Václav Pleskot

O grafickém násobení a dělení funkcí

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 69 (1940), No. Suppl., D165--D170

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120994

(nikoliv jen konečná!) nezáporná (identicky nenulová, to znamená: není identicky rovná nule) množinová funkce, která kromě toho v proměnné Y jest aditivní. Toto pojetí počtu pravděpodobnosti nevede k jeho ochuzení; toliko některé jeho formule se zjednoduší.

Restrikce všech možných případů inkluse mezi dvěma množinami na případ $X \supseteq Y$ odůvodněna jest tím, že dvě různé množiny $Y_1 \neq Y_2$ překrývající X ve stejné části, t. j. s průnikovou podmínkou $XY_1 = XY_2$, vedou ke stejné hodnotě funkce P: $P(X, Y_1) = P(X, Y_2)$. Překrývá-li Y množinu X, pak její část $(Y - XY)$ jest pro vybudování počtu pravděpodobnosti irelevantní, neboť může býti libovolně volitelna.

Příklad zjednodušení formulí: V obvyklém počtu pr., kde X, Y, Z se jen z části mohou překrývat, platí

$$P(X, Y \, . \, Z) = P(X, Y) \, . \, P(X \, . \, Y, Z),$$

kdežto ve zjednodušeném počtu pr. jest

$$P(X, Z) = P(X, Y) \, . \, P(Y, Z),$$

neboť nyní $X \supseteq Y \supseteq Z$. Známý Bayesův vzorec (Rychlík, Úvod do počtu pravděpodobnosti, Praha 1938, str. 32, 34) se přepíše jako

$$\frac{P(X, Y_1)}{P(X, Y_2)} = \frac{P(Y_2, Z)}{P(Y_1, Z)},$$

kde $X \supseteq Y_i \supseteq Z$, při čemž ovšem nemusí $Y_i \supseteq Y_j$ $(i, j = 1, 2)$.

O grafickém násobení a dělení funkcí.

V. Pleskot, Praha.

Při sestrojování grafu součinu (resp. podílu) dvou funkcí užívá se v grafickém počtu obvykle konstrukce, která je systematickou aplikací konstrukce součinu (resp. podílu) dvou čísel, prováděné na ramenech téhož úhlu. Viz Láska-Hruška, Počet grafický a graficko-mechanický, str. 36; Pleskot, Grafické počítání, Rozhledy matematicko-přírodovědecké, roč. 15, str. 2.

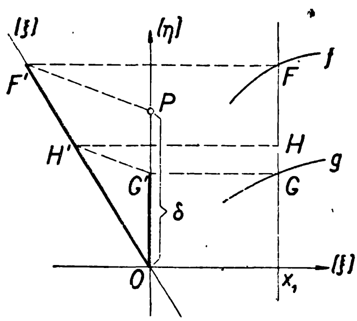
Abychom ji mohli porovnat s jinou konstrukcí, kterou chceme vyložit, zopakujme si ji stručně.

Buďtež grafy funkcí

$$y_1 = f(x) \text{ a } y_2 = g(x),$$

jichž součin chceme sestrojit, zakresleny s modulem α na ose úseček (ξ), společném pro oba grafy, ale třeba různém modulu na ose pořadnic (η), na př. β_1 pro $f(x)$ a β_2 pro $g(x)$. V obr. 1 grafy f a g.

Připomeňme si ještě, že dvě funkce násobíme graficky spolu tak, že součin provedeme vždy pouze pro určitý argument $x = x_1$, takže vlastně násobíme vždy dvě čísla $f(x_1)$ a $g(x_1)$. Argumenty x_1 pak postupně měníme tak, aby vyčerpaly celý interval argumentu x, v němž jsou zakresleny pořadnice obou grafů.



Obr. 1.

Ukážeme tedy vynásobení funkcí f a g pro hodnotu argumentu $x = x_1$. Příslušné pořadnice leží na společné rovnoběžce s osou (η) ve vzdálenosti $\xi = \alpha \, . \, x_1$. V obraze 1 jsou to úsečky $\overline{x_1F} = \beta_1 \, f(x_1)$ a $\overline{x_1G} = \beta_2 \, g(x_1)$; zobrazují čísla, která máme graficky znásobit. Násobení při zmíněné konstrukci se provádí na ramenech úhlu, který svírají osa (η) a osa (ζ), což je přímka vedená počátkem a svírající přibližně úhel 45° s osou (η).

Provedení násobení je patrné z obr. 1. Úsečka $\overline{x_1F}$ je promítnuta rovnoběžně s (ξ) na osu (ζ) do $\overline{OF'}$, úsečka $\overline{x_1G}$ na osu (η) do $\overline{OG'}$. Na (η) zvolen pól P ve vzdálenosti δ od počátku. Se spojnicí $\overline{F'P}$ je bodem G' vedena rovnoběžka, která na (ζ) vytne bod H'. Úsečka $\overline{OH'}$ zobrazuje součin $f(x_1) \, . \, g(x_1)$. ale k-krát větší, protože úsečka $\overline{x_1F}$ se k-krát zvětšila promítnutím na osu (ζ), která není s $\overline{x_1F}$ rovnoběžná. Potvrdíme si to z úměr

$$\overline{OH'} : \overline{OF'} = \overline{OG'} : \overline{OP}$$

čili

$$\overline{OH'} = \frac{\overline{OF'} \, . \, \overline{OG'}}{\overline{OP}} = \frac{k\beta_1 \, f(x_1) \, . \, \beta_2 \, g(x_1)}{\delta} = k \, \frac{\beta_1\beta_2}{\delta} \, f(x_1) \, g(x_1).$$

Promítneme-li $\overline{OH'}$ rovnoběžně s (ξ) do $\overline{x_1H}$, zmenší se tímto promítnutím úsečka $\overline{OH'}$ právě k-krát a dostaneme konečně žádaný výsledek

$$\overline{x_1H} = \frac{\beta_1\beta_2}{\delta} \, f(x_1) \, . \, g(x_1).$$

Úsečka $\overline{x_1H}$ přestavuje součin $f(x_1) \, . \, g(x_1)$ při modulu $\gamma = \dfrac{\beta_1\beta_2}{\delta}$. Celou konstrukci pak opakujeme pro každé další x_1.

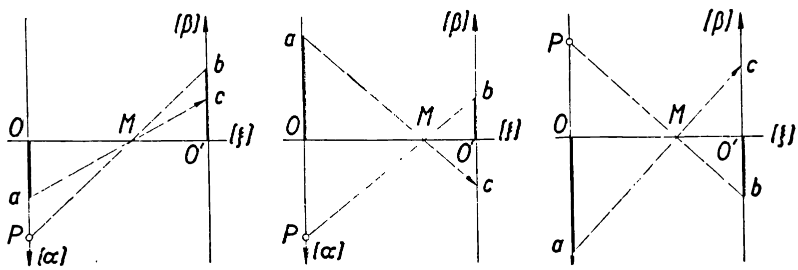
Jak bychom sestrojili podíl $g = \dfrac{h}{f}$, je z téhož obrazce také patrné. Označíme-li γ modul grafu h, je výsledný modul podílu $\beta_2 = \frac{\gamma}{\beta_1} \cdot \delta$.

Uvedený způsob násobení a dělení dvou funkcí musí se jevit poněkud složitý, jestliže si uvědomíme, že běží v podstatě o násobení (dělení) dvou čísel a celé uspořádání výpočtu vyžaduje vedení pěti spojnic, jichž poloha k tomu ještě je z větší části určována rovnoběžností ke spojnicím bodů dosti blízkých (což má samozřejmě vliv i na přesnost výsledku). Tak nejdříve čísla, která spolu násobíme, promítáme na ramena úhlu, kde se teprve násobení provádí a to novým vedením rovnoběžek, načež na konec se výsledek zde získaný znovu promítá na příslušnou pořadnici.

Snaha po odstranění těchto závad nám poskytuje příležitost poukázati na jiný způsob násobení resp. dělení čísel, který lze vhodně aplikovat na konstrukci grafů.

Konstrukce součinu $c = a \cdot b$.

Veďme dvě rovnoběžné osy (α), (β) v libovolné vzdálenosti a protněme je příčkou (ξ) v bodech O a O'. Orientujme vzhledem k dalšímu upotřebení konstrukce, osy (α), (β) protichůdně (viz obr. 2). Na osu (α) vynesme od bodu O jednak číslo a při modulu α



Obr. 2. Obr. 2a. Obr. 2b.

(tedy úsečku $\overline{Oa} = \alpha \cdot a$) a potom pólovou vzdálenost δ ($\overline{OP} = \delta$). Na osu (β) vyneseme číslo b při modulu β ($\overline{O'b} = \beta \cdot b$). Spojme pól P s bodem b. Průsečík této spojnice s příčkou (ξ), označme jej M, spojme s bodem a. Spojnice $\overline{aM}$ vytne na (β) bod c a úsečka $\overline{O'c}$ nám zobrazuje výsledek, neboť platí úměry

$$\overline{O'c} : \overline{Oa} = \overline{O'M} : \overline{OM} = \overline{O'b} : \overline{OP}$$

čili také

$$\overline{O'c} : \alpha \cdot a = \beta \cdot b : \delta,$$

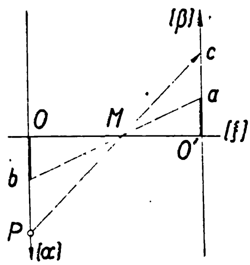
$$\overline{O'c} = \frac{\alpha\beta}{\delta}\, a\,.\, b.$$

Úsečka $\overline{O'c}$ udává součin $a\,.\,b$ při modulu $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\delta}$.

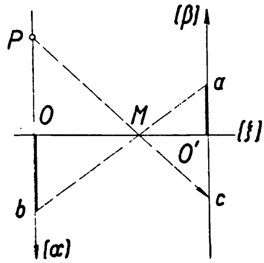
Jsou-li čísla, která spolu násobíme, rozdílných znamení, vyneseme s výhodou číslo záporné na osu, kde je pól, pak vyjde totiž průsečík M uvnitř úsečky $\overline{OO'}$, jak ukazuje obr. 2a.

Podržíme-li požadavek míti průsečík M uvnitř úsečky $\overline{OO'}$ i v případě, že násobíme dvě čísla záporná, je vhodné zvoliti pólovou vzdálenost δ zápornou a jedno z čísel uvažovat jako kladné. Uspořádání je zřejmé z obr. 2b. Výsledek $\overline{O'c} = (-a)\,.\,(-b)$ při mod $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\delta}$ dostaneme na ose (β) v kladném směru, shodném se znamením součinu.

Dělení čísel provádí se inversně. Při konstrukci podílu $c = \frac{b}{a}$ budeme užívat uspořádání, jak nám je podává obr. 3. Dělitele b



Obr. 3.



Obr. 3a.

budeme vynášet na osu, kde je pól P a dělence a na druhou osu. Spojíme koncové body dělence a dělitele. Spojnice protne (ξ) v bodě M. Druhá spojnice $\overline{PM}$ vytne na ose (β) koncový bod podílu c. Podobně jako u násobení bychom ukázali, že

$$\overline{O'c} = \frac{\alpha}{\beta}\,\delta\,\frac{a}{b},$$

čili, že úsečka $\overline{O'c}$ zobrazuje podíl $\frac{a}{b}$ při modulu $\frac{\alpha}{\beta}\,\delta$.

I u dělení budeme požadovat, aby průsečík M padl dovnitř úsečky $\overline{OO'}$. Abychom tomuto požadavku vyhověli, je třeba, mají-li čísla různá znamení, použíti záporné pólové distance a čísla uvažovat buď obě jako kladná nebo obě jako záporná. Příslušnou konstrukci ukazuje obr. 3a, kde jsme obě čísla pokládali za kladná.

Jsou-li obě čísla záporná, vychází průsečík M při normálním uspořádání vždy dovnitř úsečky $\overline{OO'}$.

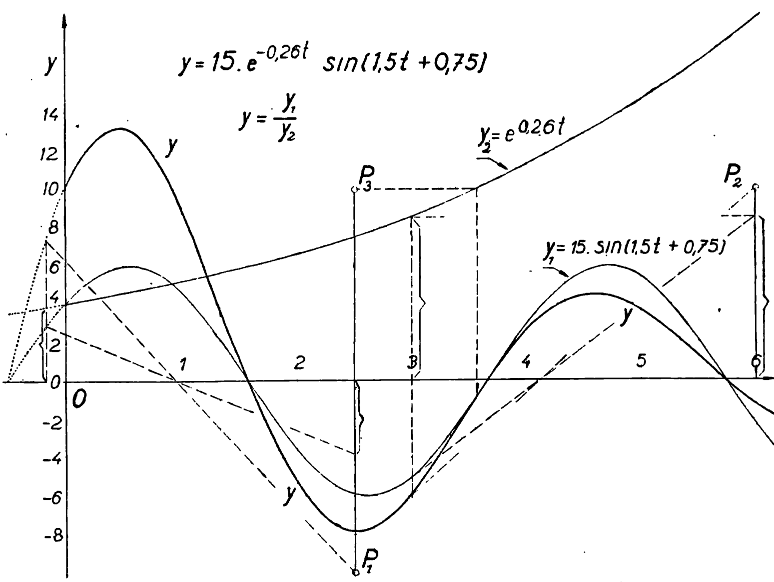
Pro snadné vybavení úprav nově uvedené konstrukce stačí si uvědomit a zapamatovat v podstatě dvě věci, sice 1. rozdíl v konstrukci mezi násobením a dělením, a 2. hledisko po umístění pólu P, jestliže výsledek má vyjít na ose, kde neleží pól (na ose (β)).

Ad 1. Při násobení první spojnice v konstrukci prochází pólem, kdežto při dělení spojuje koncové body čísel, která spolu dělíme; kromě toho číslo, kterým dělíme, vynášíme na osu, kde je pól.

Ad 2. Pól volíme na ose (α) tak, aby výsledek padl na tu stranu osy (β), jejíž znamení souhlasí se znamením součinu, resp. podílu.

Konstrukce se obzvláště dobře hodí k sestrojování součinu nebo podílu funkcí, protože za osy (α) a (β) můžeme brát rovnoběžky, na které jsou vynášeny pořadnice.

Přednosti nové konstrukce nutno spatřovat jednak v tom, že užívá pouze dvou spojnic (při tom žádná z nich není určena jako rovnoběžka) a potom při aplikaci na grafy, že výsledek vychází přímo do příslušné pořadnice (viz příklad).



Obr. 4.

V obr. 4 nebyly nedopatřením vytaženy dělící úsečky na ose (η) a (ξ), příslušné k číslům tam napsaným.

Osy (α), (β) lze voliti ve vzdálenosti zcela libovolné, je proto snadné si zařídit, aby v konstrukci užívané spojnice procházely body od sebe dosti vzdálenými a tím byly dostatečně přesně.

Jako příklad sestrojme graf funkce

$$y = 15 \,.\, e^{-0,26t} \,.\, \sin (1.5t - 0,75)$$

(z fysiky známá rovnice pro tlumené kmity):

Rovnici funkce přepíšeme na podíl funkcí $y = \frac{y_1}{y_2}$, kde

$$y_1 = 15 \,.\, \sin (1.5t - 0.75)$$

a

$$y_2 = e^{0,26t}.$$

V nákresu užity moduly $\alpha = 1,5$ cm při vynášení t, $\beta_1 = 0,1$ cm pro y_1. $\beta_2 = 1$ cm pro y_2 a pólová distance $\delta = 2,5$ cm, takže modul. výsledný $\gamma = \frac{\beta_1}{\beta_2} \,.\, \delta = 0,25$ cm.

Graf funkce y_1 je sinusoida o periodě $T = \frac{2\pi}{1,5}$, která protíná osu (t) v bodě o kótě $t_0 = \frac{-0,75}{1,5} = -0,5$ (a mimo to v bodech o kótě $t_0 \pm kT$, $t_0 \pm k\,\frac{1}{2}T$, kde k je číslo celé, kladné). Pro sestrojení pořadnic v intervalu přibližně $t = -0,5 \div 1,6$ a $t = 3,6 \div 5,7$ jsme použili pólu P_1; kde použito pólů P_2 a P_3, je patrné z obrázku 4.

Přesně jsme našli průsečík křivky y a y_1; jeho úsečka je shodná s úsečkou průsečíku křivky y_2 a přímky $\eta = \delta$. Plyne automaticky z konstrukce dělení.

Kreslil V. Pleskot. Archiv JČMF.