neb tu jest

$$u_1 = 1 + (x-1)\,x^n,\ u_n = 2x^n - 1 + (x-1)\,x^n,\ d = 2$$

tedy

$$u_n + u_1 = 2x^{n+1}$$
$$u_n - u_1 + d = 2x^n,$$

z čehož opět přímo plyne vzorec (2).

Podlé toho jest na př. pro

$$\begin{array}{ll} n = 1 & 1^3 = 1 \\ & 2^3 = 3 + 5, \\ & 3^3 = 7 + 9 + 11, \\ & \ldots\ldots \\ n = 2 & 1^5 = 1 \\ & 2^5 = 5 + 7 + 9 + 11, \\ & 3^5 = 19 + 21 + 23 + \ldots + 35, \\ & \ldots\ldots \\ n = 3 & 1^7 = 1, \\ & 2^7 = 9 + 11 + 13 + \ldots + 23, \\ & 3^7 = 55 + 57 + 59 + \ldots + 107, \\ & \ldots\ldots \end{array}$$

Jak patrno, rozeznává se složení lichých a sudých mocnin tím, že u těchto nepočínají řady vesměs číslem 1 jak u oněch.

Příspěvek k vlastnostem ploch mimosměrek.

Napsal **F. Machovec.**

O každé ploše mimosměrek platí věta:

„*Myslíme-li si body dotyčnými rovin tečných, které se plochy mimosměrek* (A) *dotýkají v bodech libovolné přímky* (P), *přímky největšího spádu těch rovin naproti libovolné rovině* (M), *tvoří tyto přímky plochu mimosměrek* (B), *která jest všeobecně stupně* 3. *a která má za řídící útvar plochu kuželovou stupně* 2. (C), *jejíž stopou na rovině* M *jest kružnice. Je-li však rovina* M *kolma na té rovině centralné plochy* A, *která přísluší přímce* P, *jest onou plochou největšího spádu hyperboloid mimosměrek.*“

Abychom větu tuto dokázali, mysleme si libovolným bodem s 1) přímku $Q \parallel P$ a 2) roviny $R'\ldots \parallel$ s rovinami tečnými R plochy A v bodech přímky P. Přímky C, které procházejí bodem s a jsou stejnosměrny s přímkami povrchovými plochy B, jsou přímkami největšího spádu rovin R'... naproti rovině M a náležejí jako přímky povrchové ploše kuželové C, která jest řídící plochou plochy B. Jest patrno, že přímky C jsou kolmicemi spuštěnými z bodu s na stopy rovin R'... v rovině M. Poněvadž však tyto stopy tvoři svazek rovinný, jehož středem jest průsečník přímky Q s rovinou M, jsou paty všech těch kolmic, čili přímek C na kružnici (která oním průsečníkem prochází). Tato kružnice jest však stopou plochy kuželové C na rovině M a má tudíž řídící plocha kuželová plochy B skutečně vlastnosť v nadepsané větě vytčenou.

Budiž k vůli dalšímu poznamenáno, že přímka Q náleží oné ploše kuželové a že jest přímkou největšího spádu její roviny tečné podél této přímky.

O ploše B lze na základě právě dokázaného tvrditi, že jest plochou mimosměrek, jejímiž útvary řídícími jsou: přímka P, s ní soumezná přímka ${}^1P$ plochy A a plocha kuželová C.

Poněvadž jedna z přímek plochy C t. j. přímka $Q \| P$, jest plocha těmito útvary určena stupně třetího.*)

Je-li však rovina M kolma na rovinu centralnou, jest přímka P přímkou největšího spádu roviny asymptotické plochy A, kteráž rovina přísluší ku přímce P. Rovina tečná plochy C podél přímky Q jest následkem toho stejnosměrna s onou rovinou asymptotickou. Z toho ale dále vychází na jevo, že i přímka ${}^1Q \| {}^1P$ může býti pokládána za přímku povrchovou plochy C.

Jest tedy v tomto zvláštním případě na ploše C nejen přímka Q stejnosměrná s přímkou P, ale i přímka ${}^1Q$ stejnosměrná s přímkou ${}^1P$. Následkem toho jest plocha B plochou stupně druhého a sice všeobecně hyperboloidem mimosměrek.**) Tím jest nadepsaná věta úplně dokázána.

---

*) Jest totiž známo, že jsou-li křivky řídící plochy mimosměrek stupně m_1, m_2 a m_3 a má-li první a druhá křivka s_3 společných bodů,
druhá a třetí „ s_1 „ „
a třetí a první „ s_2 „ „, že jest
stupeň plochy jimi určené udán výrazem $2m_1m_2m_3 - (m_1s_1 + m_2s_2 + m_3s_3)$.
V našem případě jest $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = 2$, $s_2 = 1$, $s_1 = s_3 = 0$.

**) V tomto případě jest totiž

$$m_1 = m_2 = 1,\ m_3 = 1,\ s_1 = s_2 = 1,\ s_3 = 0,$$

tudíž

$$2m_1m_2m_3 - (m_1s_1 + m_2s_2 + m_3s_3) = 2.$$

Že stopou oněch hyperboloidů největšího spádu na rovině M jest kružnice, vychází na jevo z toho, že hyperboloid mimosměrek a jeho řídící plocha kuželová protaty jsou každou rovinou ve křivkách podobných.

Z věty této vyplývá známá vlastnosť kosoúhlé plochy šroubové, že totiž plocha největšího spádu podél libovolné její povrchové přímky na proti rovině M, kolmé na ose té plochy, jest hyperboloidem mimosměrek, jehož stopou na rovině M jest kružnice. Procházejí tudíž všecky roviny centralné kosoúhlé plochy šroubové osou její a rovina M, kolmá na její ose, jest následkem toho kolma na všech těch rovinách centrálných.

Dokázána-li jest tato vlastnosť kosoúhlé plochy šroubové, může z ní býti odvozena věta všeobecná v tomto článku dokázaná, poněvadž podél každé přímky povrchové plochy mimosměrek dotýká se jí nekonečně mnoho kosoúhlých ploch šroubových, které mají osy v rovině centrálné plochy mimosměrek příslušné k oné přímce povrchové.

Geometrická úloha.

Napsal prof. **Karel Pánek.**

Má se sestrojiti čtyrúhelník, dány-li jsou jedna strana a přilehlé k ní úhly a, α, β, mimo to další podmínka, že zbývající tři neznámé strany jsou si rovny.

Rozbor. Budiž čtyrúhelník $ABCD$ žádaný:

$$AB = a,\ \sphericalangle A = \alpha,\ \sphericalangle B = \beta,\ BC = CD = DA.$$

Veďme $CX \parallel DA$, $AE \parallel DC$, čímž obdržíme kosočtverec $AECD$; spojme dále bod B s bodem E, tu jest $\triangle EBC$ takto povstalý rovnoramenný, neboť $BC = CD = DA = CE$. Úloha by se dala snadno sestrojiti, kdybychom znali bod E. K tomu konci veďme z libovolného bodu F: $FG \parallel CE$ a $GK \parallel EA$ i bude platiti úměra

$$BC : CE : EA = BF : FG : GK.$$

Ježto však $BC = CE = EA$, musí $BF = FG = GK$, t. j. $\triangle GBF$ jest též rovnoramenný a přímka GK rovná se jeho rameni. Tím jest směr přímky GK určen a poněvadž $AE \parallel KG$, ustanoven i žádaný bod E.