Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O geometrickém znázornění funkcí cyklických a hyperbolických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 2, 80--84

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120954`

O geometrickém znázornění funkcí cyklických a hyperbolických.

Podlé Günthera*) sestavil pro žáky středních škol

Dr. F. J. Studnička.

Jak z algebraické analyse jest povědomo, plyne z výrazu

$$lim \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega} = e^x \text{ pro } lim\ \omega = \infty \tag{1}$$

zvláštní funkce, jíž dáno jméno *exponencialní;* zároveň pak se vyjadřuje též řadou nekonečnou

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{2}$$

Pomocí této jednoduché funkce *transcendentní* možná sestaviti si zvláštní výrazy, kteréž představují taktéž zvláštní funkce transcendentní, z nichž nejobyčejnější jsou

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{3}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{4}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\Sigma \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{\Sigma \frac{x^{2k}}{(2k)!}} \tag{5}$$

jakož i převratné čili reciproké jich hodnoty. Z těchto výrazů pak obdržíme obdobné, učiníme-li mocnitele *imaginarním*, takže bude

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$

$$\text{nebo } e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} +$$

$$+ i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1!}. \tag{6}$$

Jak z jiného pramene plyne, platí pro cyklické funkce sinus a cosinus řady

*) Viz „Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen“ von Dr. *S. Günther*, Halle, 1881, pag. 92. jakož i odporučení této znamenité knihy v Časop. X. pag. 46.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (7)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \qquad (8)$$

a mimo to se z nich dále skládají nové funkce cyklické čili kruhové

$$\begin{aligned} tg\, x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \end{aligned} \qquad (9)$$

takže užijeme-li napřed vzorce (6), obdržíme přímo fundamentalní vzorec

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad (10)$$

načež snadno sestavíme vzorce s výrazy (3) a (4) obdobné

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x, \qquad (11)$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x. \qquad (12)$$

Obdoba čili analogie tato ukazuje přímo k tomu, jak bychom měli krátce jmenovati a vyznačiti funkce výrazy (3), (4), (5) naznačené a pd. „Per anologiam sinus ex circulo traduci possunt ad hyperbolam aquilateram“ praví o tomto poměru *V. Riccati* (1757) a zavádí zároveň označení „sinus a cosinus hyperbolicus“ symboly *Sh* a *Ch*, takže pro cyklické jich obdoby platí symbol *Sc* a *Cc*. Poněvadž se však později ustálilo *Eulerem* r. 1748 zavedené užívání symbolu *sin* a *cos* při funkcích cyklických, zavedeno obdobné označení, ale písmem gothickým čili švabachem, i při funkcích hyperbolických, takže se píše podlé *Gudermanna* od r. 1830

$$\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \mathfrak{Cos}\, x, \qquad (13)$$

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \mathfrak{Sin}\, x, \qquad (14)$$

a podlé vzorců (9) obdobně dále skládá

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cos}\, x} &= \mathfrak{Tg}\, x, \quad \frac{\mathfrak{Cos}\, x}{\mathfrak{Sin}\, x} = \mathfrak{Cot}\, x, \\ \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, x} &= \mathfrak{Sec}\, x, \quad \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, x} = \mathfrak{Cosec}\, x, \end{aligned} \qquad (15)$$

čímž povstávají základní funkce hyperbolické, pro něž se pak vyvinují další vzorce a sestavuje úplná analogie známé naší goniometrie čili úhloměrství vzhledem ke kruhu.

Obdoba vzorce (10) jest pak

$$e^x = \mathfrak{Kof}\, x + \mathfrak{Sin}\, x. \qquad (16)$$

Nemohouce se zde zanášeti s touto úlohou, jež ve vzorcích (13), (14) a (15) má svůj základ, z něhož snadno se dá vyvinouti, chceme tuto jen poukázati ku geometrickému znázornění obou druhů těchto funkcí, z něhož se pozná poměr jich ještě lépe nežli z přechodu od mocnitele realního vzorce (2) k mocniteli imaginarnímu vzorce (6). Ukazovatelem jest tu zároveň analytická rovnice kruhu

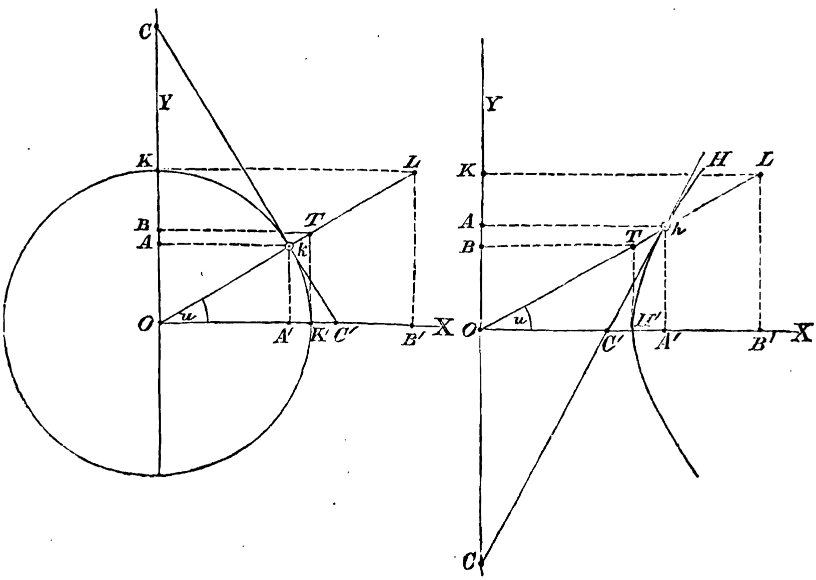
$$x^2 + y^2 = 1, \qquad (17)$$

ana se promění v rovnici rovnoramenné hyperboly

$$x^2 + (iy)^2 \equiv x^2 - y^2 = 1, \qquad (18)$$

píšeme-li v ní iy místo y.

Ku provedení našeho úmyslu sestrojme dvakráte soustavu pravoúhlých os — ob. 2. a veďme kolem počátku první co středu kruh KK' poloměru 1 a považujme druhou co prodloužení os stejnoramenné hyperboly HH', jejíž poloosa $OH' = 1$.



Obr. 2.

Sestrojíme-li pak v obou případech úhel $XOL = u$, kdež L leží v rovnoběžce s osou OX ve vzdálenosti $OK = 1$ vedené, protne nám rameno OL kruh v bodu k a hyperbolu v bodu h; vedeme-li pak v obou těchto bodech tečny ku křivkám příslušným, protnou nám osu pořadnic v bodech C, osu pak úseček v bodech C'; vztýčíme-li dále v bodech vrcholových K' a H' tečny, setkají se s ramenem úhlu u, totiž s přímkou OL v bodech T; promítneme-li konečně body L, T, k, při kruhu, L, h, T při hyperbole na obě osy souřadnicové, obdržíme na nich, od středu O vycházejíce, jmenované tu dříve funkce transcendentní příslušnými délkami vyjádřeny a sice bude tu, jakož snadno se přesvědčíme, *v kruhu*

$$\begin{array}{l|l} OA = \sin u & OA' = \cos u \\ OB = \operatorname{tang} u & OB' = \cot u \\ OC = \operatorname{cosec} u & OC' = \sec u \end{array}$$

kdežto v opačném pořádku jeví se býti při *hyperbole*

$$\begin{array}{l|l} OA = \mathfrak{Sin}\, u & OA' = \mathfrak{Cos}\, u \\ OB = \mathfrak{Tang}\, u & OB' = \mathfrak{Cot}\, u \\ OC = \mathfrak{Cosec}\, u & OC' = \mathfrak{Sec}\, u. \end{array}$$

Porovnáme-li nejen poměr vzájemných délek, nýbrž i pořádek, v němž průměty A, B, C jakož i A', B', C' na osy pořadnic a úseček v obou případech jsou sestaveny, poznáme velmi názorně vyjádřené hlavní funkce jak cyklické tak hyperbolické; taktéž snadno vyvedeme i mnohé vzorce goniometrické, týkající se obou soustav, jako na př. z rovnice hyperboly

$$x^2 - y^2 = 1,$$

dosadíme-li tam

$$OA' = x = \mathfrak{Cos}\, u, \quad OA = hA' = y = \mathfrak{Sin}\, u,$$

přímo základní vzorec

$$\mathfrak{Cos}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u = 1, \tag{19}$$

kterýž ostatně plyne též ze vzorců (13) a (14).

A jakož se jednoduchá periodičnost funkcí cyklických přímo z grafického jich znázornění dá odvoditi, plyne tato vlastnost funkcí hyperbolických nepřímo z oné; neb jelikož podlé vzorce (10) platí

$$\begin{aligned} e^{i(x + 2k\pi)} &= \cos(x + 2k\pi) + i \sin(x + 2k\pi) \\ &= \cos x + i \sin x = e^{ix}, \end{aligned} \tag{20}$$

takže tu perioda jest *realní* a sice

$$p = 2\pi,$$

obdobně platí podlé vzorce (16)

$$\begin{aligned} e^{x+2k\pi i} &= \mathfrak{Cos}\,(x + 2k\pi i) + \mathfrak{Sin}\,(x + 2k\pi i) \\ &= \mathfrak{Cos}\,x + \mathfrak{Sin}\,x = e^x, \end{aligned} \qquad (21)$$

takže tu perioda jest *imaginarní* a sice

$$p = 2\pi i.$$

Ostatně tu možná též užiti stejniny

$$e^{x+2k\pi i} = e^x\, e^{2k\pi i} = e^x\,(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^x.$$

Poněvadž obrácením funkce exponencialní obdrží se funkce *logarithmické*, jakož obrácením funkcí cyklických funkce *cyklometrické*, poznáváme, že i tyto funkce jsou jednoperiodické a sice mají tyto periodu realní, ony pak imaginarní, čímž vzájemnost těchto nižších funkcí transcendentních jest vytčena.

Další provedení, zejména grafické znázornění druhé periodičnosti pomocí konjugovaných hyperbol atd. nechť hledá se v *Güntherově* citovaném díle a sice pag. 99 et scqq.

O nové mathematické hře.

(Vyňato z časopisu „La Nature, č. 382.) Od dra. **Seydlera.**

Většina čtenářů našich zná zajisté hru, která před několika měsíci pod různými názvy (Boz Puzzle, Taquin atd.) se rozšířila. Na čtverci rozděleném na 16 stejných polí umístěno jest 15 kamenů, majících tvar a velkost těchto polí a znamenaných

A.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

B.

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
	15	14	13