Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Osvětlení centrálné a geometrálné koule

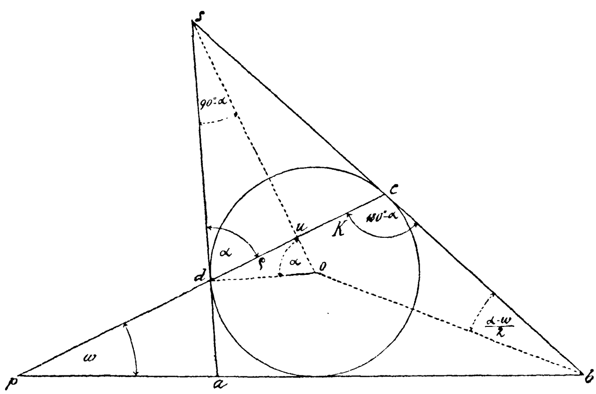
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 2, 173--177

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120938

Osvětlení centrálné a geometrálné koule.

Podává
Václav Hübner,
professor na Král. Vinohradech.

Koule o poloměru r nechť spočívá na rovině průmětné. Svítící bod s mějž od středu koule o vzdálenost $\overline{so} = v$. Paprsky vycházející z bodu s a dotýkající se plochy kulové vyplňují rotační plochu kuželovou, jež dotýká se plochy kulové



podél kružnice K o poloměru ϱ; rovina této kružnice jest kolmá ku $\overline{so}$. Stopy paprskové plochy kuželové (s K) na průmětně omezují vržený stín plochy kulové.

Značí-li úhel α odchylku přímek povrchových plochy kuželové od roviny kružnice K, úhel ω odchylku roviny kružnice K od roviny průmětné, a, b poloosy ellipsy (vrženého stínu) a $m = \overline{sb}$ úsek vzniklý průmětnou na přímce obrysové, jest, jak vidno z obrazce,

$$\text{(1)} \qquad \sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha = \frac{r}{v},$$

čímž stanoven úhel α.

Odchylku ω určíme z $\triangle\, sob$. Dle věty sinové jest

$$v : m = \sin\frac{\alpha - \omega}{2} : \cos\frac{\alpha + \omega}{2}.$$

Jest totiž z $\triangle\, pbc$,

$$\sphericalangle\, pbc = 180^0 - (180^0 - \alpha + \omega) = \alpha - \omega$$

a

$$\sphericalangle\, sob = 180^0 - \left(\frac{\alpha - \omega}{2} + 90^0 - \alpha\right) = 90^0 - \frac{\alpha + \omega}{2}.$$

Pročež

$$v \cos\left(\frac{\alpha + \omega}{2}\right) = m \sin\frac{\alpha - \omega}{2},$$

nebo

$$v \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\omega}{2} - v \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\omega}{2}$$

$$= m \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\omega}{2} - m \sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

t. j.

$$\cos\frac{\omega}{2}\left(v\cos\frac{\alpha}{2} - m\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\omega}{2}\left(v\sin\frac{\alpha}{2} - m\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

a

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{v\cos\frac{\alpha}{2} - m\sin\frac{\alpha}{2}}{v\sin\frac{\alpha}{2} - m\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{v - m\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{v\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - m}.$$

Ježto

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{v - r}{v + r}},$$

jest

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\frac{v\sqrt{v+r}-m\sqrt{v-r}}{v\sqrt{v-r}-m\sqrt{v+r}},$$

čímž určen úhel ω.

Poloměr $\varrho=\overline{ud}$ kružnice K určí se z rovnice

$$\varrho^2=\overline{ou}\,.\,(v-\overline{ou})=\sqrt{r^2-\varrho^3}\,(v-\sqrt{r^2-\varrho^2}),$$

z čehož

$$\varrho=\frac{r}{v}\sqrt{v^2-r^2}.$$

Poloosy ellipsy (vrženého stínu) jsou dány rovnicemi:

$$a=\frac{m\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha-\omega)},\quad b=m\cos\alpha\sqrt{\frac{\sin(\alpha+\omega)}{\sin(\alpha-\omega)}}.$$

(Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky roč. XXXII str. 408, 409.)

Plocha vrženého stínu

$$V=\pi\,\frac{m^2\sin\alpha\cos^2\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\omega)}}{\sin(\alpha-\omega)\sqrt{\sin(\alpha-\omega)}}.$$

Důsledky

I. Je-li $m=\infty$, t. j. $\overline{sb}\,||\,\overline{ab}$, jest z rovnice (2)

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\frac{\frac{v}{m}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\frac{v}{m}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

pročež $\omega=\alpha$.

Vrženým stínem na průmětnu jest parabola.

II. Je-li $\omega=0$, jest

$$a=b=m\cos\alpha=m\frac{r}{v};$$

vrženým stínem jest kruh. Úsek m určí se z rovnice (3). Jest totiž při dané podmínce $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = 0$, z čehož

$$m = v\sqrt{\frac{v+r}{v-r}} \quad \text{a} \quad a = b = r\sqrt{\frac{v+r}{v-r}}.$$

Plocha stínu vrženého

$$V = \pi r^2 \frac{v+r}{v-r}.$$

III. Je-li $\omega = 90^0$, jest z rovnice (2) $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = 1$, t. j.

$$v - m\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = v\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - m,$$

z čehož

$$m = \frac{v\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 1} = -v.$$

Úsek m jest tedy na opačné straně.

Poloosy jsou

$$a = v\sin\alpha, \qquad b = iv\cos\alpha.$$

Poloosa b stala se imaginární, z čehož soudíme, že vržený stín na průmětnu jest hyperbola.

Při osvětlení centrálním jest vržený stín elliptický, je-li $\alpha > \omega$; je parabolický, je-li $\alpha = \omega$, a hyperbolický, je-li $\alpha < \omega$.

Je-li $v = \infty$, jest osvětlení geometrální.

Z rovnice (1) jest $\cos\alpha = 0$ a $\alpha = 90^0$; rotační plocha kuželová přechází v rotační plochu válcovou.

Poměr $\frac{b}{a} = \cos\omega$, ježto $2r = \overline{ab}\cos\omega$ a $\overline{ab} = 2a$, jest

$a = \frac{r}{\cos\omega}$ a $b = r$.

Důsledky.

I. Dopadá-li paprsek v úhlu 30° k průmětně, jest $\sphericalangle \omega = 60^0$ a plocha stínu vrženého

$$V = \pi ab = \frac{\pi r^2}{\cos \omega} = 2\pi r^2,$$

t. j. plocha stínu vrženého rovna jest ploše stínu vlastního (polokoule).

II. Dopadne-li paprsek na průmětnu v úhlu 45°, jest i $\sphericalangle \omega = 45^0$ a plocha stínu vrženého

$$V = \pi r^2 \sqrt{2}.$$

III. Dopadá-li paprsek kolmo na průmětnu, jest $\sphericalangle \omega = 0$, $a = b = r$, pročež $V = \pi r^2$, t. j. plocha vrženého stínu rovna jest ploše hlavního kruhu na kouli.

Má-li plocha stínu vlastního při osvětlení geometrálném rovna býti obecně $\frac{1}{n}$ plochy stínu vrženého, musí býti

$$2\pi r^2 = \frac{1}{n} \frac{\pi r^2}{\cos \omega}, \quad \text{t. j.} \quad \cos \omega = \frac{1}{2n}$$

a odchylka paprsku od průmětny $= 90^0 - \omega$.

Odvození některých vět trigonometrických.

Podává

Václav Hübner,
professor na Král. Vinohradech.

V $\triangle\, abc$ sestrojme na př. osu úhlu γ a promítneme všechny strany jeho do této osy, tu jest z obrazce

$$\overline{ca_1} + \overline{a_1 b_1} = \overline{cb_1},$$

nebo učiníme-li $\overline{bd} \,||\, \overline{b_1 a_1}$