Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 2, 202--208

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120937

děna periferická místa kolem žluté skvrny, kde tělísek tyčinkovitých jest hojnost.

Lummer uznává sám, že supponovaný optický klam zrakový naprosto nedostačuje k vysvětlení úkazů *Blondlotových*, ale vede k tomu, aby pozorování francouzských badatelů byla přijímána s náležitou opatrností a rozvahou. Bylo by si přáti v zájmu věci samé, aby učenci francouzští úplněji a zevrubněji uspořádání pokusů popsali, nebo jiným učencům osobně demonstrovali; pak bude teprve možno rozhodnouti otázku existence N-paprsků definitivně.

Úlohy.

Úloha 17.

Jest dokázati, že po všemožném zkrácení neobsahuje jmenovatel zlomku $\frac{a^{b-1}}{b!}$ *žádného činitele obsaženého v a. Při tom jsou a a b dvě libovolná čísla celá. Ku př.* $\frac{6^7}{8!} = \frac{3^5}{5 \cdot 7}$.

Em. Schönbaum.

Úloha 18.

Jest ustanoviti nejmenší čísla positivná tvaru $n = 2^\varrho \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots$, *kdež* $p_1, p_2, p_3 \ldots$ *značí vesměs různé liché prvočinitele, tak, aby součet jich dělitelů byl roven dvojnásobnému, trojnásobnému, pětinásobnému číslu n.*

Em. Schönbaum.

Úloha 19.

Jak veliká jest pravděpodobnost, že dvě čísla jsou relativními prvočísly (že nemají spol. dělitele).

Em. Schönbaum.

Úloha 20.

Vzorce (Studnička, Funkce monoperiodické, str. 100)

$$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4 x - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6 x + \ldots,$$

(n *sudé*);

$$\sin nx = n\sin x - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3 x + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 x - \ldots.$$

(n *liché*)

jest přetvořiti tak, aby výrazy pro $2\cos nx$, $2\sin nx$ *postupovaly dle mocnin výrazu* $(2\sin x)$ *a o koeficientech na pravé straně jest pak dokázati, že jsou celými čísly.*

Em. Schönbaum.

Úloha 21.

Dokázati, že žádné číslo kmenné (prvočíslo) větší nežli 5 nelze uvésti na tvar $N = m^4 + 4n^4$.

Dr. *M. Haas.*

Úloha 22.

Kolik řešení poskytují rovnice

$$a(x+\alpha)^{n+1}(y+\alpha)^n + b(x+\beta)^{n+1}(y+\beta)^n + c(x+\gamma)^{n+1}(y+\gamma)^n = 0,$$
$$a(x+\alpha)^n(y+\alpha)^{n+1} + (bx+\beta)^n(y+\beta)^{n+1} + c(x+\gamma)^n(y+\gamma)^{n+1} = 0.$$

Dr. *M. Haas.*

Úloha 23.

Dokažte, že

$$\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n_n}$$

jest rovno 0, jestliže n *liché; jestliže pak* n *sudé, že jest tento výraz roven* $\frac{2(n+1)}{n+2}$. *Při tom jest* n_k *binomický součinitel;* $n_k = \binom{n}{k}$.

r.

Úloha 24.

Výraz

$$\binom{n}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}-\binom{n-3}{3}+\cdots+(-1)^k\binom{n-k}{k}$$

kde k jest největší celé číslo obsažené v $\frac{n}{2}$, jest rovný buď 1, aneb 0, anebo konečně -1. Dokázati to a ustanoviti, pro která n jednotlivé z těchto tří případů nastávají.)*

r.

Úloha 25.

Dokázati, že výraz

$$\cos^2(\alpha-\varphi)+\cos^2(\beta-\varphi)-2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\varphi)$$

jest nezávislý na φ. S výhodou lze při důkaze použiti úvahy geometrické.

r.

Úloha 26.

Paty výšek v trojúhelníku ABC jsou vrcholy trojúhelníka $A'B'C'$. Ustanoviti jest úhly trojúhelníka $A'B'C'$ z úhlů trojúhelníka ABC a to i planimetricky i pomocí trigonometrie.

Učitel *Frant. Jiršák* v Dobřenicích.

Úloha 27.

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojeny jsou trojúhelníky $AC'B$, $BA'C$, $CB'A$; mezi úhly těchto tří trojúhelníků jsou pak tyto vztahy:

$\sphericalangle CAB' = \sphericalangle C'AB$, $\sphericalangle ABC' = \sphericalangle A'BC$, $\sphericalangle BCA' = \sphericalangle B'CA$.

Dokázati jest, že přímky AA', BB', CC' se protínají v jednom bodě.

r.

---

*) Příslušné výsledky uvedeny jsou v pojednání *M. D.' Ocagneově*, „Mémoire sur les suites recurrentes", Journal de l'école polytechnique, 64. sešit r. 1894, str. 167., jakožto důsledek jistých obecných úvah; jich odvození přímé, úlohou žádané, jest rovněž zcela jednoduché

Úloha 28.

Sestrojíme-li nad stranami čtyřúhelníka $ABCD$, jakožto základnami, trojúhelníky rovnoramenné s pravým úhlem při vrcholu (a to buď všecky trojúhelníky na vnější stranu čtyřúhelníka anebo všechny trojúhelníky na vnitřní stranu), jsou vrcholy těchto trojúhelníků vrcholy čtyřúhelníka, jehožto úhlopříčky jsou stejny a stojí k sobě kolmo. r.

Úloha 29.

*Sestrojíme-li nad stranami trojúhelníka, jakožto základnami, trojúhelníky rovnoramenné s úhlem 120 stupňů při vrchole a to všecky trojúhelníky buď na zevnější stranu anebo všechny na vnitřní stranu daného trojúhelníka, jsou vrcholy těchto trojúhelníků vrcholy trojúhelníka rovnostranného; dostáváme pak tak dva trojúhelníky rovnostranné.**) *Jestiže ω jest úhel, který svírá strana jednoho z těchto rovnostranných trojúhelníků s jednou stranou druhého trojúh. rovnostr., jest mezi ω a stranami původního trojúhelníka a, b, c vztah:*

$$tg\, 3\,\omega = 3\sqrt{3}\,\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2 - 2\,c^2)(c^2 + a^2 - 2\,b^2)(b^2 + c^2 - 2\,a^2)}.$$

Tento vztah jest dokázati. r.

Úloha 30.

Budiž O střed a r poloměr kruhu opsaného trojúhelníku ABC. Na obvodě kruhu s týmž středem O a o poloměru R zvolme si libovolně bod M. Paty kolmic z tohoto bodu spuštěných na strany trojúhelníka BC, CA, AB buďtež A_1, B_1, C_1. Jest dokázati, že plocha trojúhelníka $A_1 B_1 C_1$ jest nezávisla na poloze bodu M na kruhu a že jest rovna

$$\pm \frac{1}{2}(r^2 - R^2) \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\,,$$

kde α, β, γ jsou úhly trojúhelníka ABC. r.

---

*) Viz článek *J. Langrův* v 1. čísle přílohy časop. pro pěst. m. a f.

Úloha 31.

Budiž M bod na obvodě kruhu opsaného trojúhelníku ABC a nechť značí d_A, d_B, d_C vzdálenosti tohoto bodu od bodů A, B, C; d pak vzdálenost téhož bodu od příslušné Simpsonovy přímky) a r poloměr opsaného kruhu. Jest dokázati vztah*

$$d = \frac{d_A \, . \, d_B \, . \, d_C}{4 r^2}.$$

r.

Úloha 32.

Válec o výšce v a jehož podstava má poloměr r, má stejný povrch a obsah jako přímý kužel. Jak veliká jest výška a poloměr podstavy tohoto kužele? ($v = 4$, $r = 5$).

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Úloha 33.

*Středem podobnosti dvou daných kruhů (O, OM**), (O_1, O_1M_1) vedený paprsek nechť protíná kruhy tyto v bodech podobně položených M, M_1. Rovnoběžka vedená bodem M_1 ku OO_1 nechť seče kolmici MQ s bodu M na OO_1, spuštěnou v bodu P. Jaké jest geometrické místo bodu tohoto?*

Řed. *V. Jeřábek.*

Úloha 34.

*Krajní body M, N průměru kruhu (ω, b)***) promítají se s daného bodu A na průměr x kolmý ku MN do bodů M_1, N_1. Body těmito vedené rovnoběžky s MN protínají kruh (ω, b)*

---

*) Spustíme-li z bodu M ležícího na obvodě kruhu opsaného trojúhelníku ABC kolmice na strany tohoto trojúhelníka, jsou paty těchto kolmic v jediné přímce. Tato přímka sluje *Simpsonova* přímka příslušná ku M a k trojúhelníku ABC. Viz článek *A. Strnada* „O přímce Simsonově", Čas. pro pěst. math. a fys., roč. XV. str. 114 a tamže na str. 125 „Drobné zprávy" téhož autora. Srovnej ostatně úlohu 30.

**) Značí kruh, jehož středem jest O a poloměrem OM.

***) Značí kruh, jehož střed jest ω a poloměr b.

v bodech P, P_1; Q, Q_1. *Jaké jest geometrické místo bodů těchto, šine-li se střed* ω *při daném poloměru* b *po přímce* x?

Řed. *V. Jeřábek.*

Úloha 35.

Dokázati jest, že trojúhelníky ellipse opsané a mající těžiště ve středu ellipsy mají stejný ploský obsah. Tento ploský obsah jest nejmenší ze všech ploských obsahů trojúhelníků ellipse opsaných tak, že ellipsa jest uvnitř těchto trojúhelníků.

Dr. *M. Haas.*

Úloha 36.

Které křivky zobrazují v pravoúhlé soustavě souřadnic rovnici

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c,$$

$|c|<1$.

Dr. *M. Haas.*

Vypsání cen za řešení úloh.

Výbor Jednoty českých mathematiků usnesl se, aby za správná řešení úloh v „*Příloze*“ uveřejněných uděleny byly *studujícím středních škol* ceny tyto:

1. Ceny první:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. V.
Bellavitis-Zahradník: Methoda equipollencí.
Studnička: Úvod do nauky o determinantech.
Valouch: Přehled mathematiky.

2. Ceny druhé:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. V.
Cremona-Weyr: Úvod do geometrické theorie křivek rovinných

Machovec: Zobrazování tečen a středů křivosti křivek.
Zahradník: O determinantech.

3. Ceny třetí:

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. V.
Jarolímek: Deskriptivní geometrie, I.—III. díl.
Jelínek: Početní úkoly tělesoměrné.
Studnička: Výklady o funkcích monoperiodických neboli o nižších funkcích transcendentních.

Ceny *první* obdrží 10 řešitelů za správné a nejlepší řešení co nejvyššího počtu úloh; z ostatních řešitelů obdrží dle počtu a dokonalosti řešení 15 řešitelů ceny *druhé* a dalších 20 řešitelů ceny *třetí*.

Řešení buďtež zaslána nejdéle do 15. dubna 1905.

Připomenutí. Pp. řešitelé se žádají, aby zasílali řešení úloh psaná na čtvrtkách obyčejného formátu a každou čtvrtku, *obsahující pouze řesení jediné úlohy*, aby opatřili svým podpisem.