Karel Zahradník

O jisté birationální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 2, 105--123

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120948

jejíž ostatní kořeny by byly dány průsečíky kružnice c' středu $M'\left(\frac{p}{4}, \frac{q}{16}\right)$ a procházející body L_*, S.

Rovnice (18) dává podmínku pro dvojný kořen rovnice (12). Vyloučíme-li z (18) a (13) veličinu z, obdržíme podmínečnou rovnici, jíž musí p, q, s vyhověti, aby rovnice (12) měla kořen dvojný.

Podotknuto budiž, což na jiném místě odvozeno bylo, že z konstrukce naší lze onu podmínečnou rovnici mezi p, q, s rovněž obdržeti, čímž se zároveň zjedná její geometrický význam.

O jisté birationální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek.

Dr. K. Zahradník.

Dané buďtež dvě přímky, jež zvolíme za osy souřadnic.

Rovnoběžky bodem $M\ (x \mid y)$ ku osám vedené protínají osy v bodech A, B. Spojnice těch bodů označme písmenem Π.

Je-li $M_1\ (x_1 \mid y_1)$ pata kolmice z počátku souřadnic na přímku Π spuštěné, obdržíme *)

$$x_1 = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \qquad y_1 = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Prvou rovnici můžeme psáti:

$$x_1 (x^2 + y^2) = xy^2;$$

---

*) Kdyby byl Θ úhel přímek, jež jsme vzali za osy souřadnic, je, píšeme-li $\cos\Theta = c$

$$x_1 = \frac{(y - cx)\, xy}{x^2 + y^2 - 2cxy},$$
$$y_1 = \frac{(x - cy)\, xy}{x^2 + y^2 - 2cxy},$$

z čehož opět plyne

$$x = \frac{x_1^2 + y_1^2 + 2cx_1y_1}{x_1 + cy_1},$$
$$y = \frac{x_1^2 + y_1^2 + 2cx_1y_1}{x_1 + cx_1}.$$

V následujícím předpokládati budeme $\Theta = 90^0$, nebude-li opak toho zvlášť vytknut.

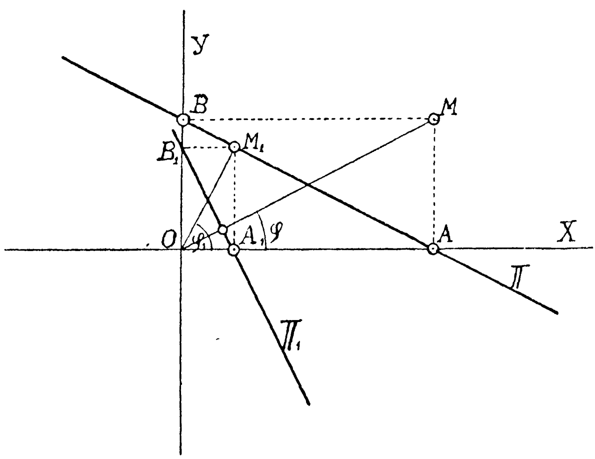
znásobíme-li ji x_1 a uvážíme-li, že z podílu těch rovnic plyne

$$xx_1 = yy_1 \,, \tag{2}$$

obdržíme:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}\,, \\ x &= \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Obr. 1.



Rovnice (3) obdržíme též přímo geometricky (obr. 1.), neb je

$$\overline{OM}_1^2 = \overline{OA} \,.\, \overline{OA}_1 = \overline{OB} \,.\, \overline{OB}_1 \,.$$

Z rovnic (1), (3) vysvítá, že je příbuznost bodů M a M_1 jedno-jednoznačná a kubická.

Jedno-jednoznačnost patrna je i geometricky; že bodu M naznačenou konstrukcí jediný bod M_1 přísluší, jsme ukázali z počátku, ale i naopak každému bodu M_1 přísluší jediný bod M. Sestrojíme totiž kolmici v bodě M_1 na $\overline{OM}_1$, čímž obdržíme přímku Π, a rovnoběžky v průsecích přímky Π s osami určují bod M.

Jsou tedy body M a M_1 v jedno-jednoznačné příbuznosti a podobně i bod M a přímka Π.

Bodu M_1 stejným způsobem přísluší bod M_2 a přímka Π_1 jedno-jednoznačně atd.

2. Z rovnice (2) plyne

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y} \tag{4}$$

a z analogického vztahu mezi souřadnicemi bodů M_1 a M_2 obdržíme

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{x_1}{y_1},$$

tudíž je

$$\frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2}.$$

Touto cestou najdeme, že je

$$\frac{x}{y} = \frac{x_{2n}}{y_{2n}}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

a podobně

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_{2n+1}}{y_{2n+1}}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

t. j. v řadě bodů M_n postupně příbuzností uvedenou obdržených, leží body M_{2n} na spojnici OM a body M_{2n+1} na spojnici OM_1, při čemž platí

$$\sphericalangle AOM = \sphericalangle M_1OB = \sphericalangle OAM_1 = \varphi,$$

tudíž je

$$\sphericalangle AOM_1 = \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi. \tag{5}$$

3. Je-li

$$r = f(\varphi)$$

rovnice křivky (M) v souřadnicích polárních, obdržíme dle příbuznosti (3) rovnici křivky transformované (M_1), uvážíme-li, že je

$$OA = r \cos \varphi,$$
$$r_1 = OM_1 = OA \cos \varphi_1$$

relaci

$$r_1 = r \cos \varphi \cos \varphi_1 = f(\varphi) \cos \varphi \cos \varphi_1,$$

tudíž za příčinou rovnice (5)

$$r_1 = f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \tag{6}$$

jako rovnici křivky (M_1) odvozené transformací zmíněnou z křivky (M).

4. Píšeme-li

$$u_n = -\frac{1}{x_n}, \qquad v_n = -\frac{1}{y_n}, \tag{7}$$

obdržíme z rovnic (1)

$$u_1 = \frac{u^2 + v^2}{u}, \qquad v_1 = \frac{u^2 + v^2}{v}, \tag{8}$$

a z rovnic (3)

$$u = \frac{u_1 v_1^2}{u_1^2 + v_1^2}, \qquad v = \frac{u_1^2 v_1}{u_1^2 + v_1^2}. \tag{9}$$

Příbuznost mezi přímkami Π a Π_1 (resp. Π_n a Π_{n+1}) vyjádřená jest týmiž rovnicemi v souřadnicích Plücker-ových, jako je příbuznost mezi body M_1 a M v souřadnicích bodových.

5. Píšeme-li

$$x_n^2 + y_n^2 = r_n^2,$$

obdržíme z rovnic (1)

$$r_1 = \frac{xy}{r},$$

tudíž je pro bod M_2

$$x_2 = \frac{x_1 y_1^2}{r_1^2} = \frac{x^3 y^2}{r^4}$$

$$y_2 = \frac{x_1^2 y_1}{r_1^2} = \frac{x^2 y^3}{r^4}$$

$$r_2 = \frac{x_1 y_1}{r_1} = \frac{x^2 y^2}{r^3}.$$

Podobně platí pro bod M_3

$$x_3 = \frac{x^3 y^4}{r^6}, \qquad y_3 = \frac{x^4 y^3}{r^6}, \qquad r_3 = \frac{x^3 y^3}{r^6},$$

a obecně obdržíme

$$x_{n+2} = \lambda x_n, \qquad y_{n+2} = \lambda y_n, \qquad x_{n+2} = \lambda r_n,$$

kde platí

$$\lambda = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

6. Dříve, než přistoupíme ku vyšetření naduvedené transformace a upotřebení její na konstrukci algebraických křivek, vyšetříme některá geometrická místa.

α) Jaké jest geometrické místo (M) *bodu* M*, jenž má od svého sdruženého bodu* M_1 *stálou vzdálenost* c.

Jelikož je

$$x_1 - x = -\frac{y_1^2}{x_1}, \qquad y_1 - y = -\frac{x_1^2}{y_1},$$

máme

$$\frac{y_1^4}{x_1^2} + \frac{x_1^4}{y_1^2} = c^2,$$

aneb

$$(M_1) \equiv x_1^6 + y_1^6 - c^2 x_1^2 y_1^2 = 0. \tag{10}$$

Jest však též

$$x_1 - x = -\frac{x^3}{x^2 + y^2}, \qquad y_1 - y = -\frac{y^3}{x^2 + y^2},$$

tudíž je, zkrátíme-li společným faktorem $(x^2 + y^2)$, rovnice místa

$$(M) \equiv x^4 - x^2 y^2 + y^4 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \tag{11}$$

V polárních souřadnicích je rovnice místa (M)

$$r^2 = \frac{4c^2}{\sin^2 2\varphi + 4\cos^2 2\varphi}. \tag{12}$$

Křivka tato je symmetrická jak k osám souřadnicovým, tak k její symmetrálám. Plocha jednoho oktantu p je

$$p = OAB = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = c^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \operatorname{tg} 2\varphi}{4 + \operatorname{tg}^2 2\varphi} = \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

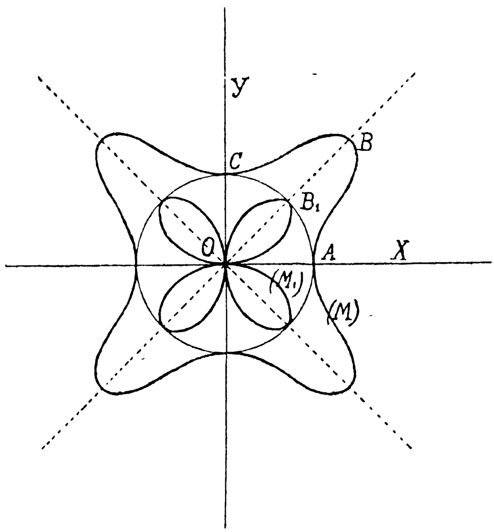
tudíž jest plocha celé křivky (viz obr. 2.)

$$P = 8p = 2\pi c^2 = \pi \overline{AC}^2 .$$

Rovnice křivky sdružené (M_1) v souřadnicích polárních zní:

$$r^2 = \frac{c^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi} . \tag{13}$$

Obr. 2.



Křivka tato skládá se ze čtyř schodných smyček, jež se dotýkají os souřadnic v počátku souřadnic. Plocha polosmyčky p_1 je

$$p_1 = \frac{c^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi} d\varphi = \frac{c^2}{6} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \operatorname{tg}^3 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^6 \varphi} = \frac{\pi c^2}{24} ,$$

tudíž je plocha celé křivky

$$P_1 = 8 p_1 = \frac{\pi c^2}{3} .$$

Bychom blíže seznali křivku (M), vezmeme v úvahu její inversní křivku. Vezmeme počátek souřadnic za střed inverse a poloměr inverse roveň a. Pak máme:

$$r^2\varrho^2 = a^4,$$

tudíž

$$\varrho^2 = \frac{a^4}{4c^2}(\sin^2 2\varphi + 4\cos^2 2\varphi). \qquad (14)$$

Píšeme-li

$$\frac{a^4}{4c^2} = b^2, \qquad \varrho_1 = b \sin 2\varphi, \qquad \varrho_2 = 2b \cos 2\varphi, \qquad (15)$$

je

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2.$$

Rovnice první z křivek (15) je v souřadnicích rovnoběžných*)

$$(x^2 + y^2)^3 = 4b^2x^2y^2;$$

otočíme-li polárnou osu při druhé z křivek (15) o úhel $-\frac{\pi}{4}$, přejde její rovnice ve

$$\varrho_2 = 2b \sin 2\varphi.$$

Křivka druhá je tudíž zvětšená křivka první a poměr podobnosti jest

$$\varrho_2 : \varrho_1 = 2.$$

Na základě rovnic (15) můžeme snadně křivku (M) sestrojiti. Opišme dva soustředné kruhy, jež mají počátek souřadnic za svůj střed a b potažmo $2b$ za svůj poloměr. Paprsek vedený pod úhlem 2φ protíná prvý kruh v bodě B_1 a druhý kruh v bodě B_2. Rovnoběžka bodem B_1 ku ose X protíná ordinatu bodu B_2 v bodě $N(\varrho_2 \mid \varrho_1)$. Místo bodů N je patrně ellipsa

$$\left(\frac{\varrho_2}{2b}\right)^2 + \left(\frac{\varrho_1}{b}\right)^2 = 1.$$

---

*) *Loria Schütte*: Spezielle alg. und transc. ebene Curven. Lipsko, pg. 223, pg. 231, pg. 304. Jest to speciální druh scarabea zvaný corolla, též čtyrlistá rhodonea zvaný. Srovnej *Jeřábek*: O polárně reciprokých křivkách epicykloid a hypocykloid. Brno 1891.

Na symmetrále OP úhlu $AOB_2 = 2\varphi$ přeneseme od počátku O délku $ON' = ON$, tu je N' bod křivky inversní, příslušný ku polárnímu úhlu φ a na základě inverse obdržíme bod M.

β) Jaké je místo bodů (M), jež mají od sebě sdružené přímky Π vzdálenost stálou a.

Vzdálenost QM bodu M od přímky Π rovná se

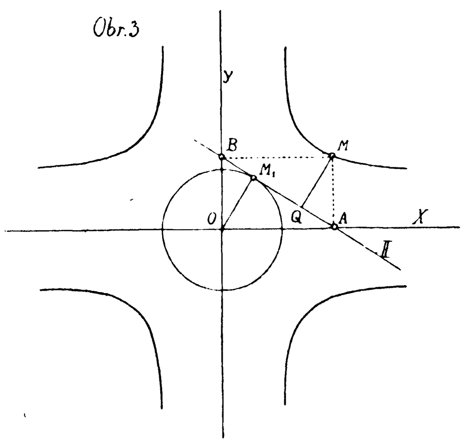
$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = a,$$

tudíž je rovnice geometrického místa*) (M) bodu M (obr. 3.)

$$(M) \equiv x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0,$$

aneb

$$x^{-2} + y^{-2} = a^{-2}. \tag{17}$$



Jelikož je $OM_1 = QM = a$, je místo bodu M_1 kruh, tudíž je i obálka přímek Π kruh**).

Rovnice křivky (M) v polárních souřadnicích zní

*) Křivka tato jmenuje se dle *Schoute-ho* „Kreuzcurve", viz *Jeřábek* l. c. pg. 5 a pg. 11. *Loria-Schütte* l. c. pg. 210, pg. 696. *La Gournerie* jmenuje ji „Trinodale harmonique".

**) Z rovnice (6) čl. 2. se to přímo obdrží.

$$r = \frac{2a}{\sin 2\varphi}, \tag{18}$$

a porovnáním s prvou z rovnic (15) vychází, že je ta křivka inversní rhodoney čtyrlisté.

γ) Provodiči sdružených bodů vyhovují relaci $OM . OM_1 = a^2$.

Jelikož je

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2,$$

$$\overline{OM}_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2},$$

je

$$\overline{OM}^2 . \overline{OM}_1^2 = x^2 y^2 = a^4,$$

tudíž je

$$(M) \equiv xy - a^2 = 0, \tag{19}$$

a tím je

$$(M_1) \equiv (x_1^2 + y_1^2)^2 - a^2 x_1 y_1 = 0. \tag{20}$$

Je-li bod $M'(x' \,|\, y')$ sdružený s bodem $M(x \,|\, y)$ hyperboly (19) na základě inverse, při čemž je kruh nad reálnou osou hyperboly kruhem inverse, je

$$x_1 = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2} = y',$$

$$y_1 = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} = x'.$$

Z rovnic těchto vychází, že je křivka (M_1) identickou se křivkou inversní hyperboly (M), t. j. (M_1) je lemniskatou, což i z rovnice (20) patrno.

Obálka (Π) přímek Π sdružených bodům křivky (M) dané rovnicí (19) je (čl. 4.)

$$a^2 uv = 1,$$

aneb

$$xy = \frac{a^2}{4}.$$

Jelikož je obecně křivka (M_1) úpatnice křivky (Π), je tedy v našem případě křivka (M_1) daná rovnicí (20) úpatnicí hyperboly (Π), vezmeme-li střed hyperboly za pol, z čehož opět shledáváme, že je (M_1) zde lemniskatou.

δ) Kdy jsou křivky (M) *a* (M_2) *ve vztahu inversním?*

V případě tom platí, je-li O střed, a poloměr kruhu inverse

$$OM \,.\, OM_2 = a^2. \tag{21}$$

Body M a M_2 leží na témž paprsku jdoucím bodem O (čl. 2.), a jelikož dle (21) platí

$$r^2 \,.\, r_2^2 = a^4,$$

tudíž je vzhledem k článku 5. rovnice křivky (M)

$$x^2 y^2 = a^2 (x^2 + y^2)$$

aneb

$$x^{-2} + y^{-2} = a^{-2}.$$

S touto křivkou setkali jsme se již ve (β) tohoto článku. Souřadnice bodu M jsou

$$x = \frac{a}{\sin\varphi}, \quad y = \frac{a}{\cos\varphi}, \tag{22}$$

a rovnice tečny bodu příslušného ku parametru φ zní:

$$x \sin^3\varphi + y \cos^3\varphi - a = 0;$$

rovnice přímky Π sdružené ku bodu M je

$$\Pi \equiv x \sin\varphi + y \cos\varphi - a = 0,$$

tudíž je obálka přímek Π

$$(\Pi) \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

tím je též $(M_1) \equiv (\Pi)$ rovno kruhu inverse a

$$(M_2) \equiv (x_2^2 + y_2^2)^3 - a^2 x_2^2 y_2^2 = 0,$$

aneb v polárních souřadnicích

$$r_2 = \frac{a}{2} \sin 2\varphi_2 = \frac{a}{2} \sin 2\varphi.$$

Jelikož je

$$\overline{OA}_1^2 + \overline{OB}_1^2 = \overline{A_1 B}_1^2 = a^2,$$

je

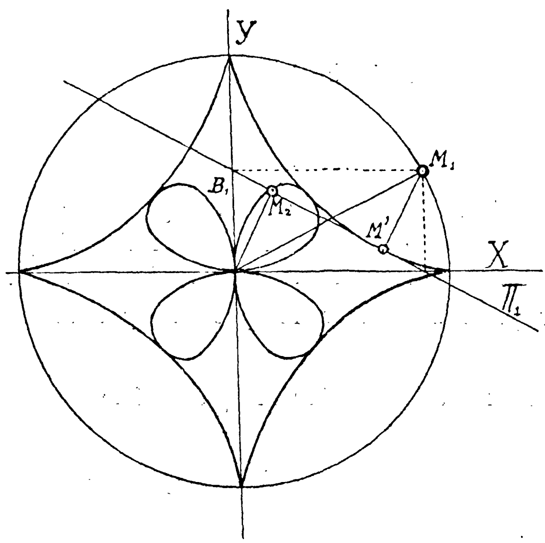
$$(\Pi_1) \equiv u^{-2} + v^{-2} - \alpha^{-3} = 0, \qquad (23)$$

kdež jsme stavili $\alpha a = 1$.

Jest tedy (Π_1) asteroida a (23) její rovnicí v tangentialných souřadnicích (obr. 4.).

Že je křivka (M_2) *čtyřlistá rhodonea* a že je úpatnicí asteroidy pro pol ve středu asteroidy, dále že je křivkou inversní od asteroidy (Π_1), vezmeme-li střed asteroidy za pol,

Obr. 4.



jsme dokázali; že je asteroida polaroreciprokou od „Kreuzcurve" vzhledem ku kruhu K_a, vychází již srovnáním rovnic (17) a (23).

Co se tkne plochy křivky (M_2) je, značí-li p plochu jednoho lístu,

$$P = 4p = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

ε) O bodech sdružených, kteréž s počátkem souřadnic určují trojúhelník stálé plochy.

Je-li a^2 dvojnásobná plocha toho trojúhelníku, je

$$a^2 = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{xy(x^2 - y^2)}{r^2},$$

tudíž je

$$(M) \equiv xy(x^2 - y^2) - a^2(x^2 + y^2) = 0,$$

aneb

$$r^2 \sin 4\varphi = 4a^2.$$

Rovnice místa bodů sdružených (M_1) je

$$y_1^4 - x_1^4 - a^2 x_1 y_1 = 0,$$

aneb v polárních souřadnicích

$$r_1^2 = -\frac{a^2}{2} \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Křivka (M) má asymptoty $x = 0$, $y = 0$, $x \pm y = 0$ a leží v prvním, třetím, pátém a sedmém oktantu, skládajíc se ze čtyř kongruentních částí; počátek souřadnic je střed křivky.

ζ) Kdy probíhá spojnice $\overline{MM_1}$ sdružených bodů pevným bodem P?

Za souřadnice u, v spojnice $\overline{MM_1}$ obdržíme

$$u = -\frac{y^3}{xy(y^2 - x^2)}, \quad v = \frac{x^3}{xy(y^2 - x^2)}.$$

Probíhá-li spojnice $\overline{MM_1}$ pevným bodem $P(x_0 \mid y_0)$, je

$$(M) \equiv y^3 x_0 + x^3 y_0 + xy(y^2 - x^2) = 0,$$

rovnice místa (M) a rovnice místa (M_1) bodů sdružených je

$$(M_1) \equiv x_1^4 - y_1^4 - (x_0 x_1^3 - y_0 y_1^3) = 0.$$

Leží-li bod P na symmetrále os souřadnice, rozpadá se místo ve symmetrálu a křivku racionálnou třetího stupně.

Leží-li bod $P(x_0 \mid y_0)$ na ose souřadnic, je (M) cissoida Diokles-ova.

Upotřebení uvedené transformace.

7. V následujícím podáme transformaci přímky na základě příbuznosti jedno-jednoznačné (1) a (3). Vyšetření transformace kuželoseček a obecné vyšetření této transformace bude předmětem zvláštního pojednání.

Transformujeme-li přímku, berouce ji za místo bodu (M) t. j. za přímku danou rovnicí

$$(M) \equiv ax + by + c = 0, \tag{24}$$

pomocí transformace (3), berouce pol transformace za počátek souřadnic, obdržíme za rovnice transformované křivky (M_1):

$$(M_1) \equiv (x_1^2 + y_1^2)(ay_1 + bx_1) + cx_1y_1 = 0, \tag{25}$$

tudíž cirkulární racionální kubickou křivku, která má dvojný bod v počátku souřadnic a osy souřadnic za tečny bodu dvojného.

Tato křivka je zobecnělá strophoida a co takovou zváti ji budeme *strophoidalou.* V případě, že je $a = b$, obdržíme obyčejnou strophoidu.

Kdyby bylo buď a neb b rovno nulle, je (M_1) kruh, jenž se dotýká dané přímky (M) a osy souřadnicové rovnoběžné s tou přímkou a prochází polem transformace O.

Kdyby bylo $c = 0$, je (M_1) přímkou symmetrickou s přímkou (M) vzhledem k symmetrále onoho úhlu os souřadnic, ve kterém daná přímka leží.

Konstrukce strophoidaly.

8. Jednoduchá konstrukce strophoidaly plyne na základě příbuznosti definované rovnicemi (3).

Vedeme totiž bodem M přímky (M) rovnoběžky s osami souřadnic. Na spojnici průseků jejich s osami spusťme z počátku souřadnic kolmici. Pata M_1 té kolmice je bodem strophoidaly,

Vytneme-li si přímku (M) a tečny dvojného bodu jako osy ouřadnicové, je tím strophoidala úplně dána; naopak lze ku každé strophoidale určiti přímku (M), ku kteréž je strophoidala sdružená.

9. Z rovnice (25) plyne, že můžeme, jak známo, *strophoidalu* považovati za *inversní křivku hyperboly*, neb rovnice strophoidaly v polárních souřadnicích je

$$r = -\frac{c \sin \varphi \cos \varphi}{a \sin \varphi + b \cos \varphi},$$

tudíž je rovnice křivky inversní

$$r = -\frac{k^2}{c}\left(\frac{a}{\cos \varphi} + \frac{b}{\sin \varphi}\right),$$

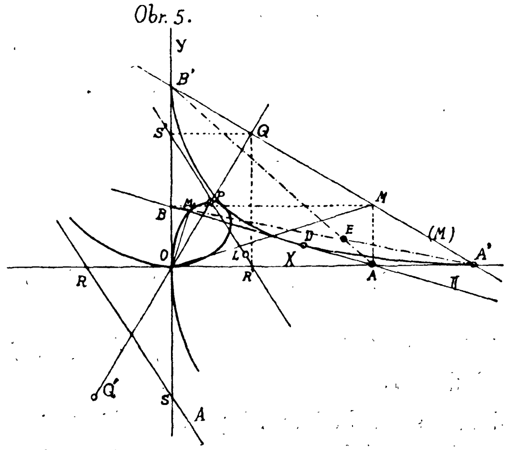
aneb

$$cxy + k^2 (ay + bx) = 0,$$

vezmeme-li dvojný bod strophoidaly za střed inverse a poloměr kruhu inverse rovný k.

10. Z konstrukce strophoidaly jako křivky sdružené ku přímce (M) vychází, že je *strophoidala úpatnice obálky přímek* $\Pi\left(-\frac{1}{x}, -\frac{1}{y}\right)$, tedy přímky

Obr. 5.



$$\Pi \equiv \frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{y} - 1 = 0,$$

opisuje-li bod $M(x \mid y)$ přímku (M). Rovnice obálky přímek Π zní;

$$(a\xi + b\eta + c)^2 - 4ab\xi\eta = 0, \tag{26}$$

a to je rovnice paraboly, již můžeme též psáti:

$$(-a\xi + b\eta + c)^2 - 4ac\xi = 0. \tag{27}$$

Je tedy *strophoidala úpatnice paraboly* (*Π*), vezmeme-li počátek souřadnic za pol. Z rovnice (27) vysvítá, že je směr osy paraboly dán přímkou

$$-ax + by = 0,$$

a z rovnice (26) plyne, že se tu parabola dotýká tečen dvojného bodu strophoidaly v bodech, v nichž přímka (*M*) je protíná.

Další konstrukce strophoidaly jako cissoidaly.

11. V předcházejícím podali jsme jednoduchou konstrukci strophoidaly na základě kubické příbuznosti s přímkou; poukázali jsme na strophoidalu jako na inversní křivku hyperboly, a seznali jsme, že je též úpatnicí paraboly. V následujícím ukážeme, že lze každou strophoidalu považovati za cissoidalu a co takovou ji konstruovati. Vezmeme-li za základní kuželosečku

$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + dx + ey = 0$$

a za přímku

$$P \equiv mx + ny + p = 0,$$

je rovnice cissoidaly*)

$$(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2)(mx + ny + p) \\ - (mx + ny)(dx + ey) = 0. \tag{28}$$

By ta cissoidala byla strophoidalou, třeba, by bylo

$$b_1 = 0, \quad a_1 = c_1.$$

Stavíme-li tudíž $a_1 = 1$, což se shoduje tím, že si myslíme

---

*) Časopis jedn. česk. mathematiků, Praha. II. ročník, pg. 183.

rovnici základní kuželosečky dělenou faktorem a_1, bude rovnice cissoidaly v tomto případě

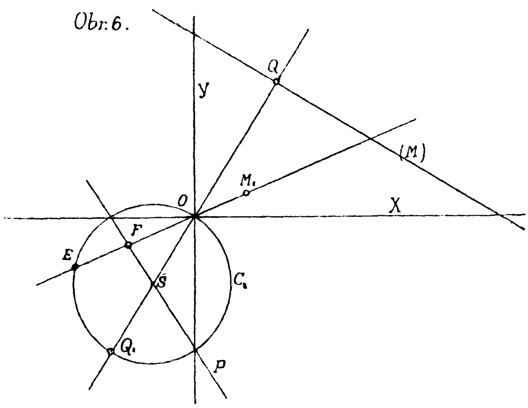
$$(x^2 + y^2)(mx + ny + p) - (mx + ny)(dx + ey) = 0. \quad (29)$$

Srovnáme-li nyní tuto rovnici s rovnicí strophoidaly (25), shledáme, že se úplně shodují, je-li

$$m = b, \quad n = a, \quad p = md = ne, \quad me + nd = -c,$$

tudíž je:

$$\begin{aligned} d &= -\frac{ac}{a^2+b^2}, \quad e = -\frac{bc}{a^2+b^2}, \\ m &= b, \quad n = a, \quad p = -\frac{abc}{a^2+b^2}. \end{aligned} \quad (30)$$



Bychom vytvořili strophoidalu jako cissoidalu, třeba tudíž vzíti

$$\begin{aligned} C_2 &\equiv x^2 + y^2 - \frac{ac}{a^2+b^2}x - \frac{bc}{a^2+b^2}y = 0, \\ P &\equiv bx + ay - \frac{abc}{a^2+b^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Přímka C probíhá středem základní kuželosečky P_2. Je-li Q pata kolmice z počátku souřadnic na přímku (M) spuštěné, a Q_1 bod symmetrický s bodem Q vzhledem k počátku souřadnic O, je přímka P bodu Q_1 sdružená dle téže příbuznosti, jako je přímka Π sdružená k bodu M. Tím lze přímku P snadně sestrojiti. Střed kruhu C_2 půlí délku OQ_1. Tím je jak kruh C_2 tak i přímka P určená a tudíž i konstrukce strophoidaly jako cissoidaly daná.

Sestrojení tečny strophoidaly.

12. Jelikož je strophoidala úpatnice paraboly (Π) pro počátek O jako pol, obdržíme snadnou konstrukci tečny bodu M_1 strophoidaly. Bodu M_1 přísluší přímka Π jako kolmice na $\overline{OM_1}$ v bodě M_1, a jelikož je strophoidalou (M_1) daná též přímka (M), jsou mimo tečnu Π paraboly též tečny X, Y s jejími body styku A', B' dané. Dle věty Pascala protíná spojnice bodu $E \equiv \overline{A'B} . \overline{AB'}$ s bodem O tečnu Π v jejím bodě dotyku D. Je-li nyní L střed délky $\overline{OD}$, je, jak obecně pro úpatnice platí, LM_1 normálou strophoidaly v bodě M_1 a tím je též tečna toho bodu dána.

Asymptota reálná strophoidaly a její vztah ku přímce (M).

13. Rovnice reálné asymptoty strophoidaly je

$$b\,(a^2 + b^2)\,x + a\,(a^2 + b^2)\,y - abc = 0 \tag{32}$$

a rovnice obou imaginárných asymptot jsou

$$\left(ax + by + \frac{c}{2}\right) \pm i\,(bx - ay) = 0.$$

Imaginárné asymptoty protínají se na strophoidále v reálném bodě P, jehož souřadnice jsou

$$\xi = -\frac{ac}{2\,(a^2 + b^2)}, \quad \eta = -\frac{bc}{2\,(a^2 + b^2)}. \tag{33}$$

Je-li bod $M'(x' \mid y')$, jemuž je přímka (M) co přímka (Π) sdružená, je

$$x' = -\frac{c}{a}, \quad y' = -\frac{c}{b};$$

tím můžeme souřadnice bodu P, jejž jmenujeme *polem* strophoidaly, psáti

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{x'y'^2}{x'^2 + y'^2}, \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{x'^2y'}{x'^2 + y'^2}. \tag{34}$$

Srovnáme-li rovnice (34) a (1), shledáváme, že pol P půl kolmici OQ z počátku souřadnic na přímku (M) spuštěnou; tím je i sestrojení polu dáno.

14. Jsou-li $u_1 \mid v_1$ souřadnice reálné asymptoty a $u \mid v$ souřadnice přímky (M), je

$$u_1 = -\frac{a^2 + b^2}{ac}, \quad v_1 = -\frac{a^2 + b^2}{bc},$$

$$u = \frac{a}{c}, \quad v = \frac{b}{c}.$$

tudíž je

$$u_1 = -\frac{u^2 + v^2}{u}, \quad v_1 = -\frac{u^2 + v^2}{v},$$

z čehož opět plyne

$$u = -\frac{u_1 v_1^2}{u_1^2 + v_1^2}, \quad v = -\frac{u_1^2 v_1}{u_1^2 + v_1^2}. \tag{35}$$

Mezi přímkou (M) a reálnou asymptotou příslušné strophoidaly platí analogická příbuznost, jako mezi body M_1 a M, kteráž by se shodovala i co do znaménka, kdybychom místo asymptoty vzali souměrnou ji přímku vzhledem k počátku souřadnic.

15. Srovnáme-li rovnici reálné asymptoty s rovnicí (31) přímky P článku 11., shledáváme, že je ta přímka asymptotou. Konstrukce přímky P podaná v článku 11. je tedy současně konstrukcí reálné asymptoty.

16. Mysleme si, že přímka (M) probíhá pevným bodem $M_0 (\alpha \mid \beta)$, že tudíž platí relace

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \tag{36}$$

pak můžeme rovnice (33) psáti:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{a(a\alpha + b\beta)}{a^2 + b^2}, \quad \eta = \frac{b}{a} \xi. \qquad (37)$$

Otáčí-li se přímka (M) kolem bodu M_0, obdržíme rovnici místa polu P, vyloučíme-li z rovnic (37) proměnlivou směrnici $-\frac{a}{b}$, totiž

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{2}(\alpha\xi + \beta\eta) = 0,$$

kterýžto výsledek je i geometricky patrný, neb je-li C střed délky $\overline{OM_0}$, je $PC \parallel QM_0$, tím je $\sphericalangle OPC = 90^0$; délku OC vidíme z polu P pod pravým úhlem, místo bodu P je tudíž kruh nad OC jako průměrem sestrojený.

17. Otáčí-li se přímka (M) kolem bodu $M_0(\alpha \mid \beta)$, vyhovují souřadnice její rovnici

$$u\alpha + v\beta + 1 = 0,$$

a dle příbuznosti mezi přímkou (M) a asymptotou A vyjádřenou rovnicemi (35) obalují reálné asymptoty příslušných strophoidal křivku

$$u_1 v_1 (\alpha v_1 + \beta u_1) - (u_1^2 + v_1^2) = 0,$$

tedy racionální křivku třetí třídy a čtvrtého stupně.

Poznámka k problému normál u ellipsy.

Napsal

Vilém Jung,

professor c. k. státní průmyslové školy v Praze.

Body q_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ ellipsy E, jimiž procházejí její normály vedené libovolným bodem $p(x_1, y_1)$ v její rovině, stanoví se jednoduše jako průsečíky dané ellipsy E s jistou rovnoramennou hyperbolou H, jež se zove *Apolloniovou.*

Je-li velká osa dané ellipsy osou úseček X a malá její