Vladimír Ryšavý

Metodické poznámky z trigonometrie

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 55 (1926), No. 1, 120--123

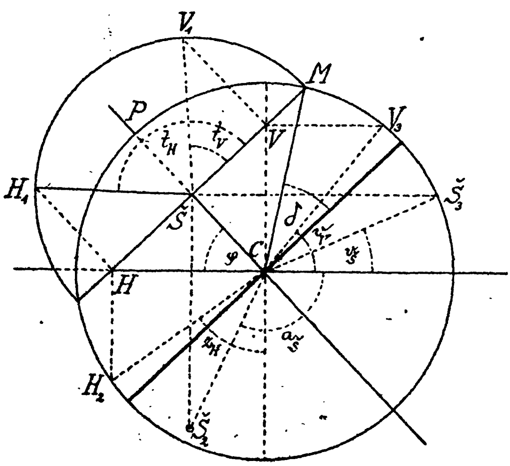
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121068

*Dr. VLAD. RYŠAVÝ:*

# Metodické poznámky z trigonometrie.

*I. Z trigonometrie rovinné.*

1. Obvyklý postup při vyučování trigonometrie rovinné je ten, že po základních pojmech a řešení trojúhelníka pravoúhlého se proberou funkce úhlů do $4R$ a pak se řeší trojúhelník kosoúhlý na základě vět pro něj odvozených. Tím však vzniká u žáků obyčejně předsudek, že kosoúhlý trojúhelník nelze řešiti pomocí vět o trojúhelníku pravoúhlém. A protože zájem žáků o nové poznatky stoupá,




čím širší a rozmanitější jest jejich použití, domnívám se, že jest prospěšno řešení trojúhelníku pravoúhlého použíti ihned na řešení trojúhelníků obecných. Je-li dán úhel, lze tak učiniti bezprostředně spuštěním té výšky, kterou by jedna strana a přilehlý k ní úhel nebyly děleny. Je-li dán trojúhelník třemi stranami, použijeme podle obr. 57. Vojtěchovy Geometrie pro VI. tř. (3. vyd.) kružnice vepsané.

2. Na gymnasiích a reálných gymnasiích, kde se nevyučuje trigonometrii sférické, jest možno ke konci*) ukázati, jak lze řešiti některé úlohy sférické astronomie pomocí trigonometrie rovinné. Postup pochází od Al. Höflera a je uveden v jeho díle »Didaktik der Himmelskunde« na str. 259; ale nebude snad zbytečno, stručně jej zde naznačiti, již proto, že literatura matematická jest v knihovnách profesorských na gymnasiích zastoupena prabídně.

*) Po případě v VII. tř. při astronomii.

Zobrazme oblohu nárysem v rovině poledníkové a sklopme do ní po řadě světovou rovnoběžku, obzor a první vertikál. Obdržíme tím v pravé velikosti postupně hodinový úhel $t_H$ tělesa zapadajícího, večerní jeho vzdálenost $z_H$ a výšku tělesa $v_V$ pro polohu v prvním vertikálu. Tím je také již dáno konstruktivní řešení základních těchto úloh. Početně plynou jmenované úhly trigonometrií rovinnou ze souvislosti příslušných trojúhelníků pravoúhlých s trojúhelníkem pravoúhlým $CVH$, určeným zeměpisnou šířkou $\varphi$ a deklinací $\delta$. Tak na př. dvojí výraz pro $HŠ$ z obrazce $CŠH_1H$ poskytuje rovnici

$$ŠH_1 \cos(180 - t_H) = ŠC \operatorname{tg} \varphi,$$

z níž, vyjádří-li se délky poloměrem $CM$, vychází po úpravě

$$\cos t_H = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi.$$

Podobně vede úsečka $HC$ ke vztahu

$$\sin z_H = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

a úsečka $CV$ ke vzorci $\sin v_V = \dfrac{\sin \delta}{\sin \varphi}$.

Netřeba snad připomínati četných úloh o stálicích i slunci, jež rovnicemi těmi při různé volbě daných veličin jsou řešitelny.

Sklopením, resp. průmětem lze obdržeti snadno také hodinový úhel polohy $V$ v prvním vertikálu a obzorníkové souřadnice polohy $Š$ na kruhu šestihodinovém, ano i polohy obecné..

Rozumí se samo sebou, že nemusíme počítati příklady všechny, spíše málo, ale vždy dáme znova rýsovati obrázek, aby si žáci osvojili m e t o d u.

3. Konečně malou metodickou poznámku k řešení rovnice

$$a \cos \xi + b \sin \xi = c.$$

Aby byla obvyklá substituce $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$ atd. názorná a nenastal omyl při volbě kořenu rovnice $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a}$, doporučuje se načrtnouti pomocný pravoúhlý trojúhelník tak, že v souřadných osách naneseme $a$ na $X$ (i co do znaménka), $b$ podobně $\perp X$ a průvodič $r$. Z tohoto obrazce plyne ihned uvedená substituce i správná volba $\varphi$.

Uvádím to jako příklad, že velmi často lze abstraktní operace početní nahraditi názorným postupem, který vlastně vždy za nimi vězí. Podobně oživené transformace uvádím níže při trigonometrii sférické. Další výhoda, pro žáka neméně důležitá, je v tom, že abstraktní transformace se brzy zapomene, kdežto obrazec nikoliv; je vždy k disposici a dovolí jí ihned odvoditi. Nikdy se ostatně nemá opomenouti nalézti s m y s l a v ě c n ý význam rovnic jak v geometrii, tak i v algebře, třeba při řešení slovních rovnic. Někdy se vyskytne rovnice, jejíž význam je bezprostředně z dané úlohy patrný a mohla být tedy tato rovnice napsána ihned. Při takové příležitosti není zbytečno vysvětliti žákům, v čem se jeví lepší nadání k matematice. Nadanější žák vyniká nad méně nadaného tím, že právě postřehne onu souvislost veličin, která je slabšímu teprve výsledkem. Při tom je možno poukázati na význam prakse, která onu slabší vlohu může značně sesíliti. Neboť mnoho výsledků a postupů se opakuje a dovoluje pak pilnému žáku také skočiti hned in medias res. Sebedůvěra vzroste a to je v matematice hlavní.

*II. Z trigonometrie sférické.*

1. Je důležito, aby základní rovnice byly odvozeny co nejsnáze, aby je žák pokud možno viděl na obrazci v paměti. Velmi dobře se mi osvědčilo přiměřené popsání obrazce 79 (G. VI.). Na $OB$ napišme 1, pak tedy na $BC$ sin $a$, $BA$ sin $c$, $OC$ cos $a$, $OA$ cos $c$, $AC$ cos $c$ $tgb$ a také sin $a\,.\,ctg\alpha$ nebo cos $a$ sin $b$. Tyto tři výrazy píšeme na $AC$ pod sebe.

Pro přehlednost lze označení vrcholů vynechati. Funkce úhlu $\alpha$ vyjádříme z $\triangle\,ABC$, funkce $\beta$ zjednáme si záměnou a cos $c$ vyjádříme dvojím způsobem z $\triangle\ OAC$.

S odvozenými větami vystačíme pomocí výšek, jako shora pro rovinný i na ony hlavní případy trojúhelníka kosoúhlého, při kterých jsou dány prvky nestejnorodé. Vyhneme se tak transformaci kosinových vět.

2. Jako při řešení pravoúhlého trojúhelníka můžeme přímo viděti věty o trojúhelníku obecném na obrazci 89. (G. VI.), označíme-li $OB = 1$. Ostatní délky popíšeme ihned jejich hodnotami a obdržíme bezprostředně větu sinovou a kosinovou. Polárním trojúhelníkem se pak odvodí druhá věta kosinová.

Dále je prospěšno psáti ostatní věty tak, aby se pokud možno využilo podobnosti s planimetrií. Tedy na str. 142. (G. VI.) pišme

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{\sin s\,.\,\sin (s-a)}.$$

Z obrazce vepsané kružnice však plyne jako v planimetrii

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin (s-a)},$$

tedy je patrno, že planimetrickému

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \frac{\triangle}{s}$$

odpovídá

$$\operatorname{tg}\varrho = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}} = \frac{T}{\sin s}.$$

Planimetrické $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

má tudíž analogon v

$$T = \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)},$$

které sice neznačí obsah sférického trojúhelníka, ale přece jen poloviční součin sinů základny a výšky.

Polární transformací po zavedení nadbytku plyne

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Avšak obraz trojúhelníka s opsanou kružnicí a symetrálami stran poskytuje

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{cotg} R}{\sin \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

takže, zavedeme-li obdobně

$$D = \sqrt{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

jest

$$\operatorname{cotg} R = \frac{D}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

To jsou analoga k případu 3 stran i co do formy. Dodáme-li k tomu odvození $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4}$ (vzorec l'Huilierův), vystačíme úplně pro středoškolské účely a vzorce se budou dobře na sebe vázati a tedy i pamatovati, protože nabyly významu téměř názorného. A pro výklad na střední škole obzvláště platí požadavek H. Weylův: »Das Vorgehen, das aus lauter Formeln statt Gedanken und Anschauungen besteht, ist offenbar wenig befriedigend; hinter den Formeln steht doch sicher ein einfacher und natürlicher Begriff, den es gelingen muss herauszuschälen.«

---

*Dr. JOS. ŠTĚPÁNEK:*

## Jednoduchá demonstrace vlnění na hladině vodní.

Promývaje jednou po pokusech školních planparalelní kyvety pod vodovodním kohoutkem, pozoroval jsem, když s kohoutku odkapávala po velkých kapkách voda a dopadala do vody, obsažené v kyvetě, jak se na hladině po každém zapadnutí kapky vytvořilo pěkné vlnění, které postupovalo k okrajům kyvety.