Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Určování rozměrů kuželoseček na rotační ploše kuželové

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 1, 47--56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121005

$$(8) \qquad J = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}} .$$

Výraz ve jmenovateli jest vždy větší než 1, z čehož následuje, že síla proudu buzeného střídavou el. m. silou v proudovodu samoindukci podlehajícím jest menší než síla proudu buzeného stálou el. m. silou stejné velikosti, prostého samoindukce. (Dokončení.)

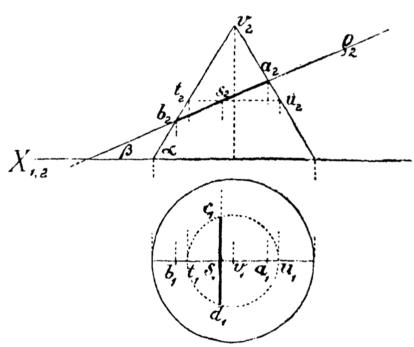
Určování rozměrů kuželoseček na rotační ploše kuželové.

Podává

Václav J. Hübner,

professor na Král. Vinohradech.

Rovina neprocházející středem protíná, jak známo, rotační plochu kuželovou v kružnici, ellipse, parabole neb hyperbole. Osa kužele, jehož strany tvoří se základnou úhel α, buď kolmá ku průmětně první; rovina ϱ, která neprochází vrcholem a odchýlena jest od základny o úhel β, budiž ke druhé průmětně kolmá.



Obr. 1.

Srovnáme-li velikosti úhlů α a β, mohou nastati, jak zjevno, případy tři a to buď:

1.) $\alpha > \beta$, 2.) $\alpha = \beta$, 3.) $\alpha < \beta$.

1. Je-li $\alpha > \beta$, protíná rovina ϱ všechny přímky povrchové plochy kuželové a průsek jest tedy křivka uzavřená a to buď ellipsa, anebo ve zvláštním případě kružnice. Označíme-li (obr. 1.) $v_2 a_2 = m$, (vzdálenost vrcholu v k bodu a, kterým jest rovina ϱ vedena), $\overline{s_2 a_2} = \overline{s_2 b_2} = a$, $\overline{s_1 c_1} = \overline{s_1 d_1} = b$ (poloosy ellipsy), jest dle věty sinové z $\triangle v_2 a_2 b_2$, v němž známe m,

$$\sphericalangle v_2 b_2 a_2 = \alpha - \beta, \qquad \sphericalangle a_2 v_2 b_2 = 180^0 - 2\alpha,$$

$$m : 2a = \sin(\alpha - \beta) : \sin 2\alpha$$

a odtud

$$(1) \qquad a = \frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin(\alpha - \beta)}.$$

Poloosu $b = \overline{s_1 c_1}$ určíme z prvého průmětu. I jest

$$(2) \qquad \overline{s_1 c_1}^2 = \overline{s_1 t_1} \,.\, \overline{s_1 u_1}.$$

V $\triangle s_2 b_2 t_2$, v němž $\sphericalangle s_2 t_2 b_2 = 180^0 - \alpha$ jest dle věty sinové

$$\overline{s_2 t_2} : \overline{s_2 b_2} = \sin(\alpha - \beta) : \sin \alpha,$$

ze které vypočítáme

$$\overline{s_2 t_2} = \overline{s_1 t_1} = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}.$$

Podobně z $\triangle s_2 a_2 u_2$, v němž $\sphericalangle s_2 a_2 u_2 = 180^0 - (\alpha + \beta)$ plyne

$$\overline{s_2 u_2} : \overline{s_2 a_2} = \sin(\alpha + \beta) : \sin \alpha,$$

tudíž

$$\overline{s_2 u_2} = \overline{s_1 u_1} = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

Dosadíme-li patřičné hodnoty do rovnice (2), vypočítáme

$$b = \sqrt{\overline{s_1 c_1}^2} = m \cos \alpha \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}}.$$

Jak zjevno, značí m vzdálenost vrcholu kužele od vrcholu ellipsy. Délková výstřednost

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{m \cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \sin \beta.$$

Má-li býti $a = b$, musí

$$\frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin(\alpha - \beta)} = m \cos \alpha \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}}$$

čili

$$\sin^2 \alpha = \sin(\alpha - \beta) . \sin(\alpha + \beta)$$

a odtud $\beta = 0$, t. j. rovina ϱ jest rovnoběžná se základnou a protíná plochu kuželovou v kružnici.

Je-li $\alpha = 60^0$ (kužel rovnostranný) a odchylka $\beta = 30^0$, zjednoduší se předcházející vzorce v tyto:

$$a = \frac{m \sin 120^0}{2 \sin 30^0} = \frac{m}{2} \sqrt{3},$$

což značí výšku $\triangle$ rovnostranného o straně m,

$$b = m \cos 60^0 \sqrt{\frac{\sin 90^0}{\sin 30^0}} = \frac{m}{2} \sqrt{2}$$

značí poloviční úhlopříčnu čtverce o straně m a konečně

$$e = \frac{1}{2} m.$$

2. Je-li $\alpha = \beta$ (rovina ϱ jest rovnoběžná se stranou kužele), jest

$$a = \frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin 0} = \infty;$$

podobně b i e; průsek roviny s plochou jest křivka, která má střed ve vzdálenosti nekonečné — parabola.

Výpočet parametru.

Označíme-li (obr. 2.) $\overline{an} = x$, $\overline{nb_1} = y$ (a vrchol paraboly, x úsečka, y pořadnice), tu jest, jak známo,

$$\frac{y^2}{x} = 2p. \tag{3}$$

Dle známé věty planimetrické jest

$$\overline{b_1 n}^2 = \overline{nc_1} \,.\, \overline{nd_1}. \tag{4}$$

Z rovnoramenného $\triangle\, a_2 b_2 c_2$ vysvítá, že

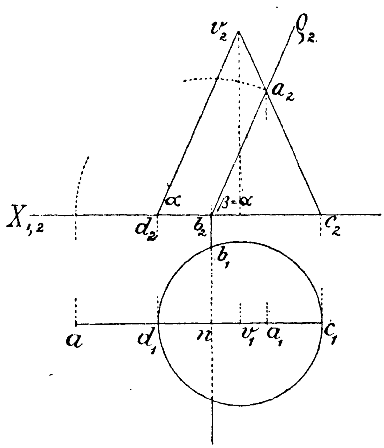
$$\frac{\overline{b_2 c_2}}{2} = \overline{a_2 b_2} \cos \alpha$$

čili

$$\overline{nc_1} = \overline{b_2 c_2} = 2x \cos \alpha,$$

poněvadž

$$\overline{a_2 b_2} = \overline{an} = x.$$



Obr. 2.

Dále jest

$$\overline{nd_1} = \overline{b_2 d_2} \quad \text{a} \quad \overline{b_2 d_2} : \overline{c_2 d_2} = \overline{a_2 v_2} : \overline{c_2 v_2}.$$

Ježto $\overline{v_2 a_2} = m$ a $\overline{v_2 c_2} = \dfrac{\frac{1}{2}\,\overline{c_2 d_2}}{\cos \alpha}$, jest

$$\overline{nd_1} = \overline{b_2 d_2} = \frac{\overline{c_2 d_2} \,.\, \overline{a_2 v_2}}{\overline{c_2 v_2}} = 2m \cos \alpha.$$

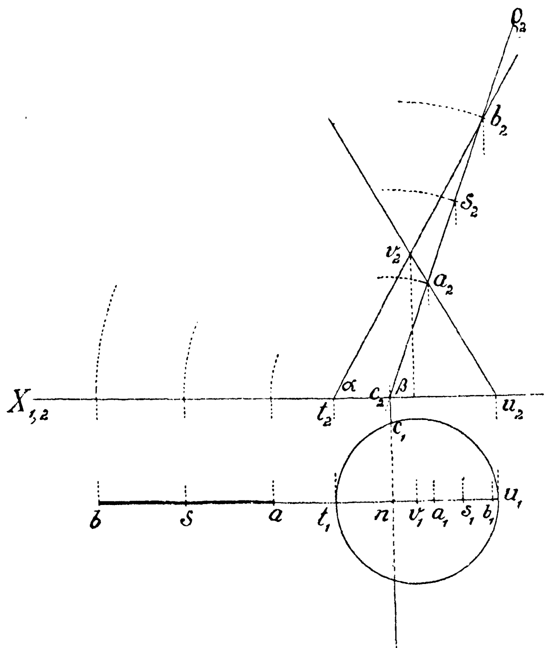
Dosadíce patřičné hodnoty do rovnice (4) a (3), dostaneme

$$p = 2m \cos^2 \alpha.$$

Při kuželi rovnostranném jest $p = \frac{m}{2}$.

Je-li poloměr základny kužele rovnostranného r a rovina ϱ prochází středem základny, jest $p = \frac{r}{2}$.

3. Je-li $\alpha < \beta$, protíná rovina vrcholem v rovnoběžně s rovinou ϱ vedená plochu kuželovou ve dvou přímkách povrchových; průsek roviny ϱ s plochou kuželovou jest, jak známo, hyperbola.



Obr. 3.

Budiž (obr. 3.) $\overline{s_2a_2} = \overline{s_2b_2} = \overline{sa} = a$ (poloosa hlavní), $\overline{v_2a_2} = m$. Dle věty sinové nabudeme z $\triangle\, v_2a_2b_2$, v němž

$$\sphericalangle\, t_2b_2c_2 = \beta - \alpha,$$

$$\overline{a_2b_2} : \overline{v_2a_2} = \sin 2\alpha : \sin(\beta - \alpha),$$

odtud

$$\overline{a_2b_2} = 2a = \frac{m \sin 2\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

a

$$(5) \qquad a = \frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin(\beta - \alpha)}.$$

Klademe-li $\overline{sn} = x$, $\overline{nc_1} = y$, obdržíme z osové rovnice hyperboly poloosu vedlejší

$$(6) \qquad b^2 = \frac{a^2y^2}{x^2 - a^2}.$$

Z obrazce jest $x = \overline{sa} + \overline{an}$, tudíž

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a) = \overline{an}\,(2a + \overline{an})$$

a

$$\overline{nc_1^2} = y^2 = \overline{nt_1}\,.\,\overline{nu_1}\,.$$

Mimo to jest dle věty sinové v $\triangle\, c_2t_2b_2$

$$\overline{c_2t_2} : \overline{b_2c_2} = \sin(\beta - \alpha) : \sin\alpha,$$

z čehož

$$\overline{c_2t_2} = \overline{nt_1} = \frac{(\overline{a_2c_2} + 2a)\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha};$$

v $\triangle\, c_2u_2a_2$

$$\overline{c_2u_2} : \overline{a_2c_2} = \sin[180 - (\alpha + \beta)] : \sin\alpha\,,$$

proto

$$\overline{c_2u_2} = \overline{nu_1} = \frac{\overline{a_2c_2}\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice pro y^2, nalezneme

$$y^2 = \frac{(\overline{a_2c_2} + 2a)\,.\,\overline{a_2c_2}\,.\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}{\sin^2\alpha}$$

a

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}{\sin^2\alpha},$$

klademe-li $\overline{a_2c_2} = \overline{an}$.

Z rovnice (6) užitím rovnice (5) nabudeme pak

$$b^2 = \frac{m^2 \cos^2 \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} \sin (\alpha + \beta) \quad \text{a} \quad b = m \cos \alpha \sqrt{\frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\beta - \alpha)}}.$$

Délková výstřednost

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{m \cos \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} \sin \beta.$$

Jak patrno, jsou to obdobné vzorce, které byly odvozeny při ellipse.

Klademe-li $\alpha = 60^0$ (kužel rovnostranný), $\beta = 90^0$, obdržíme

$$a = \frac{m}{2} \sqrt{3}, \quad b = \frac{m}{2}, \quad e = m.$$

Má-li býti $a = b$ (hyperbola rovnoosá), pak

$$\frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin (\beta - \alpha)} = m \cos \alpha \sqrt{\frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\beta - \alpha)}}$$

nebo

$$\sin^2 \alpha = \sin (\alpha + \beta) \sin (\beta - \alpha)$$

a po náležitém upravení pravé strany

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha,$$

tudíž

$$\sin \beta = \sqrt{2} \sin \alpha.$$

Je-li $\beta = 90^0$, jest $\alpha = 45^0$*) a při $\beta = 45^0$, jest $\alpha = 30^0$. Jest-li tedy $\beta < 90^0$, jest $\alpha < 45^0$.

Klademe-li na př. $\alpha = 75^0$, obdržíme

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2},$$

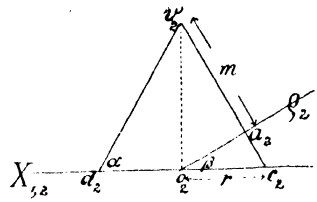
tedy $\sin \beta > 1$, což jest nemožné.

* * *

Prochází-li rovina ϱ středem základny, jejíž poloměr jest r, ustanovíme úsek m takto:

---

*) Úloha 43. z ročníku XXVI.



Obr. 4.

V $\triangle\, o_2 a_2 c_2$ (obr. 4.) jest

$$r : \overline{a_2 c_2} = \sin(\alpha + \beta) : \sin\beta$$

a v pravoúhlém $\triangle\, o_2 v_2 c_2$

$$\overline{v_2 c_2} = \frac{r}{\cos\alpha},$$

proto jest

$$\overline{a_2 c_2} = \overline{v_2 c_2} - m = \frac{r}{\cos\alpha} - m$$

a
$$r : \frac{r - m\cos\alpha}{\cos\alpha} = \sin(\alpha + \beta) : \sin\beta,$$

tudíž

$$r\cos\alpha\sin\beta = r\sin(\alpha + \beta) - m\cos\alpha\sin(\alpha + \beta);$$

odtud

$$m = r\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

a při $\beta = \alpha$

$$m = \frac{r}{2\cos\alpha}.$$

Dosadíme-li hodnotu za m do vzorce a a b, obdržíme při ellipse

$$a = r\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{r\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)},$$

$$b = r\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\frac{\cos\beta\,.\cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}\sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}} = \frac{r\sin\alpha\cos\beta}{\sqrt{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}}.$$

Při kuželi rovnostranném a odchylce $\beta = 30^0$ nabudeme

$$m = \frac{3r}{2}, \quad a = \frac{3r}{4}\sqrt{3}, \quad b = \frac{3r}{4}\sqrt{2}.$$

Klademe-li $\beta = \alpha$, jest $m = \frac{r}{2 \cos \alpha}$ a $p = r \cos \alpha$; při kuželi rovnostranném $p = \frac{r}{2}$. (Srovnej s parabolou.)

Podobně najdeme vzorce i při hyperbole.

Dodatek: Jest-li $\alpha = 90^0$, přejde plocha kuželová v plochu válcovou. Jde-li rovina ϱ středem základny, nabudeme z předešlých vzorců

$$m = \infty\,, \quad a = \frac{r}{\cos \beta}\,, \quad b = r.$$

Při odchylce $\beta = 60^0$, jest $a = 2r$, $b = r$; při $\beta = 45^0$, $a = r\sqrt{2}$ (úhlopříčna čtverce o straně r), $b = r$.

Při $b = a$ jest $\cos \beta = 1$ čili $\beta = 0$; rovina ϱ jest rovnoběžná se základnou.

Při odchylce $\beta = 90^0$, jest $a = \infty$, $b = r$ ellipsa přechází ve dvě přímky rovnoběžné (povrchové), jichž vzdálenost $= 2r$.

Jak patrno, lze těchto vzorců užíti i při opačném řešení úloh, jako na př. stanovení odchylky β roviny ϱ, úhlu α, při určitých podmínkách.

1. Je-li stanoviti na př. úhel β, ve kterém jest rovinu ku základně kužele vésti, aby vznikla ellipsa, při níž by $a = 2b$, obdržíme rovnici

$$\frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin (\alpha - \beta)} = 2m \cos \alpha \sqrt{\frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}}$$

čili

$$\frac{\sin^2 2\alpha}{4 \sin^2 (\alpha - \beta)} = 4 \cos^2 \alpha \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}$$

nebo

$$\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 (\alpha - \beta)} = 4 \cos^2 \alpha \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}\,,$$

tudíž

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta),$$

z čehož

$$\cos^2 \alpha \left[\sin^2 \alpha - 4 (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha)\right] = 0,$$

načež

$$\sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 4 \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = 0$$

a odtud

$$\cos^2 \beta = \frac{\sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{4}.$$

Je-li $\alpha = 60^0$, jest

$$\cos^2 \beta = \frac{\frac{3}{4} + 1}{4} = \frac{7}{16}$$

a

$$\cos \beta = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}.\text{*)}$$

Při $\alpha = 90^0$, jest

$$\cos \beta = \pm \frac{1}{2}$$

a $\beta = 60^0$ nebo 120^0, jak bylo již vytčeno při ploše válcové.

2. Je-li dán úhel α a vzdálenost $m = r$ vrcholu kužele od vrcholu kuželosečky, která jest obsažena v rovině ϱ procházející středem základny, plyne z rovnice pro m

$$r = r \operatorname{tang} \alpha \frac{\cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

a odtud

$$\sin (\alpha + \beta) \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta$$

čili

$$\sin \alpha \cos \alpha + \operatorname{tang} \beta \cos^2 \alpha = \sin \alpha,$$

z čehož

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\sin \alpha \, (1 - \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha}.$$

Při $\alpha = 60^0$, jest

$$\operatorname{tang} \beta = \sqrt{3}$$
$$\text{a } \beta = 60^0, \text{ tudíž } \beta = \alpha;$$

průsek roviny ϱ s plochou kuželovou jest parabola o parametru

$$p = \frac{r}{2}.$$

*) Úloha 42. z ročníku XXVI.