Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně pomocí determinantů cyklických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 4, 225--235

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121112

$$\xi + y - z = 0 \qquad \zeta + x - y = 0$$
$$\eta + z - x = 0 \qquad \xi + \eta + \zeta = 0$$

Poslední rovnice plyne ze tří předcházejících; 9 neodvislých rovnic slouží tudíž k určení 9 neznámých veličin: $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, a rozdílů mezi O, A, B, C (absolutní hodnoty potencialných výší nelze patrně určiti, neznáme-li hodnotu potencialného úkonu na určitém místě. Velmi jednoduchý výraz obdržíme pro ξ, totiž

$$\xi = \frac{E}{D}(b\beta - c\gamma)$$

z kterého plyne pro $\xi = 0$,

$$b\beta = c\gamma,$$

známé pravidlo, na němž se zakládá upotřebení Wheatstoneova mostu. D jest zde výraz složený z veličin $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.

(Dokončení.)

O řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně pomocí determinantů cyklických.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

I.

O binomických rovnicích.

Značí-li ω nějaký kořen binomické rovnice

$$x^n - 1 = 0,$$

jest i každá celistvá a positivní mocnina veličiny ω jejím kořenem. Jestiť tu

$$\omega^n = 1, \tag{1}$$

z čehož plyne

$$\omega^{nk} = (\omega^k)^n = 1,$$

takže jsou též kořeny předložené rovnice

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^n, \tag{2}$$

kterážto řada obsahuje nanejvýš n rozličných hodnot, jelikož

$$\omega^{n+1} = \omega, \omega^{n+2} = \omega^2, \ldots$$

Hodnoty řady (2) jsou vesměs rozličné, představuje-li n číslo *kmenné* a není-li $\omega = 1$.

Jest-li na př. $n = 3$, rovnice tedy

$$x^3 - 1 = 0,$$

má kořeny rozličné 3 a sice

$$1,\ \omega,\ \omega^2,$$

takže o nich platí podlé známého pravidla

$$1 + \omega + \omega^2 = 0, \tag{3}$$

$$\omega^3 = 1. \tag{4}$$

A poněvadž možná rozložiti a psáti

$$x^3 - 1 \equiv (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

obdrží se ze dvou rovnic tuto spojených

$$x - 1 = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

obyčejným řešením

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = \omega,$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = \omega^2,$$

takže i tu se poznává, že

$$x_3 = x_2^2.$$

Poznamenání. Jestli mocnitel

$$n = p^m,$$

kdež p znamená číslo kmenné, možná řešení rovnice binomické provésti spůsobem jednodušším; vyhledáť se od 1 lišící se kořen β_1 rovnice

$$x^p - 1 = 0,$$

pak nějaký kořen β_2 rovnice

$$x^p - \beta_1 = 0$$

a podobně kořen β_3 rovnice

$$x^p - \beta_2 = 0, \text{ atd.},$$

čímž obdržíme kořeny, odpovídající případu předešlému.

Jestli na př. $n = 4 = 2^2$,

obdržíme z jednoduché rovnice kvadratické

$$x^2 - 1 = 0$$

kořeny $+1$, $\beta_1 = -1$, načež z rovnice druhé

$$x^2 + 1 = 0$$
jde $+i$, $-i$, jakož i odjinud známo. Řadě mocnin
$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4$$
odpovídá tu řada kořenů
$$i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1.$$

II.

O cyklických determinantech.

Máme-li n prvků rozličných
$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}$$
obdržíme z nich cyklickou záměnou přípon n rozličných skupin a sice
$$\begin{array}{llll} a_0 & a_1 & a_2 \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 \ldots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \ldots & a_{n-3} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_0. \end{array}$$
Považujeme-li pak skupiny tyto za řádky determinantní, kladouce
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_{n-1} \\ a_{n-1}, & a_0, & a_1, & \ldots, & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1}, & a_0, & \ldots, & a_{n-3} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_0 \end{vmatrix}, \tag{5}$$
obdržíme zvláštní determinant, zvaný *cyklický*.

Jest tu rozestaveno n prvků na n^2 místech spůsobem takovým, že prvky rovnoběžně s hlavní příčkou položené jsou stejny, z čehož patrno, že cyklický determinant jest zároveň *přesouměrným* čili *orthosymmetrickým* neboli *persymmetrickým.*

Máme-li na př. prvky tři a, b, c, obdržíme z nich cyklický determinant
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix},$$
jejž vyjádřiti můžeme součtem dle vzorce rozkladního
$$\Delta_3 = a\,A + b\,B + c\,C,$$

kdež velkými písmenami označeny jsou doplňkové subdeterminanty prvků malými písmenami stejného jména označených. A tu patrno, že podlé známého pravidla bude

$$0 = aC + bA + cB$$
$$0 = aB + bC + cA,$$

jelikož do vzorce posledního zavedeny jsou subdeterminanty, příslušné prvkům řádku druhého a třetího, tedy cyklickou záměnou povstávajícím sledem.

Tuto vlastnost na zřeteli majíce, můžeme nyní přikročiti k důkazu, že cyklický determinant stupně n-tého (5) možná vyjádřiti součinem n faktorů, majících po n sčítancích. Jestiť dle známých vzorců, právě při determinantu stupně třetího vytknutých

$$a_0 A_0 + a_1 A_1 + \ldots + a_{n-1} A_{n-1} = \Delta_n \qquad (6)$$
$$a_0 A_{n-1} + a_1 A_0 + \ldots + a_{n-1} A_{n-2} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0 A_2 + a_1 A_3 + \ldots + a_{n-1} A_1 = 0 \qquad (7)$$
$$a_0 A_1 + a_1 A_2 + \ldots + a_{n-1} A_0 = 0.$$

Sečteme-li tu na obou stranách, k tomu přihlížejíce, že členy pod sebou stojící mají společné faktory, obdržíme

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1})(A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-1}) = \Delta_n,$$

z čehož soudíme, že determinant Δ_n obsahuje faktor

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}.$$

Značí-li pak

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \ldots,\ \omega^n$$

kořeny binomické rovnice

$$\omega^n = 1,$$

takže platí podlé předešlého

$$\omega^{n+1} = \omega,\ \omega^{n+2} = \omega^2,\ \ldots,$$

proveďme násobení se zřetelem k okolnosti této a sice

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1}) \\
&.\,(A_0\omega^n + A_1\omega^{n-1} + \ldots A_{n-1}\omega) \\
= {}& a_0 A_{n-1}\omega + a_0 A_{n-2}\omega^2 + \ldots + a_0 A_0 \omega^n \\
&+ a_1 A_0 \omega + a_1 A_{n-1}\omega^2 + \ldots + a_1 A_1 \omega^n \\
&+ a_2 A_1 \omega + a_2 A_0 \omega^2 + \ldots + a_2 A_2 \omega^n \qquad (8) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_{n-1} A_{n-2}\omega + a_{n-1} A_{n-3}\omega^2 + \ldots + a_{n-1} A_{n-1}\omega^n,
\end{aligned}$$

načež obdržíme, sečítajíce podlé sloupců a pak zřetel majíce ke vzorcům (6) a (7), že součin předcházející má hodnotu Δ_n, z čehož soudíme, že v něm obsažen jest faktor

$$a_0 + a_1\,\omega + a_2\,\omega^2 + \ldots + a_{n-1}\,\omega^{n-1}.$$

A poněvadž se koefficienty tohoto součinu (8) nezmění, položíme-li na levé straně za ω nějakou mocninu, buď druhou, třetí, . . . , $(n-1)$ní, tedy

$$\omega^2,\ \omega^3,\ \ldots,\ \omega^{n-1},$$

poznáváme, že faktorem determinantu bude též

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1\,\omega^2 + a_2\,\omega^4 + \ldots + a_{n-1}\,\omega^{2(n-1)}, \\ a_0 + a_1\,\omega^3 + a_2\,\omega^6 + \ldots + a_{n-1}\,\omega^{3(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1\,\omega^{n-1} + a_2\,\omega^{2(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\,\omega^{(n-1)(n-1)}. \end{array}$$

I jest tedy determinant tento součinem n faktorů tuto vytknutých, takže psáti můžeme

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \,.\, \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,\omega^k \,.\, \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,\omega^{2k} \,\ldots\ldots \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,\omega^{(n-1)k}. \qquad (9)$$

Prvním členem tu jest patrně $a_0^{\,n-1}$, jakož se i poznává ze složení determinantu (5).

Podlé toho jest na př. bezprostředně

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3\,a_0\,a_1\,a_2,$$

avšak podlé vzorce (9) též

$$\Delta_3 = (a_0 + a_1 + a_2)\,(a_0 + a_1\,\omega + a_2\,\omega^2)\,(a_0 + a_1\,\omega^2 + a_2\,\omega^4),$$

jelikož tu klásti nutno v součinu rozvedeném

$$\omega^3 = 1 \text{ a } 1 + \omega + \omega^2 = 0 \text{ neboli } \omega + \omega^2 = -1.$$

A podobně obdržíme pro cyklický determinant stupně čtvrtého dva výrazy a sice přímo

$$\begin{array}{l} \Delta_4 = a_0^4 - 2\,a_0^2\,(a_2^2 + 2\,a_1\,a_3) + 4\,a_0\,a_2\,(a_1^2 + a_3^2) \\ \qquad - (a_1^2 - a_3^2)^2 + a_2^2\,(a_2^2 - 4\,a_1\,a_3) \end{array}$$

a podlé vzorce (9)

$$\begin{array}{l} \Delta_4 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)\,(a_0 + a_1\,\omega + a_2\,\omega^2 + a_3\,\omega^3) \\ \qquad (a_0 + a_1\,\omega^2 + a_2\,\omega^4 + a_3\,\omega^6) \\ \qquad (a_0 + a_1\,\omega^3 + a_2\,\omega^6 + a_3\,\omega^9), \end{array}$$

kdež nutno psáti v rozvedeném součinu

$$\omega^4 = 1,\quad 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = 0.$$

III.

Upotřebení tohoto rozkladu k řešení rovnic stupně třetího a čtvrtého.

Jakož známo, v rovnici stupně n-tého

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

možná odstraniti člen druhý, obsahující mocninu neznámé o 1 nižší nežli jest mocnina nejvyšší, jednoduchým zavedením nové neznámé vzorcem

$$x = y - \frac{a_1}{n}.$$

I možná tedy považovati tvar rovnice

$$F(y) \equiv y^n + b_2 y^{n-2} + b_3 y^{n-3} + \ldots + b_{n-1} y + b_n = 0 \quad (10)$$

též za obecný, jako tvar předcházející.

Majíce pak tento tvar na zřeteli, můžeme jej nahraditi tvarem determinantním, jelikož podlé známého vzorce*)

$$\begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & x & c_2 & \ldots & l_2 \\ a_3 & b_3 & x & \ldots & l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & x \end{vmatrix} = x^n + x^{n-2} \Sigma \Delta_0^{(2)} + x^{n-3} \Sigma \Delta_0^{(3)} + \ldots + \Delta_0^{(n)},$$

kdež značí $\Delta_0^{(k)}$ determinanty stupně k-tého s příčkou prázdnou, jichž doplňkový determinant má v hlavní příčce samé x.

Rovnice tato (10) má n kořenů a sice

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n,$$

takže možná pak $F(y)$ vyjádřiti součinem a psáti

$$F(y) \equiv (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) \ldots (y - y_n); \quad (11)$$

a naopak, známe-li tvar součinu (11), můžeme i přímo sestaviti kořeny rovnice (10).

1. Máme-li tedy na zřeteli rovnici stupně *třetího* **) tvaru

$$x^3 + 3a x + 2b = 0, \quad (12)$$

---

*) Viz Studnička „O determinantech" pag. 28.

**) Co se týče rovnice stupně druhého, neobsahující neznámou v 1. mocnině, tu se patrně obdrží přímo

$$\begin{vmatrix} x & \alpha \\ \alpha & x \end{vmatrix} = x^2 - \alpha^2 = (x + \alpha)(x - \alpha),$$

jelikož tu z podmínky

$$\omega^2 = 1 \text{ plyne } \omega = \pm 1.$$

můžeme ji porovnati s cyklickým determinantem

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x, & \alpha, & \beta \\ \beta, & x, & \alpha \\ \alpha, & \beta, & x \end{vmatrix} = x^3 - 3\alpha\beta x + \alpha^3 + \beta^3, \tag{13}$$

z něhož obdržíme podlé vzorce (9) též

$$\Delta_3 = (x + \alpha + \beta)(x + \alpha\omega + \beta\omega^2)(x + \alpha\omega^2 + \beta\omega^4). \tag{14}$$

Podlé vytknuté právě souvislosti součinu (11) s rovnicí (10) soudíme tedy, že rovnice

$$x^3 - 3\alpha\beta x + \alpha^3 + \beta^3 = 0 \tag{15}$$

má tři kořeny a sice

$$x_1 = -(\alpha + \beta),\ x_2 = -(\alpha\omega + \beta\omega^2),\ x_3 = -(\alpha\omega^2 + \beta\omega^4),$$

kdež význam veličin $\omega = \omega^4$ a ω^2 jest z odstavce I. známý.

Srovnáme-li tedy rovnici (15) s předloženou rovnicí (12), poznáme, že

$$\alpha \,.\, \beta = - \quad a,$$
$$\alpha^3 + \quad \beta^3 = \quad 2\,b,$$

takže vyloučíme-li tu z obou rovnic veličinu α, obdržíme

$$\beta^6 - 2\,b\,\beta^3 - a^3 = 0, \tag{16}$$

kterážto rovnice, *resolventou* se jmenujíc, poskytuje dva kořeny a sice $\beta_1{}^3$ a $\beta_2{}^3$. A poněvadž součin těchto kořenů se rovná členu poslednímu $-a^3$, tedy platí

$$\beta_1\,\beta_2 = -a,$$
$$\alpha = \beta_2,$$

z čehož patrno, že β_1 a β_2 nutno zvoliti tak, aby součin jejich byl realný a měl se zřetelem k a v rovnici (12) obsaženému označení opačné.

Co se týče rozličných připadů zde možných, s těmi nebudeme se zde zanášeti, jelikož rozbor rovnic stupně třetího není naším účelem, nýbrž jen methoda řešení, užívající cyklických determinantů.

2. Předložena-li pak rovnice *čtvrtého* stupně

$$x^4 + a\,x^2 + b\,x + c = 0, \tag{17}$$

můžeme ji porovnati s cyklickým determinantem

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} x, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ \gamma, & x, & \alpha, & \beta \\ \beta, & \gamma, & x, & \alpha \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & x \end{vmatrix} = \begin{matrix} x^4 - 2(\beta^2 + 2\alpha\gamma)x^2 + 4\beta(\alpha^2 + \gamma^2)x \\ -(\alpha^2 - \gamma^2)^2 + \beta^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma), \end{matrix}$$

jejž obdržíme z předcházejícího Δ_4, klademe-li tam

$$a_0 = x,\ a_1 = \alpha,\ a_2 = \beta,\ a_3 = \gamma;$$

zároveň pak obdržíme podlé vzorce (9)

$$\Delta_4 = (x + \alpha + \beta + \gamma)\ (x + \alpha i - \beta - \gamma i)\ (x - \alpha + \beta - \gamma) \\ . (x - \alpha i - \beta - \gamma i),$$

jelikož tu platí

$$\omega = \omega^9 = i,\ \omega^2 = \omega^6 = -1,\ \omega^3 = -i,\ \omega^4 = 1.$$

Rovnice tato má tedy kořeny

$$\begin{array}{l|l} x_1 = -\beta - (\alpha + \gamma) & x_3 = \beta - (\alpha - \gamma)\, i \\ x_2 = -\beta + (\alpha + \gamma) & x_4 = \beta + (\alpha - \gamma)\, i, \end{array}$$

jež patrně vyhovují podmínce

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Porovnáme-li pak levou stranu rovnice s determinantním výrazem součtovým, poznáme, že

$$\beta^2 + 2\,\alpha\gamma = -\frac{a}{2}, \tag{18}$$

$$\beta\,(\alpha^2 + \gamma^2) = \frac{b}{4}, \tag{19}$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)^2 - \beta^2\,(\beta^2 - 4\,\alpha\gamma) = -c. \tag{20}$$

Z prvních dvou podmínek těchto snadno si zjednáme převedením veličiny β a β^2 na stranu pravou a přiměřeným pak spojením

$$(\alpha + \gamma)^2 = \frac{b}{4\beta} - \left(\frac{a}{2} + \beta^2\right), \tag{21}$$

$$(\alpha - \gamma)^2 = \frac{b}{4\beta} + \left(\frac{a}{2} + \beta^2\right), \tag{22}$$

z čehož plyne, násobíme-li na obou stranách,

$$(\alpha^2 - \gamma^2)^2 = \frac{b^2}{16\beta^2} - \left(\frac{a}{2} + \beta^2\right)^2,$$

načež z třetí podmínky se obdrží kubická resolventa

$$\beta^6 + \frac{a}{2}\beta^4 + \frac{a^2 - 4c}{16}\beta^2 - \frac{b^2}{64} = 0. \tag{23}$$

Rovnice tato má aspoň jeden positivní realný kořen $\beta_1^{\,2}$, z čehož β_1 se určí co do znamení se zřetelem ku podmínce (19) souhlasně s veličinou b; ostatní dva kořeny $\beta_2^{\,2}$ a $\beta_3^{\,2}$ jsou buď oba positivní nebo negativní, anebo soujemné a tu sdružené. Jelikož pak z posledního členu rovnice (23) plyne

$$\beta_1\,\beta_2\,\beta_3 = \frac{b}{8}, \tag{24}$$

nutno zvoliti ze šesti hodnot

$$\pm \beta_1, \pm \beta_2, \pm \beta_3$$

tři vždy tak, aby označení součinu souhlasilo s označením koefficientu b. A podlé toho se tedy z rovnice (21) se zřetelem k tomu, že z druhého členu resolventy plyne

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^3 = -\frac{a}{2},$$

přímo obdrží

$$\alpha + \gamma = \sqrt{\frac{b}{4\beta_1} - \left(\frac{a}{2} + \beta_1^2\right)}$$

anebo se zřetelem k relaci (24)

$$\alpha + \gamma = \sqrt{2\beta_2\beta_3 - \left(\frac{a}{2} + \beta_1^2\right)}$$

$$= \sqrt{2\beta_2\beta_3 + \beta_2^2 + \beta_3^2} = \beta_2 + \beta_3;$$

a podobně plyne z podmínky (22)

$$\alpha - \gamma = \sqrt{2\beta_2\beta_3 - \beta_2^2 - \beta_3^3} = (\beta_2 - \beta_3)i.$$

Máme-li tedy na zřeteli hodnoty kořenů, jaké poskytl součin, odpovídající determinantu cyklickému Δ_4, poznáme, že kořeny rovnice (17) jsou tyto:

$$x_1 = -\beta_1 - \beta_2 - \beta_3,$$
$$x_2 = -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3,$$
$$x_3 = +\beta_1 - \beta_2 + \beta_3,$$
$$x_4 = +\beta_1 + \beta_2 - \beta_3.$$

Konečně budiž ještě poznamenáno, že rovnice (17) má a) *všechny* kořeny *realné*, jsou-li kořeny resolventy *positivní*, b) *dva realné* a *dva soujemné*, je-li jeden kořen resolventy *positivní, ostatní soujemné*, a c) *všechny soujemné*, je-li jeden kořen resolventy *positivní, ostatní* pak *negativní.* *)

Poznamenání. Že rozšíření této methody, cyklických determinantů užívajících, na rovnice stupně *pátého* a *vyššího* nelze provésti, potvrzuje výrok již *Abelem* odůvodněný, že algebraické řešení rovnic těchto nelze všeobecně provésti.

---

*) Čtenářům ku praksi též přihlížejícím budiž odporučeno řešení rovnice

$$x^4 - 60x^2 + 80x + 384 = 0,$$
$$x^4 - x^2 + 90x + 250 = 0,$$

jež *Staudacher* ve svém spise „Lehrbuch der algebraischen Analysis“ (München, 1882) k této theorii přidává, a z něhož byl podnět vzat k tomuto pojednání.

O středech křivosti křivek Descartových a kuželoseček.

Napsal

F. Machovec, professor v Karlíně.

Definice křivek Descartových obsažena jest v rovnici

$$\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_2 \varrho_2 = 2a,$$

'ež značí λ_1, λ_2 a $2a$ veličiny stálé a ϱ_1 a ϱ_2 průvodiče $f_1 m$ a n libovolného bodu m křivky.

Zvolíme-li spojnici ohnisek $f_2 f_1$ za osu úseček, střed délky $f_2 f_1 = 2c$ za počátek pravoúhlé soustavy souřadnic a označíme-li úhly tvořené osou X a kolmicemi, které jsou z počátku o na průvodiče spuštěny, α_1 a α_2, jest rovnice přímky

$$f_1 m \ldots . F_1 \equiv (x - c) \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 = 0,$$

a přímky

$$f_2 m \ldots . F_2 \equiv (x + c) \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 = 0.$$

Rovnici normály v bodě m křivky Descartovy lze psáti ve tvaru

$$N \equiv \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 = 0,$$

a rovnici normály nekonečně blízké

$$N + dN = 0.$$

Při tom jest

$$dN \equiv - \lambda_1 [(x - c) \sin \alpha_1 - y \cos \alpha_1] \, d\alpha_1$$
$$+ \lambda_2 [(x + c) \sin \alpha_2 - y \cos \alpha_2] \, d\alpha_2.$$

Avšak

$$(x - c) \sin \alpha_1 - y \cos \alpha_1 = 0, \quad \text{čili} \quad P_1 = 0,$$

a

$$(x + c) \sin \alpha_2 - y \cos \alpha_2 = 0, \quad \text{čili} \quad P_2 = 0,$$

jsou rovnice kolmic v ohniskách f_1 a f_2 na průvodiče vztyčených, z čehož následuje, že přímka P_3, která má rovnici

$$\frac{dN}{d\alpha_2} \equiv \lambda_1 P_1 \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} - \lambda_2 P_2 = 0,$$

prochází průsečníkem s kolmic P_1 a P_2. Spojuje tudíž tato přímka bod s se středem křivosti místa m křivky Descartovy.

Rovnici přímky P_3 lze psáti ještě v jiném tvaru. Z rovnice

$$\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_2 \varrho_2 = 2a,$$

obdržíme diferencováním

$$\lambda_1 d\varrho_1 + \lambda_2 d\varrho_2 = 0.$$

Označíme-li φ_1 a φ_2 úhly, které tvoří normála N s průvodiči bodu m, jest

$$d\varrho_1 = \varrho_1 d\alpha_1 \, tg\, \varphi_1,$$
$$d\varrho_2 = \varrho_2 d\alpha_2 \, tg\, \varphi_2,$$

což vloženo do rovnice předcházející, poskytne

$$\lambda_1 \varrho_1 d\alpha_1 \, tg\, \varphi_1 + \lambda_2 \varrho_2 d\alpha_2 \, tg\, \varphi_2 = 0,$$

a uvážíme-li ještě, že

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2},$$

obdržíme

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = -\frac{\lambda_2 \cos \alpha_1 \, tg\, \varphi_2}{\lambda_1 \cos \alpha_2 \, tg\, \varphi_1}.$$

Na základě toho lze rovnici přímky P_3 psáti ve tvaru

$$P_3 \equiv P_1 \cos \alpha_1 \, tg\, \varphi_2 + P_2 \cos \alpha_2 \, tg\, \varphi_1 = 0.$$

Porovnáme-li rovnice přímek P_1, P_2 a P_3 s rovnicí přímky $P_4 \equiv P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 = 0$, která jest určena body s a m, shledáme, že

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = -\frac{tg\, \varphi_1}{tg\, \varphi_2}.$$

Týž dvojpoměr však náleží přímkám F_1, F_2, N a tečně T křivky Descartovy v bodě m; jest totiž i

$$(F_1 F_2 T N) = -\frac{tg\, \varphi_1}{tg\, \varphi_2}.$$

Z toho jsou patrny věty:

a) Dvojpoměr, dle něhož dělí bod Cartesiany a jeho střed křivosti úsečku normály, obsaženou mezi kolmicemi vztyčenými v obou ohniskách na průvodiče onoho bodu, roven jest dvojpoměru, dle něhož tečna a normála toho bodu odděluje průvodiče.

b) Přímka, která jest určena dvěma body kružnice opsané trojúhelníku $f_1 f_2 m$ a sice bodem s k bodu m protilehlým a bodem p, pro nějž platí $(f_1 f_2 m p) = (F_1 F_2 T N)$, prochází středem křivosti místa m Cartesiany.

Pro kuželosečky platí tytéž věty. Dvojpoměry při tom se vyskytující jsou harmonické.