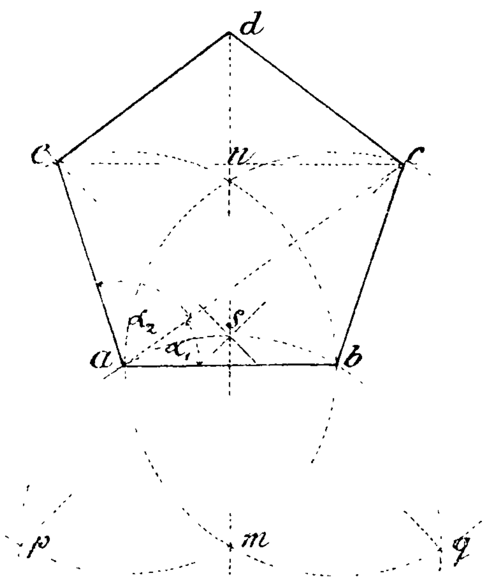
Drobnosti z konstrukcí pravidelných mnohoúhelníků.

Studujícím podává prof. **Václav Hübner** na Král. Vinohradech.

Článek tento jest navázán k dodatku ku předešlému článku „Příspěvek k parabole".

Sestrojiti pravidelný pětiúhelník, je-li dána jeho strana $\overline{ab}$.



Obr. 1

Z obou krajních bodů a, b opišme poloměrem $r = \overline{ab}$ kružnice, které se v m a n protnou; tímtéž poloměrem opišme z m třetí kružnici, která první dvě v bodech p, q protíná; spojíme-li průsečík s symetrály $\overline{mn}$ a třetí kružnice s body p, q, obdržíme na prvních dvou kružnicích vrcholy c, e hledaného pětiúhelníka. Vrchol d hledaného pětiúhelníka snadno již sestrojíme. Odůvodnění konstrukce: $\triangle\, abc \cong \triangle\, abe$ ($\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{ae}$, $\overline{ac} = \overline{be}$, vrcholy $c, e \ldots a, b$ jsou souměrné dle osy mn).

Z obrazce (1.) patrno, že $\sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle \alpha = 180 - 2\alpha_1$, tudíž $\alpha_2 = 180 - 3\alpha_1$; z $\triangle$ abc plyne $\frac{\overline{ac}}{2} = \overline{ab} \cos \alpha_1$. z $\triangle$ ace ($\triangle$ rovnoramenný $ac = ce$), $\frac{\overline{ac}}{2} = \frac{\overline{ab}}{2} = \overline{ac} \cos \alpha_2$, pročež $\frac{\overline{ac}}{2} \cdot \frac{\overline{ab}}{2} = \overline{ab} \, . \, \overline{ac} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$ a $\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 = \frac{1}{4}$. Dosadíme-li za $\alpha_2 = 180^0 - 3\alpha_1$, obdržíme $\cos \alpha_1 \cos 3\alpha_1 = -\frac{1}{4}$ a po náležitém upravení $16 \cos^4 \alpha_1 - 12 \cos^2 \alpha_1 + 1 = 0$, z čehož $\cos \alpha_1 = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}}$ a $\sphericalangle \alpha_1 = 36^0$ (pro hořejší znaménko $\cdots$ pro dolení znaménko byl by $\sphericalangle \alpha_1 = 72^0$); v prvním případě jest $\sphericalangle \alpha_2 = 180^0 - 108^0 = 72^0$ a ve druhém $\alpha_2 = 180^0 - 216^0 = -36^0$. Jest tudíž $\sphericalangle \alpha_1 = 36^0$ a $\sphericalangle \alpha = 180^0 - 72^0 = 108^0$. t. j. úhel vnitřní v pravidelném pětiúhelníku.

Připomenutí.

Z $\triangle$ *ace* plyne: $s_5 = 2u \sin 18^0 = u \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ($\overline{ae} = s_5$, $\overline{ac} = u$), tudíž $s_5^2 = \frac{u^2 (3 - \sqrt{5})}{2}$ a $2(u^2 - s_5^2) = u^2 (\sqrt{5} - 1)$; ježto $\sqrt{5} - 1 = \frac{2s_5}{u}$, jest $u^2 - s_5^2 = us_5$, čili $u : s_5 = s_5 : (u - s_5)$ — zlatý řez úhlopříčky!

Sestrojiti pravidelný osmiúhelník z dané strany ab.

Sestrojme symetrálu dané strany $\overline{ab}$ a nad $\overline{ab}$ opišme polokružnici, která seče symetrálu v bodě m; učiňme pak $\overline{ma} = \overline{mo}$ i jest o střed opsané kružnice a $\overline{oa} = r$.

Odůvodnění.

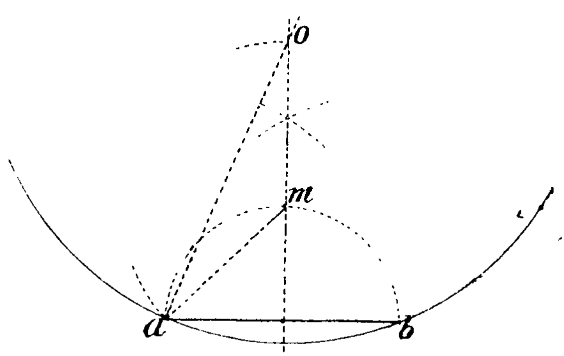
Poloměr opsané kružnice pravidelného osmiúhelníku

$$r = \frac{\overline{ab}}{2 \sin 22^0 30'} = \frac{\overline{ab}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\overline{ab}}{2} \sqrt{2 \, (2 + \sqrt{2})} . \quad (1)$$

Z obrazce 2. jest patrno, že $\overline{am} = \frac{ab}{2}\sqrt{2}$; z $\triangle$ rovnoramenného mao, v němž $\sphericalangle amo = 135^0$ a tudíž $\sphericalangle oam = 22^0 30'$, plyne:

$$\frac{\overline{ao}}{2} = am \cos 22^0 30' = \frac{ab}{2}\sqrt{2} \, . \cos 22^0 30'$$

nebo $$\overline{ao} = \overline{ab}\sqrt{2} \, . \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\overline{ab}}{2}\sqrt{2\,(2+\sqrt{2})}.$$



Obr 2.

Srovnáním s rovnicí první poznáváme, že $\overline{ao} = r$ a o jest tudíž středem opsané kružnice pravidelného osmiúhelníku. Pravidelný 8-úhelník možno též sestrojiti ze čtverce, jehož strana $s_4 = s_8\sqrt{2} + s_8$.

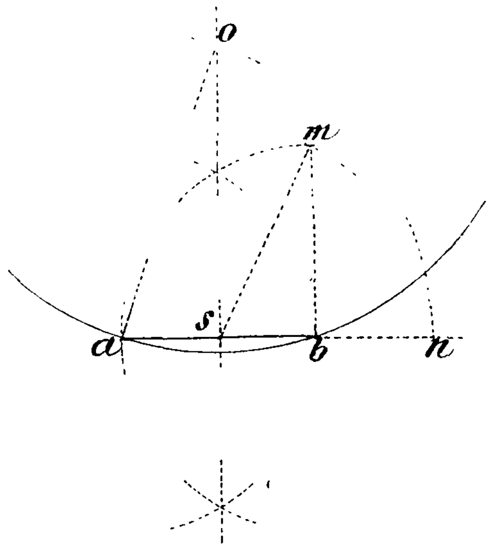
Sestrojiti pravidelný desetiúhelník, je-li dána jeho strana $\overline{ab}$.

Poloměrem $\overline{ab}$ sestrojme z obou krajních bodů oblouky, v bodě b vztyčme kolmici $\overline{bm}$ na $\overline{ab}$, opišme z bodu s poloměrem $\overline{sm}$ oblouk mn a učiňme $\overline{ao} = \overline{an}$; i jest o střed a $\overline{oa}$ poloměr opsané kružnice pravidelného 10-úhelníku.

Odůvodnění:

Jak známo, strana pravidelného desetiúhelníka do kružnice vepsaného rovná se většímu dílu poloměru rozděleného zlatým řezem. Platí tudíž $r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$ čili $r^2 - s_{10}r - s_{10}^2 = 0$ a $r = \frac{s_{10}(1 + \sqrt{5})}{2}$.

Z obrazce 3 jest patrno, že $\overline{bm} = ab = s_{10}$ a $\overline{sb} = \frac{s_{10}}{2}$;



Obr. 3.

z Δ pravoúhlého sbm jest $\overline{sm} = \overline{sn} = \sqrt{\overline{bm}^2 + \overline{sb}^2} = \sqrt{s_{10}^2 + \frac{s_{10}^2}{4}} =$
$= \frac{s_{10}}{2}\sqrt{5}.$

Dále jest $\overline{oa} = \overline{an} = \overline{as} + \overline{sn} = \frac{s_{10}}{2} + \frac{s_{10}}{2}\sqrt{5} = \frac{s_{10}}{2}(1 + \sqrt{5})$, tudíž $\overline{oa} = r$ a o jest střed opsané kružnice

Připomenutí.

Strana pravidel. 5-úhelníka: $s_5 = 2r \sin 36^0 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

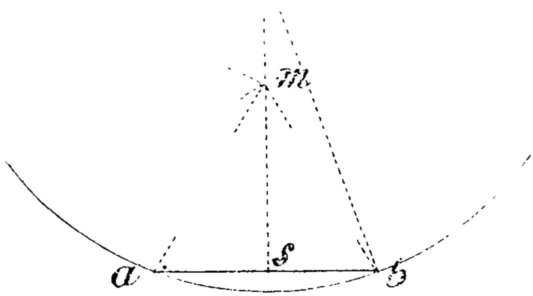
„ „ 10-úhelníka: $s_{10} = 2r \sin 18^0 = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

tudíž $$s_5^2 = \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}).$$

$$s_{10}^2 = \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}),$$

a $s_5^2 - s_{10}^2 = r^2$.

Dána jest strana $\overline{ab}$ pravidelného devítiúhelníka, sestrojiti jej.



Obr. 4.

Nad stranou $\overline{ab}$ sestrojme △ rovnostranný abm a k výšce $\overline{sm}$ přidejme $\overline{mo} = \overline{sb}$ i jest o střed a $\overline{ob} = r$ poloměr kružnice opsané (konstrukce přibližná).

Odůvodnění:

Poloměr opsané kružnice pravidelného 9-úhelníku stanoven jest rovnicí

$$r = \frac{s_9}{2 \cdot \sin 20^0} = s_9 \frac{1}{0\cdot68404\ldots} = 1\cdot5\, s_9.$$

Strana pravidelného 9-úhelníka jest tudíž přibližně $= \frac{2r}{3}$.

Z obrazce 4. poznáváme, že $\overline{so} = \overline{sm} + \overline{mo} = \frac{\overline{ab}}{2}\sqrt{3} + \frac{\overline{ab}}{2}$

a z △ pravoúhlého osb:

$$\overline{ob} = \sqrt{\left(\frac{\overline{ab}}{2}\right)^2 \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\overline{ab}}{2}\right)^2} = \frac{\overline{ab}}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\overline{ab}}{2}\sqrt{8\cdot4641\ldots} = 1\cdot5\,\overline{ab}.$$

Jest tudíž přibližně $\overline{ob} \doteq r$.