Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Klíma
O cornoidě

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 1, 32--32a,33--39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121066

O cornoidě.

Napsal Dr. *Josef Klíma.*

V I. dílu II. vyd. Loriova spisu: „Spec. alg. und transc. ebene Kurven“ je na str. 287 zmínka o spec. křivce 6°, již A. Sanchez[1]) nazval, a to, jak Gino Loria podotýká, nevhodně, rohovkou nebo cornoidou. Křivka ta nebyla dle zmínky téhož autora dosud mnoho vyšetřována i chci v dalším odvoditi její tečnu v libov. bodě a sice jednoduchou prostorovou interpretací, jakož i odvoditi poloměry křivosti ve vrcholech a jiné vlastnosti.

Dle zmíněného spisu je výtvarný zákon křivky té tento: (obr. 1.). Budiž dána kružnice k_1 a v ní dva kolmé průměry $\overline{A_1 B_1}$ a $\overline{C_1 D_1}$. Zvolme k průměru $\overline{A_1 B_1}$ kolmou libov. tětivu $\overline{Q_1 {}^1Q_1}$. Tu tečna t_1 ke kružnici k_1 v bodě Q_1 sestrojená, je protata kolmicí $\overline{{}^1Q_1 M_1}$ k této tečně spuštěnou s bodu ${}^1Q_1$ v bodě M_1 křivky. Souřadnice x a y bodu M_1 k osám $x_1 \equiv \overline{A_1 B_1}$ a $y_1 \equiv \overline{C_1 D_1}$ možno pak určiti co rac. funkce veličiny $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$, kde $\varphi = \sphericalangle C_1 S_{1,2} Q_1$ a sice stupně šestého. Křivka ta je tedy 6° a racionální. Je symetrická k osám $\overline{A_1 B_1}$ a $\overline{C_1 D_1}$ a má na ose $\overline{A_1 B_1}$ dva dvojné body oskulační.

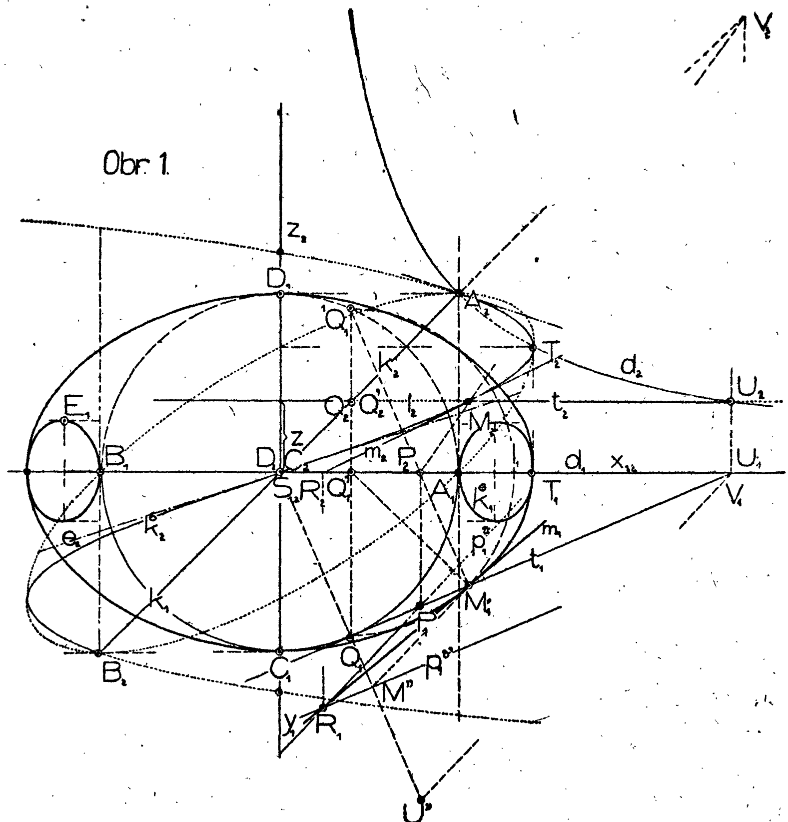
Abychom této konstrukci mohli dáti prostor. význam, uvažme, že bod M_1 křivky možno též dostati v průsečíku tečny t_1 kružnice k_1 s kružnicí l_1, opsanou nad tětivou $\overline{Q_1 {}^1Q_1}$ co průměrem. Zvolme pak si v ose $\overline{A_1 B_1}$ osu souřadnou $x_{1,2}$ a kružnice k_1 nechť je půdorysem elipsy k, jež je v rovině jdoucí osou $y_1 \equiv \overline{C_1 D_1}$ kolmo k nárysně a svírající s půdorysnou úhel 45°. Je tedy elipsa k na rotační ploše válcové V kolmé k půdorysně, jejímž půdorysem je kružnice k_1.

Všechny tečny plochy válcové V, jež jsou horizontální a dotýkají se jí v bodech elipsy k, vytvářejí zborcenou plochu P, jež má v nárysně dvojnou křivku, která je rovnoosou hyperbolou d, mající osy x a z ($z \perp \pi$ v bodě S, jež je středem k_1 a k) za asymptoty a vrchol v bodě A_2, jež je též vrcholem elipsy k. Je-li totiž nárys bodu Q, jehož půdorys Q_1 zvolen libov. na k_1 v bodě Q_2 na k_2 a jeho vzdálenost od půdorysny označena z, pak patrně též vzdálenost $\overline{S_{1,2} Q'_1} = z$ (Q'_1 je průsečík tětivy $\overline{Q_1 {}^1Q_1}$ s osou $x_{1,2}$). Označíme-li průsečík površky t plochy sborcené P s nárysnou U, tu je patrně z pravoúhlého $\triangle S_{1,2} Q_1 U_1$

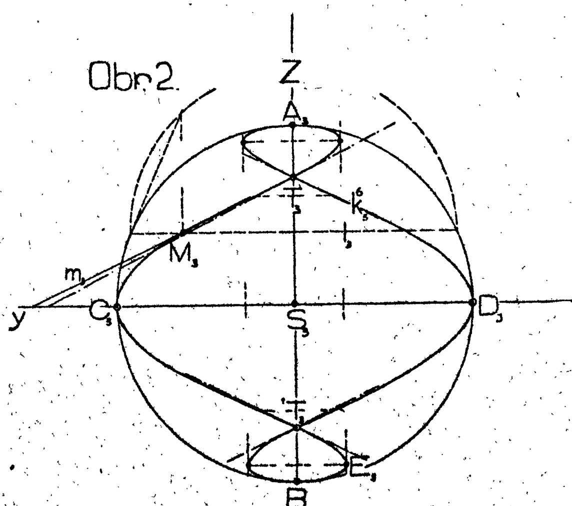
$$\overline{S_{1,2} Q'_1} \cdot \overline{S_{1,2} U_1} = r^2 \text{ a tedy } z \cdot x = r^2$$

[1]) Ve spisku: „La cornoide“ (San Salvador, Central-America, 1895).

Obr. 1



Obr. 2



je rovnicí dvojné hyperboly rovnoosé v nárysně plochy zborcené P. Plocha tato má v půdorysně rovinu řídící a za řídící křivky k a d, jež jsou kuželosečkami o společných bodech A a B. Ježto též hyperbola rovnoosá d protíná úběžnou přímku půdorysny v úběžném bodě osy x, je plocha P zborcenou plochou stupně

$$2 . 2 . 2 - 2 . 1 - 1 . 2 = 4.$$

Rovnice této plochy vzhledem ke zvoleným osám souř. je

$$(1)\left\{\begin{array}{l} P \equiv xz + y\sqrt{r^2 - z^2} - r^2 = 0, \text{ nebo} \\ P \equiv y^2(r^2 - z^2) - x^2z^2 + 2xzr^2 - r^4 = 0. \end{array}\right.$$

Kružnice l_1, opsaná nad $\overline{Q_1\,{}^1Q_1}$ co průměrem, je půdorysem shodné kružnice l v rovině horizontální, jež protíná elipsu k v bodech Q a ${}^1Q$ a která má střed Q' v nárysně. Vzdálenost její roviny od půdorysny je též z. Všechny takové kružnice l, jichž průměry jsou tětivy elipsy k a leží v rovinách horizontálních, vyplňují trojosý elipsoid E, jenž má jednu osu v ose souř. y v $\overline{CD}$ a ostatní dvě osy v nárysně. Jedna soustava kruhových řezů elipsoidu je rovnoběžna s půdorysnou a body A, B jsou kruhovými body elipsoidu. Půdorysným průmětem je elipsa o vedlejší ose v $\overline{C_1D_1}$ a ohniskách A_1, B_1, takže hlavní poloosa

$$\overline{S_{1,2}T_1} = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

Nárysem je elipsa o sdruž. průměrech $\overline{A_2B_2}$ a $\overline{A_1B_1}$. Rovnice elipsoidu je

$$(2)\left\{\begin{array}{ll} & E \equiv (x - z)^2 + y^2 = r^2 - z^2, \\ \text{nebo} & E \equiv x^2 + y^2 + 2z^2 - 2zx - r^2 = 0. \end{array}\right.$$

Obě plochy P a E protínají se v křivce stupně 8, jež v našem případě rozpadá se v elipsu k, jež je oběma společná a v křivku k^6 stupně 6, jejímž půdorysem je cornoida k_1^6, a nárysem, ježto obě plochy jsou souměrny k ní křivka stupně třetího k_2^6.

Rovnice nárysu křivky průsečné dostaneme eliminací y z rovnic (1) a (2), vyloučíme-li činitele $(x - z)$, který je rovnicí nárysu k_2 elipsy společ. k, ve tvaru

$$3) \qquad k_2^6 \equiv 2z^3 - 3zr^2 + xr^2 = 0.$$

Křivka ta je souměrna dle středu $S_{1,2}$ a má v bodě tom bod obratu a tečna v bodě tom má směrnici $\frac{1}{3}$, jak snadno dostaneme z derivací:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{r^2}{3(r^2 - 2z^2)} \text{ a } \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4zr^4}{9(r^2 - 2z^2)^3}.$$

V bodě A_2, jímž též křivka k_2^6 prochází, je směrnice tečny $= -\frac{1}{3}$. Body, v nichž tečny jsou rovnoběžny s osou z, jsou

$$T\left(r\sqrt{2}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \text{ a } {}^1T\left(-r\sqrt{2}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right).$$

Pro $x = \emptyset$, dostaneme z (3) $z_1 = \emptyset$ a

$$z_{2,3} = \pm \frac{r}{2}\sqrt{6}$$

a směrnice tečny v bodě

$$\left(0, \frac{r}{2}\sqrt{6}\right)$$

a tudíž i v bodě souměrném dle $S_{1,2}$ je $-\frac{1}{6}$. Je-li $x = r$, dostáváme

$$z_1 = r \text{ a } z_{2,3} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

a pro $\quad x = r\sqrt{2}$ je $z_{1,2} = +\frac{r}{\sqrt{2}}$ a $z_3 = -r\sqrt{2}$

a směrnice tečny v bodě $(r\sqrt{2}, -r\sqrt{2})$ je $-\frac{1}{9}$. Body tyto a tečny v nich dají se velice snadno sestrojiti. K vyrýsování křivky k_2^6 možno ještě určiti si poloměr křivosti v bodě T_2 resp. ${}^1T_2$. Je totiž

obecně $\quad \varrho = \dfrac{[9(r^2 - 2z^2)^2 + r^4]^{\frac{3}{2}}}{12\, z r^4}$

a tedy v T_2, jehož $z = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$, dostaneme $\varrho = \dfrac{r\sqrt{2}}{12}$, což je $\dfrac{1}{12}$ vzdálenosti bodu T_2 od osy z. k_2^6 je tedy snadno sestrojitelná křivka racionálná 3°. Dvojný bod její je v úběžném bodě osy x, ježto libov. přímka, rovnoběžná s osou x, protíná ji v jediném bodě. Určujeme-li průsečíky křivky té s úběžnou přímkou, dostáváme, že všechny tři průsečíky jsou v úběžném bodě osy x a snadno též počtem stanovíme, že tento úběžný bod je bodem vratu a tečna v něm splývá s úběžnou přímkou roviny. Vzhledem k tomu má křivka též jediný bod obratu reálný, a to v počátku $S_{1,2}$.

Přistupme nyní k půdorysu k_1^6 průsečné křivky k_1^6, kterýžto je dle vytvoření *cornoidou*.

Rovnici její k osám x a y obdržíme eliminací z z rovnice ellipsoidu (2) a rovnice (3) nárysu k_2^6. Dostáváme rovnici cornoidy ve tvaru

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^3 - 5x^4 r^2 - 6x^2 y^2 r^2 + 3y^4 r^2 + 8r^4 x^2 - 4r^6 = \emptyset.$$

Křivka tato má v imag. bodech kruhových body vratu, v nichž tečny splývají s úběžnou přímkou. Tento výsledek vyplývá též z naší prostorové interpretace. Řídící přímka zborcené plochy P, jež je úběžnou přímkou půdorysny, je totiž dvojnou přímkou této plochy a protíná válcovou plochu V v imag. kruh. bodech, jež jsou kuspidálními body zborcené plochy. Těmito body jde též plocha elipsoidu E, a proto jich pronik má v bodech těch body vratu. Torsální přímky plochy P, jež jdou těmito kusp. body, jsou úběžnými přímkami minimálních rovin, jdoucích osou z plochy válcové V. Tečny v oněch bodech vratu jsou tudíž v úběžné rovině a promítají se tedy do půdorysny v úběžnou přímku.

Na ose x jsou další dva reálné oskulační body dvojné a sice ve vzdálenosti $\pm r\sqrt{2}$ od středu. Tyto vznikly splynutím tří dvojných bodů. Stejně na ose $y \equiv \overline{C_1 D_1}$ jsou dva imag. dvojné body a sice ve vzdálenosti $\pm r i \sqrt{2}$ od středu, čímž dostáváme celkem 10 dvojných bodů rac. sextiky k_1^6.

Ježto cornoida jeví se nám co půdorys průsečné křivky elipsoidu E a zborc. plochy P, sestrojíme tečnu m_1 v libovolném bodě jejím M_1, co půdorys průsečnice rovin tečných, sestrojených k oběma plochám v příslušném bodě M. Určeme nejdříve půdorysnou stopu p^τ roviny tečné τ v bodě M k elipsoidu E. Podél kružnice l jdoucí bodem M, dotýká se elipsoidu kužel. plocha o vrcholu V na průměru $\overline{AB}$ elipsoidu ($V_1 \equiv t_1 x_{1,2}$). Půdorysná stopa $p^\tau{}_1$ roviny tečné prochází půdorys. stopníkem P povrchové přímky $\overline{VM}$ kužele a je kolma k poloměru $\overline{Q'_1 M_1}$ kružnice l. Přímku $p^\tau{}_1$ možno též obdržeti bez nárysu, uvážíme-li, že

$$\overline{S_2 P_2} : \overline{P_2 V_1} = \overline{Q_2 M_2} : \overline{M_2 U_2} = \overline{Q_1 M_1} : \overline{M_1 V_1}$$

a proto $\overline{P_2 M_1} \parallel \overline{S_1 Q_1}$. Abychom tedy určili stopník P_1, třeba jen v M_1 vztýčiti kolmici $\overline{M_1 P_2} \perp t_1$ a v průsečíku P_2 této s osou x vztýčiti kolmici k ose x až protne tečnu t_1 v bodě P_1, jímž prochází $p^\tau{}_1 \perp \overline{Q'_1 M_1}$.

Dále určeme půdorysnou stopu $p^{\tau'}{}_1$ roviny tečné τ' ke zborc. ploše P v bodě M površky t. V bodech Q, U a v úběžném bodě površky t dotýkají se plochy roviny, jichž půdorysné stopy jsou t_1, přímka, jež je rovnoběžná s t_1 ve vzdálenosti $2r$ od středu $S_{1,2}$ (ježto tečna k rovnoosé hyperbole d v bodě U protíná osu x v bodě vzdáleném od U_1 o tutéž délku jako je U_1 od $S_{1,2}$), a úběžná přímka půdorysny. Ježto řada bodů na površce t je projektivná se svazkem rovin tečných, sestrojených ku ploše zborc. v těchto bodech, je též osnova rovnoběžných půdorysných stop rovin tečných projektivná s řadou půdorysů bodů dotyčných. Protneme-li tedy půdorysné stopy tečných rovin přímkou $\overline{S_{1,2} Q_1}$, dostaneme řadu

$$Q'' \equiv Q_1,\ U''\ (\overline{Q_1 U''} = \overline{S_{1,2} Q_1}),\ M'', \ldots,$$

jež je podobná s řadou $Q_1, U_1, M_1, \ldots$, ježto jich úběžné body si odpovídají, a proto $\overline{M_1 M''} \parallel \overline{U_1 U''}$. Bodem M'' jde $p^{\tau'}{}_1$ rovnoběžně s t_1. Průsečík R_1 obou stop p_1^{v} a $p_1^{v'}$ je bodem hledané tečny m_1 v bodě M_1 sestrojené ke cornoidě k_1^6. Spojnice nárysu P_2 bodu R s M_2 je tečnou k nárysu k_2^6.

Toho, že nárysem průsečné křivky je rac. kubika snadno sestrojitelná, ovšem že z ní pro reálné body cornoidy platí jen část od bodu A_2 přes M_2, $S_{1,2}$ k bodu B_2, možno užíti k snadnému odvození poloměrů křivosti ve vrcholech C_1 a A_1. Inflexní tečna v bodě C_2 křivky k_2^6 má směrnici $\frac{1}{3}$ a tedy rovnici $z=\frac{1}{3}x$. Tečna ta je nárysem roviny, jež protíná elipsoid E, na němž křivka ta je, v elipse e, jež křivku k^6 v bodě C oskuluje a tedy její půdorys e_1 oskuluje cornoidu v bodě C_1. Vedlejší poloosa půdorysu e_1 je poloměr $\overline{S_{12}C_1}=r$ a hlavní poloosa je souř. x-ová průsečíku nárysu e_2 s nárysným obrysem elipsoidu E.

Z rovnice nárysného obrysu elipsoidu:

$$x^2+2z^2-2zx-r^2=0,$$

a tečny inflex. $$z=\frac{1}{3}x,$$

dostaneme $$x^2=\frac{9}{5}r^2,$$

a tudíž poloměr křivosti elipsy e_1 v bodě C_1 a současně poloměr křivosti cornoidy ve vrcholu C_1 a D_1 je

$$\varrho_1=\frac{x^2}{r}=\frac{9}{5}r.$$

Podobně možno odvoditi poloměr křivosti ve vrcholu A_1 cornoidy. Tečna v bodě A_2 ke křivce k_2^6 má směrnici $-\frac{1}{3}$ a tedy

rovnici: $$z-r=-\frac{1}{3}(x-r)$$

a rovina, jdoucí jí kolmo k nárysně protíná elipsoid E v elipse, jež dotýká se křivky k^6 ve čtyřech nekonečně blízkých bodech a proto její půdorys oskuluje cornoidu ve vrcholu A_1. Provedeme-li počet jako dříve, dostaneme poloosu půdorysu elipsy, jdoucí vrcholem $A_1=\frac{3}{17}r$

a dvojmoc druhé poloosy $\frac{r^2}{17}$, proto poloměr křivosti ve vrcholu A_1 a tedy též B_1 je $\varrho_2=\frac{r}{3}$.

Bod T_1, jenž je půdorysem průsečného bodu T nárysného obrysu elipsoidu s dvojnou rovnoosou hyperbolou plochy zborcené P, je oskulačním dvojným bodem cornoidy. Druhý je symetrický dle S.

Zajímavou sextikou je též stranorys k_3^6 průsečné křivky k^6 (obr. 2). Eliminací x z rovnice (2) elipsoidu E a z rovnice (3) nárysu k_2^6 dostaneme rovnici stranorysu, ve tvaru

$$(5)\left\{\begin{aligned} &k_3^6 \equiv 4z^6 - 8r^2z^4 + 5r^4z^2 + r^4y^2 - r^6 = \emptyset, \text{ nebo} \\ &k_3^6 \equiv y = \pm \frac{2}{r^2}\left(z^2 - \frac{r^2}{2}\right)\sqrt{r^2 - z^2}. \end{aligned}\right.$$

Křivka tato je souměrná dle osy y a z a je obsažena svými reálnými body uvnitř kružnice o poloměru r, která je stranorysným obrysem elipsoidu E. Vrcholy této křivky jsou v bodech A_3, B_3 a C_3, D_3. V bodech $T_3\left(0, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ a ${}^1T_3\left(0, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ má dvojné body, v nichž tečny vytínají na ose y úseky $\pm r\sqrt{2}$. Tyto dostaneme totiž co průsečnice roviny tečné k elipsoidu E v bodě T (obr. 1), jež je rovnoběžná se stranorysnou s rovinami tečnými, sestrojenými v bodě T k zborc. ploše P, jež jsou dvě a procházejí příslušnými povrchovými přímkami, které svírají s nárysnou 45° a tečnou, sestrojenou k dvojné hyperbole d v bodě T a jež vytíná na ose x úsek $2r\sqrt{2}$.

Pro cornoidu zajímají nás body na k_3^6, v nichž tečny jsou rovnoběžny s osou z, a jichž půdorysy jsou body na cornoidě, v nichž tečny jsou rovnoběžny s osou x. V obr. 1. a 2. vyznačen ze čtyř těchto bodů, bod E. Z rovnice (5) jde

$$\frac{dy}{dz} = \pm \frac{z(5r^2 - 6z^2)}{r^2\sqrt{r^2 - z^2}} \text{ a } \frac{d^2y}{dz^2} = \pm \frac{5r^4 - 18z^2r^2 + 12z^4}{r^2(r^2 - z^2)^{3/2}}.$$

Pro bod E musí tedy

$$6z^2 = 5r^2 \text{ a tedy } z = \pm r\sqrt{\frac{5}{6}} \text{ a } y = \pm \frac{r}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

a z rovnice nárysu k_2^6 dostaneme

$$x = \pm \frac{4}{3} r \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Křivka k_3^6 má čtyři reálné body inflexe, pro něž

$$z = \pm \frac{r}{2}\sqrt{\frac{9 - \sqrt{21}}{3}}.$$

Ve vrcholech křivky té možno též určiti z naší prostorové interpretace poloměry křivosti. Tak ve vrcholech C_3 a D_3 oskuluje křivku k_3^6 elipsa e_3, stranorys elipsy e, které jsme užili při určení poloměru křivosti ve vrcholech C_1 a D_1 cornoidy. Její poloosa hlavní je $\overline{C_3S_3}=r$ a dvojmoc vedlejší $=\frac{1}{5}r^2$, takže poloměr křivosti v C_3 a D_3 je

$$\varrho_1=\frac{1}{5}r.$$

Stejně ve vrcholech A_3 a B_3 dostaneme poloměr křivosti, ježto elipsa, jež oskuluje křivku k^6 v bodě A, a které jsme užili dříve při cornoidě, má za stranorys elipsu, jejíž poloosa, jdoucí vrcholem A_3 jest $\frac{r}{17}$ a čtverec druhé je $\frac{r^2}{17}$, takže $\varrho_2=r$ a kružnice oskulační ve vrcholech A_3 a B_3 splývají tedy s kruhovým stranorysným průmětem elipsoidu E.

Konstrukce jednotlivých bodů M_3 této křivky k_3^6 vyplývá z konstrukce cornoidy; ta vyznačena v obr. 2. při bodu M_2 a z naší prostor. interpretace možno též obdržeti tečnu m_3 v bodě M_3.

*

Sur la cornoïde.

(Extrait de l'article précédent.)

La courbe G^0, surnommée cornoïde par A. Sanchez et mentionnée dans le premier tome de l'oeuvre de G. Loria, „Spezielle alg. und transz. ebene Kurven" (p. 287 de la 2e édition), est considérée ici comme la projection horizontale de la courbe d'intersection k^6 du 6e ordre d'un elipsoïde général E et d'une surface gauche du 4e ordre, ces deux surfaces ayant une ellipse k commune, située sur un cylindre de révolution V au rayon r, perpendiculaire au plan horizontal, dans un plan contenant l'axe des y et faisánt, avec le plan horizontal, un angle de 45°. Pour l' elipsoïde E l'ellipse k est une section diamétrale et ses sections circulaires sont horizontales; par suite, il a l'équation $E\equiv x^2+y^2+2z^2-2xz-r^2=0$. La droite à l'infini du plan de projection horizontal est la directrice de la surface gauche P; cette surface touche le cylindre V le long de l'ellipse k; son équation est $P\equiv xz+y\sqrt{r^2-z^2}-r^2=0$. Cette surface coupe le plan vertical de projection en une hyperbole équilatère double; cette hyperbole a les mêmes sommets que l'ellipse k et les axes x, y sont ses asymptotes. La projection verticale de la courbe k^6 est une cubique rationnelle, qui possède une inflexion à l'origine et un point cuspidal à l'infini sur l'axe des x. Son équation est

$$k^6_2\equiv 2z^3-3zr^2+xr^2=0.$$

La projection horizontale est une cornoïde à l'équation

$$k_1^6\equiv(x^2+y^2)^3-5x^4r^2-6x^2y^2r^2+3y^4r^2+8r^4x^2-4r^6=0.$$

C'est une sextique rationnelle; elle possède deux points de rebroussement aux points circulaires, deux points doubles à osculation aux points $(\pm r\sqrt{2}, 0)$ et deux points doubles imaginaires aux points $(0, \pm ri\sqrt{2})$. L'auteur détermine la tangente en un point arbitraire de la courbe et trouve, pour les rayons de courbures aux sommets, les valeurs $\frac{9}{5}r$ et $\frac{1}{3}r$.

Le profil de la courbe k^6 est une sextique rationnelle $k_3{}^6$ à l'équation

$$k_3{}^6 \equiv y = \pm \frac{2}{r^2}\left(z^2 - \frac{r^2}{2}\right)\sqrt{r^2 - z^2};$$

cette courbe possède les points doubles $T_3\left(0, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$, ${}^1T_3\left(0, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$; l'auteur construit les tangentes en ces points et trouve, pour les rayons de courbure aux sommets, les valeurs $\frac{r}{5}$, r. Il détermine, à l'aide de cette courbe de profil, les points de la cornoïde, autres que les sommets, où la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x; ces points sont $\left(\pm \frac{4}{3}r\sqrt{\frac{5}{6}}, \pm \frac{r}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.