Jan Schuster

Příspěvek k teorii normál kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 69 (1940), No. Suppl., D109--D117

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120998

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Příspěvek k teorii normál kuželoseček.

Jan Schuster, Praha.

V 68. ročníku tohoto časop. na str. D 121 a násl. uvažovány úlohy o určení kuželosečky normálami, a to přímým vytčením vztahů k ohniskům.

Zde chceme o úlohách těchto pojednat se stanoviska jiného, kde určujeme koeficienty obecné rovnice. Úkol uvažujeme zase zvláště pro parabolu, kde následkem větší jednoduchosti lze metodu spíše objasnit, a pak teprve uvažujeme středovou kuželosečku. Současně přibereme v úvahu též tečny.

Zároveň v odst. 7.—12. připojíme řešení úloh vztahujících se k vrcholům a ohniskům.

1. Buďte dány tři normály, vycházející ze společného bodu. Hledá se směr osy paraboly a současně směry tečen ke křivce z téhož bodu vedených.

Zvolme společný bod za počátek souřadnic a parabola měj rovnici:

$$(x + my)^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{1}$$

takže koeficient m je směrnice vrcholové tečny, tedy kolmice k ose, a jeho určení stačí k určení směru osy.

Je-li B směrnice tečny, máme hned rovnice:

$$y = Bx \text{ a } B = -\frac{x + my + d}{mx + m^2y + e}, \tag{2}$$

z čehož tedy po vyloučení y plyne:

$$Bmx + m^2B^2x + eB + x + mBx + d = 0,$$

tudíž

$$x = -\frac{eB + d}{Bm\,(1 + mB) + 1 + mB} = -\frac{eB + d}{(1 + mB)^2}.$$

Odtud $x + my = x\,(1 + mB)$

a $$(x + mBx)^2 + 2x\,(d + eB) + f = 0$$

a po dosazení hodnoty za x vznikne:

$$(eB + d)^2 - 2\,(d + eB)^2 + f\,(1 + mB)^2 = 0.$$

Když sloučíme a rovnici uspořádáme podle neznámé B, vznikne rovnice

$$B^2\,(e^2 - fm^2) + 2B\,(ed - fm) + d^2 - f = 0. \tag{3}$$

Koeficienty této rovnice hrají v dalším důležitou roli, a označíme je

$$L = e^2 - fm^2,\quad M = ed - fm,\quad N = d^2 - f. \tag{4}$$

Vymizení veličiny N značí, že osa x-ová je jednou tečnou, vymizení L ukazuje, že osa y je tečnou, vymizení M vyslovuje požadavek, že tečny z bodu O vedené stojí souměrně dle souřadných os, čili že souřadné osy půlí úhly tečen. Protože tedy rovnice $L = 0$, nebo $M = 0$, nebo $N = 0$ značí jen zvláštní polohu os souřadných, což lze pouhým pootočením soustavy vyloučit, budeme nadále předpokládat L, M, N různé od nuly, takže budeme zbaveni nutnosti v úkolech eliminačních věnovat pozornost takovýmto možnostem, které by mohly platnost úkonů ohrozit.

V dalším půjde o určení veličiny m.

Obraťme se nyní k normálám.

Je-li směrnice normály A, platí obdobně se (2) rovnice:

$$A = \frac{y}{x},\qquad A = \frac{mx + m^2y + e}{x + my + d}$$

vyloučíme odtud y, čímž vznikne:

$$Ax + mA^2x + dA = mx + m^2Ax + e,$$

takže

$$x = \frac{e - dA}{A + mA^2 - m\,(1 + mA)} = \frac{e - dA}{(1 + mA)\,(A - m)}.$$

Když dosadíme za x do (1), pamatujíce, že $x + my = x\,(1 + Am)$, obdržíme

$$\frac{(e - dA)^2}{(A - m)^2} + 2\,\frac{(d + eA)\,(e - dA)}{(1 + mA)\,(A - m)} + f = 0,$$

a odtud

$$(e - dA)^2\,(1 + mA) + 2\,(d + eA)\,(e - dA)\,(A - m) +$$
$$+ f\,(A - m)^2\,(1 + mA) = 0.$$

Pro rozvinutí bude tudíž:

$$A^3\,[d^2m - 2ed + fm^2] + A^2\,[-d^2 + 2e^2 - 2fm^2 + f] +$$
$$+ A\,[e^2m + 2d^2m - 2e^2m + fm^3 - 2fm] + e^2 - 2edm + fm^2 = 0.$$

Označme A_1, A_2, A_3 kořeny této rovnice. Jsou-li naopak tyto hodnoty dány, možno hledat koeficienty. Zavedeme-li označení:

$$K_1 = A_1 + A_2 + A_3,\; K_2 = A_2A_3 + A_3A_1 + A_1A_2,\; K_3 = A_1A_2A_3, \tag{5}$$

a užijeme-li označení (4), obdržíme z poslední rovnice podle známých vztahů mezi koeficienty rovnice a souměrnými funkcemi kořenů tyto rovnice:

$$
\left.
\begin{aligned}
K_1 &= \frac{d^2 - 2e^2 + 2fm^2 - f}{d^2m - 2ed + fm^2} = \frac{N - 2L}{Nm - 2M} \\
K_2 &= \frac{-e^2m + 2d^2m + fm^3 - 2fm}{d^2m - 2ed + fm^2} = \frac{-mL + 2Nm}{Nm - 2M} \\
K_3 &= \frac{-e^2 + 2edm - fm^2}{d^2m - 2ed + fm^2} = \frac{-L + 2Mm}{Nm - 2M}.
\end{aligned}
\right. \qquad (5a)
$$

Obdržíme tedy tři homogenní rovnice pro veličiny L, M, N:

$$
\left.
\begin{aligned}
2L - 2MK_1 + N(K_1m - 1) &= 0 \\
mL - 2MK_2 + Nm(K_2 - 2) &= 0 \\
L - 2M(K_3 + m) + NmK_3 &= 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (6)
$$

Tyto rovnice dovolují vyloučit L, M, N a dají pro určení veličiny m rovnici:

$$
\begin{vmatrix}
2, & K_1, & K_1m - 1 \\
m, & K_2, & K_2m - 2m \\
1, & K_3 + m, & K_3m
\end{vmatrix} = 0
$$

nebo odečtením m-násobného druhého sloupce od třetího:

$$
\begin{vmatrix}
2, & K_1, & -2 \\
m, & K_2, & -2m \\
1, & K_3 + m, & -m^2
\end{vmatrix} = 0,
$$

nebo

$$K_1m^3 + m^2[3 - 2K_2] + m[3K_3 - 2K_1] + K_2 = 0. \qquad (7)$$

Když tedy určíme odtud směrnici osy, určíme ze (6) poměry veličin L, M, N a tím hned podle (3), jež nyní zní

$$LB^2 + 2MB + N = 0, \qquad (3a)$$

směrnice tečen vedených ke kuželosečce z počátku.

Dodatečně pak dovolí (4) určit f z rovnice, již obdržíme vyloučením veličin e, d, neboť

$$(L + fm^2)(N + f) - (M + fm)^2 = 0,$$

což dá

$$-f = (LN - M^2) : (Nm^2 + L - 2Mm),$$

až na neurčitý koeficient, který plyne z toho, že dělenec je kvadratický dle L, M, N, kdežto dělitel lineární.

Posléze se určí e a d, ovšem zase až na jistý neurčitý faktor, což ukazuje, že výsledek jest určení paraboly až na homotetii o středu O.

2. Uvažujme teď případ, kdy dány dvě tečny B_1, B_2 a jedna normála A_1, jež vedeny z počátku $O\,(0, 0)$. Jde tedy o určení normál A_2, A_3 a koeficientů rovnic (6).

Nyní jsou poměry veličin L, M, N známy, neboť

$$B_1 + B_2 = -\frac{2M}{L}, \quad B_1 B_2 = \frac{N}{L}.$$

Rovnice (5) dovolí vyloučit $A_2 + A_3$ a $A_2 A_3$, takže (5a) dají:

$$A_2 + A_3 = \frac{N - 2L}{Nm - 2M} - A_1, \qquad A_2 A_3 = \frac{-L + 2Mm}{Nm - 2M} \cdot \frac{1}{A_1} \tag{8}$$

a tyto dosazeny do střední z rovnic (5a) dají pro m rovnici:

$$A_1 \left(\frac{N - 2L}{Nm - 2M} - A_1 \right) + \frac{-L + 2Mm}{Nm - 2M} \frac{1}{A_1} = \frac{-mL + 2Nm}{Nm - 2M}.$$

Odtud plyne pro m lineární rovnice a zní:

$$m = \frac{L - 2MA_1^3 + A_1^2 (N - 2L)}{L + 2M - 2N - NA_1^3}. \tag{9}$$

Když dosadíme tuto hodnotu do (8), obdržíme A_2 i A_3. Ostatní výpočet je stejný jako v 1. odstavci.

Konstruktivně je tato úloha velmi prostá.

Když sestrojíme k normále A_1 kolmici, obdržíme pro jednu z parabol homotetických podle středu O jakožto určující prvky tři tečny, totiž B_1, B_2 a kolmici B^*_1 k A_1, a dotykový bod na této, t. j. průsečík B^*_1 s A_1, tedy celkem čtyři prvky. Pátý prvek je tečna v nekonečnu. Dotykový bod této tečny určen přímkou, která je rovnoběžná s osou. Tedy vidíme, že úloha tím převedena na užití Brianchonovy věty pro pětiúhelník opsaný kuželosečce.

3. Buďte ještě dány dvě normály A_1, A_2 a tečna B_1. Hledají se tedy m, A_3, B_2. Rovnice (3a) dá:

$$LB_1^2 + 2MB_1 + N = 0. \tag{3b}$$

Vyloučením A_3 z rovnic (5a) pak vznikne postupně:

$$A_3 = \frac{N - 2L}{Nm - 2M} - (A_1 + A_2)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 A_2 + A_3 (A_1 + A_2) = A_1 A_2 + \frac{N - 2L}{Nm - 2M} (A_1 + A_2) - \\ - (A_1 + A_2)^2 = \frac{-mL + 2Nm}{Nm - 2M} \\ \frac{N - 2L}{Nm - 2M} - (A_1 + A_2) = \frac{-L + 2Mm}{Nm - 2M} \frac{1}{A_1 A_2}. \end{aligned}\right\} \tag{5b}$$

Rovnice (3b) a (5b) jsou podle L, M, N lineární. Označme

$$A_1 + A_2 = P,\ A_1A_2 = Q.$$

Pak bude

$$\left.\begin{array}{l} L\,(m - 2P) - 2M\,(Q - P^2) + N\,(P + mQ - mP^2 - 2m) = 0 \\ L\,(1 - 2Q) + 2M\,(PQ - m) + NQ\,(1 - Pm) = 0 \end{array}\right\} \quad (5c)$$

a po vyloučení L, M, N ze (3b) a (5c) obdržíme:

$$\begin{vmatrix} B_1^2, & -B_1, & 1 \\ m - 2P, & -(Q - P^2), & P + mQ - mP^2 - 2m \\ 1 - 2Q, & PQ - m, & Q\,(1 - Pm) \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

Tato rovnice dá pro m dvě hodnoty, (5c) dají poměry veličin L, M, N, další určení veličin A_3 a B_2 plyne z rovnic (3b) a z rovnice následující. Tím úkol rozřešen.

Kdyby šlo o sestrojení hledaného směru osy, je výhodné specialisovat poněkud dané veličiny.

Tečnu B_1 zvolíme za základní směr, t. j. učiníme $B_1 = 0$. Pak je podle (3b) $N = 0$, a směr druhé tečny dán poměrem: $B = -\dfrac{2M}{L}$. Nyní se rovnice (5c) zjednoduší na:

$$L\,(m - 2P) - 2M\,(Q - P^2) = 0,\ L\,(1 - 2Q) + 2M\,(PQ - m) = 0.$$

Odtud vyloučíme m, což dá:

$$L^2\,(1 - 2Q) + 2MLP\,(Q - 2) - 2M^2\,(Q - P^2) = 0$$

a dosazením $\dfrac{M}{L} = -\dfrac{B}{2}$ vznikne

$$B^2\,(Q - P^2) - 2BP\,(Q - 2) - 2\,(1 - 2Q) = 0.$$

Když tedy na tečnu B_1 od O naměříme vhodnou úsečku h, sestrojíme-li v jejím koncovém bodě kolmici k tečně, vytnou na ní normály dvě úsečky

$$h_1 = A_1h,\ h_2 = A_2h,\ \text{takže}\ P = \frac{h_1 + h_2}{h},\ Q = \frac{h_1h_2}{h^2}.$$

Buď ještě $\xi = Bh$. Znásobme poslední rovnici veličinou h^4. Odtud bude

$$\xi^2\,(h_1h_2 - \{h_1 + h_2\}^2) - 2\xi\,(h_1 + h_2)\,(h_1h_2 - 2h^2) - 2h^2\,(h^2 - 2h_1h_2) = 0$$

nebo

$$\xi^2 - 2\xi\,(h_1 + h_2)\frac{h_1h_2 - 2h^2}{h_1h_2 - (h_1 + h_2)^2} - 2h^2\frac{h^2 - 2h_1h_2}{h_1h_2 - (h_1 + h_2)^2} = 0.$$

Koeficienty této rovnice se dají sestrojit, a tedy dle známých principů lze sestrojit též ξ co do velikosti i směru. Spojnice obou koncových bodů nalezených úseček ξ_1, ξ_2 s bodem O určují hledané tečny Ξ_1 a Ξ_2.

Dále se určí osa paraboly stejným způsobem jako v odstavci 2., neboť tečny B_1, Ξ_1 a normála A_1 dají jedno řešení, tečny B_1, Ξ_2 a normála A_1 dají druhé řešení. Normála A_1 se dá ovšem beze změny výsledku nahradit v obou konstrukcích normálou A_2.

4. Obdobný úkol pro středovou kuželosečku

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{11}$$

jest ovšem značně složitější a proto se zde omezíme především na sdělení plánu řešení. Jde totiž o určení směrů os, dány-li čtyři normály, vycházející z bodu O (0, 0).

Pro tečnu z počátku bude nyní:

$$y = Bx,\ B = -\frac{ax + by + d}{bx + cy + e}, \tag{12}$$

z čehož

$$Bbx + B^2cx + Be + ax + bBx + d = 0,$$

tedy

$$x = -\frac{eB + d}{B^2c + 2bB + a}.$$

Z (11) plyne jednak

$$x^2 (a + 2bB + cB^2) + 2x (d + Be) + f = 0,$$

jednak:

$$\frac{(eB + d)^2}{B^2c + 2Bb + a} - \frac{2 (d + Be)^2}{B^2c + 2Bb + a} + f = 0,$$

nebo

$$(eB + d)^2 - f (B^2c + 2Bb + a) = 0,$$

tedy

$$LB^2 + 2MB + N = 0, \tag{13}$$

když

$$L = e^2 - fc,\ M = ed - fb,\ N = d^2 - af. \tag{14}$$

Pro normálu platí jako svrchu:

$$y = Ax,\ A = \frac{bx + cy + c}{ax + by + d}, \tag{15}$$

z čehož

$$Axa + A^2bx + Ad = bx + Acx + e$$

a

$$x = \frac{e - Ad}{A^2b + A (a - c) - b}.$$

Dosazením do (11) obdržíme:

$$\begin{aligned}&(e - Ad)^2 (cA^2 + 2bA + a) + 2 (- Ad + e) (Ae + d) \,.\\ &.\, (A^2b + A [a - c] - b) + f [A^2b + A (a - c) - b]^2 = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Uspořádáme-li tento výraz podle mocnin směrnice A, vznikne:

$$\begin{aligned} & A^4 (d^2c - 2bde + fb^2) + A^3 (2be^2 - 2eda + 2fb [a - c]) + \\ & + A^2 [ce^2 + ad^2 + 2 (e^2 - d^2) (a - c) + f (a - c)^2 - 2fb^2] + \\ & + A [- 2cde + 2bd^2 - 2fb (a - c)] + e^2a - 2bde + b^2f = 0 \end{aligned} \tag{16a}$$

Označíme-li ještě

$$ac - b^2 = D,$$

bude

$$\begin{aligned} & d^2c - 2bde + fb^2 = cN - 2bM + fD, \\ & 2be^2 - 2eda + 2fb (a - c) = 2bL - 2aM, \\ & ce^2 + ad^2 + 2 (e^2 - d^2) (a - c) + f (a - c)^2 + 2fb^2 = L (2a - c) + \\ & \qquad + N (2c - a) + 2fD, \\ & - 2cde + 2bd^2 - 2fb (a - c) = - 2Mc + 2Nb, \\ & e^2a - 2bde + b^2f = aL - 2bM + fD. \end{aligned}$$

Položíme-li ještě souměrné funkce kořenů rovnice (16a) na roveň:

$$K_1 = \sum_{i=1}^{4} A_i,\ K_2 = \sum_{i,k=1}^{4} A_iA_k,\ K_3 = \sum_{i,j,k} A_iA_jA_k,\ K_4 = A_1A_2A_3A_4,$$

bude

$$\left.\begin{aligned} - K_1 (cN - 2bM + fD) &= 2bL - 2aM \\ K_2 (cN - 2bM + fD) &= L (2a - c) + N (2c - a) + 2fD \\ - K_3 [cN - 2bM + fD] &= - 2cM + 2Nb \\ K_4 (cN - 2bM + fD) &= aL - 2Mb + fD. \end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

Přepišme tyto rovnice podle veličin L, M, N, fD:

$$\left.\begin{aligned} 2bL - 2M (a + bK_1) + NcK_1 + fDK_1 &= 0 \\ L (2a - c) + 2MbK_2 + N (2c - a - cK_2) + fD (2 - K_2) &= 0 \\ - 2M (c + bK_3) + N (cK_3 + 2b) + fDK_3 &= 0 \\ La - 2M (b - bK_4) - NcK_4 + fD (1 - K_4) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Odtud vyloučením týchž veličin:

$$\begin{vmatrix} 2b, & - (a + bK_1), & cK_1, & K_1 \\ 2a - c, & bK_2, & 2c - a - cK_2, & 2 - K_2 \\ 0, & - (c + bK_3), & cK_3 + 2b, & K_3 \\ a, & - b (1 - K_4), & - cK_4, & 1 - K_4 \end{vmatrix} = 0$$

Pokud jde o možnost, že by selhala eliminace, upozorňuji, že o vymizení veličin L, M, N platí zmínka učiněná v 1. odstavci, a kdyby vymizelo f, šlo by o kuželosečku, která prochází bodem O, tedy by šlo o určení kuželoseček s menším počtem dat. Tečny z bodu O vedené by splynuly v jednu, neboť rovnice (14) by daly

$$L = e^2,\ N = d^2,\ M = ed = \pm \sqrt{LN}$$

a rovnice (13) by zněla $(Be \pm d)^2 = 0$.

Vymizení D by pak dalo podmínku $ac — b^2 = 0$, t. j. hledaná křivka (11) by byla parabola, a případ by se řešil podle odstavce 1.

Přičtěme b-násobný čtvrtý sloupec ke druhému a odečtěme týž c-násobný od třetího. Tím obdržíme:

$$\begin{vmatrix} 2b, & -a, & 0, & K_1 \\ 2a-c, & 2b, & -a, & 2-K_2 \\ 0, & -c, & 2b, & K_3 \\ a, & 0, & -c, & 1-K_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Tato rovnice je homogenní stupně třetího dle koeficientů a, b, c, a dá se přepsat na tvar:

$$\begin{aligned} K_1\,[4ab^2 - c\,(a-c)^2] + 2K_2 b\,(c^2 - a^2) + K_3 a\,(a-c)^2 + \\ + 4K_4 b\,[2b^2 + a\,(a-c)] - 4b\,[2b^2 + c\,(c-a)] = 0. \end{aligned} \qquad (18)$$

Tím jsme vyloučili koeficienty d, e, f.

Druhou rovnici pro veličiny a, b, c nám dají rovnice (14) a (17). První tři ze (17) dají:

$$L : M : N : fD =$$

$$= \begin{vmatrix} -2\,(a + bK_1), & cK_1, & K_1 \\ 2bK_2, & 2c - a - cK_2, & 2-K_2 \\ -2\,(c + bK_3), & cK_3 + 2b, & K_3 \end{vmatrix} :$$

$$: - \begin{vmatrix} 2b, & cK_1, & K_1 \\ 2a-c, & 2c - a - cK_2, & 2-K_2 \\ 0, & cK_3 + 2b, & K_3 \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 2b, & -2\,(a + bK_1), & K_1 \\ 2a-c, & 2bK_2 & 2-K_2 \\ 0, & -2\,(c + bK_3), & K_3 \end{vmatrix} :$$

$$: - \begin{vmatrix} 2b, & -2\,(a + bK_1), & cK_1 \\ 2a-c, & 2bK_2, & 2c - a - cK_2 \\ 0, & -2\,(c + bK_3), & cK_3 + 2b \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -a, & 0, & K_1 \\ b, & -a, & 2-K_2 \\ -c, & 2b, & K_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 2b, & 0, & K_1 \\ 2a-c, & -a, & 2-K_2 \\ 0, & 2b, & K_3 \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 2b, & -a, & K_1 \\ 2a-c, & b, & 2-K_1 \\ 0, & -c, & K_3 \end{vmatrix} : -2 \begin{vmatrix} 2b, & -a, & cK_1 \\ (2a-c), & \dfrac{b}{c}\,(2c-a), & 2c-a-cK_2 \\ 0, & -c+\dfrac{2b^2}{c}, & cK_3 + 2b \end{vmatrix}.$$

Když tyto determinanty označíme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ resp. plyne ze (14):

$$\left(2\alpha_1 - \frac{2c\alpha_4}{D}\right)\left(\alpha_3 - \frac{2a\alpha_4}{D}\right) - \left(+\alpha_2 + \frac{2b\alpha_4}{D}\right)^2 = 0. \qquad (19)$$

V této rovnici jsou $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a D stupně druhého dle a, b, c, α_4 stupně třetího, tedy rovnice (19) stupně osmého dle vytčených koeficientů.

Směr osy křivky závisí jen na členech stupně druhého v rovnici (11). Kdybychom tedy psali rovnici (11) ve tvaru převedeném na počátek

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = h, \tag{20}$$

kde h je veličina od 0 různá, a určíme-li osy jako dvojné přímky patřící svazku křivky (20) a soustředného kruhu $x^2 + y^2 = r^2$, dvojnásob se dotýkajícího křivky (20), plynou osy z homogenní rovnice, vzniklé z obou posledních vyloučením pravých stran:

$$(ar^2 - h)\, x^2 + 2br^2xy + (cr^2 - h)\, y^2 = 0.$$

Poloměr r odpovídá nulovému diskriminantu:

$$b^2r^4 - (ar^2 - h)(cr^2 - h) = 0$$

nebo

$$r^4 (b^2 - ac) + hr^2 (a + c) - h^2 = 0.$$

Kořenům r_1^2, r_2^2 odpovídají směrnice m_1, m_2 os, pro které platí:

$$m_1 = -\frac{br_1^2}{ar_1^2 - h}, \quad m_2 = -\frac{br_2^2}{ar_2^2 - h}.$$

Ježto

$$r_1^2 + r_2^2 = -\frac{h\,(a + c)}{b^2 - ac}, \quad r_1^2 r_2^2 = -\frac{h^2}{b^2 - ac},$$

obdržíme

$$m_1 + m_2 = -\frac{2abr_1^2r_2^2 - bh\,(r_1^2 + r_2^2)}{(ar_1^2 - h)(ar_2^2 - h)} =$$

$$= -\frac{-2abh^2 + h^2b\,(a + c)}{-a^2h^2 + a\,(a + c)\,h^2 + h^2\,(b^2 - ac)}$$

tedy

$$m_1 + m_2 = \frac{b\,(a - c)}{b^2} = \frac{a - c}{b} = m. \tag{21}$$

Součin

$$m_1m_2 = \frac{b^2r_1^2r_2^2}{(ar_1^2 - h)(ar_2^2 - h)} = \frac{-bh^2}{bh^2} = -1$$

ukazuje jako samozřejmý výsledek kolmost obou os křivky.

Tím převedeno další řešení na vyloučení veličin a, b, c z rovnice (18) stupně třetího, z (19) stupně 8. a z lineární rovnice (21), čímž vznikne pro m rovnice stupně obecně 24.

Další postup by zase dal L, M, N a fD, odtud pak e, d.

(Přístě dokončení).