x_{s+1} + a_{s,\,s+2}x_{s+2} + \ldots + a_{s,n}x_n &= \alpha_s; \end{aligned}$$

pak znějí poslední rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \alpha_1 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{ss}x_s + \alpha_s &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

v nichž hodnoty α jsou též známy. Tyto rovnice stanoví hodnoty

x_1, x_2, .., x_s úplně, jakož z následující úvahy vychází. Označme literou δ_{ik} adjunkt determinantu δ příslušný k elementu a_{ik} a násobme poslední rovnice resp. adjunkty δ_{ik} příslušnými k elementům některého sloupce v δ, na př. sloupce prvního, výsledky pak sečtěme; i obdržíme

$$\delta x_1 + \alpha_1 \delta_{11} + \alpha_2 \delta_{21} + .. + \alpha_s \delta_{s1} = 0,$$

z čehož vůči $\delta \gtrless 0$

$$x_1 = -\frac{1}{\delta}(\alpha_1 \delta_{11} + \alpha_2 \delta_{21} + .. + \alpha_s \delta_{s1}).$$

Násobíme-li poslední rovnice resp. adjunkty elementů k-ho sloupce, máme obecně

$$(8) \quad x_k = -\frac{1}{\delta}(\alpha_1 \delta_{1k} + \alpha_2 \delta_{2k} + .. + \alpha_s \delta_{sk}), \quad (k = 1, 2, .., s).$$

Takto stanovené hodnoty x_k rovnicím (7) taky skutečně vyhovují, čímž se lze tak jako v §. V. přesvědčiti, pročež máme toto řešení daných rovnic (1): *Hodnoty neznámých* x_{s+1}, x_{s+2}, .., x_n *jsou libovolné, hodnoty* x_1, x_2, ..., x_s *pak jsou dány formulí* (8) *jakožto homogenní lineárné funkce oněch libovolných hodnot.* Vůči okolnosti, že neznámé x_{s+1}, .., x_n voleny libovolně a že x_1, .., x_s pak nutně musejí míti hodnoty dané formulí (8), soudíme, že naše řešení jest obecné t. j. že zahrnuje *každou* soustavu hodnot x_1, x_2, .., x_n vyhovujících daným rovnicím (1).

Hodnota neznámé x_k vychází dle (8) ve tvaru zlomku a jest patrné, že čítatele $-(\alpha_1 \delta_{1k} + \alpha_2 \delta_{2k} + .. + \alpha_s \delta_{sk})$ obdržíme ze jmenovatele δ, nahradíme-li v tomto determinantu elementy k-ho sloupce resp. hodnotami $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, .., $-\alpha_s$.

Takto nalezenému obecnému řešení lze dáti ještě přehlednější tvar. Označme literami e, e_1, .. e_s libovolné hodnoty a napišme determinant stupně $s+1$-ho

$$D = \begin{vmatrix} e & e_1 & \dots & e_s \\ \alpha_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \alpha_2 & a_{21} & \dots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix}.$$

Adjunkt jeho náležející k elementu e jest patrně δ; adjunkty příslušné elementům $e_1, e_2, \ldots, e_s$ označme $D_1, D_2, \ldots, D_s$, i máme, kombinujíce tyto adjunkty s elementy 2-ho, 3-ho atd. řádku,

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\delta + a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \ldots + a_{1s}D_s &= 0,\\
\alpha_2\delta + a_{21}D_1 + a_{22}D_2 + \ldots + a_{2s}D_s &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
\alpha_s\delta + a_{s1}D_1 + a_{s2}D_2 + \ldots + a_{ss}D_s &= 0.
\end{aligned}
$$

Srovnáme-li tyto rovnice s rovnicemi (7), vidíme ihned, že rovnicím (7) vyhověno, položíme-li

$$x_1 = \frac{D_1}{\delta},\ x_2 = \frac{D_2}{\delta}, \ldots, x_s = \frac{D_s}{\delta}.$$

Tyto výrazy musejí býti arci s výrazy (8) totožny, což čtenář i přímo snadno nalezne.

V předcházející úvaze jsme supponovali, že minor δ stupně s-ho různý od nully jest utvořen z elementů a_{jk} vzatých z prvních s řádků a z prvních s sloupců determinantu $\varDelta$. Supposice tato v podstatě nevadí obecnosti. Neboť dejme tomu, že nemizící minor s-ho stupně jest utvořen z elementů vzatých z λ_1-ho, λ_2-ho, ... λ_s-ho řádku a z μ_1-ho, μ_2-ho, ... μ_s-ho sloupce determinantu $\varDelta$. Přepišme dané rovnice (1) tak, aby λ_1-tá, λ_2-tá, ... λ_s-tá se stala resp. první, druhou, ... s-tou rovnicí; v takto seřaděných rovnicích pak seřaďme neznámé takovým způsobem, aby $x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \ldots, x_{\mu_s}$ se staly resp. první, druhou, ... s-tou neznámou. V takto přepsaných rovnicích bude náš minor patrně sestrojen z elementů prvních s řádků a prvních s sloupců a dřívější formule podávají řešení. Z toho také patrno, že hodnoty x_h, jichž indexy jsou různy od čísel $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$, budou libovolny, hodnoty $x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_s}$ pak dány vyvozeným řešením jakožto homogenní, lineárné výrazy oněch.

(Dokončení.)