Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Rozmanitosti mathematické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 2-3, 234--243

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120926

s a t procházeti bodem P a jejich průměty bodem P_1. Tím jest pro kružnici dokázána věta Brianchonova, jež zní:

„V šestiúhelníku kružnici opsaném procházejí spojnice protějších vrcholů jediným bodem.“

Přímky a, b, c, d, e a f lze také jinak seskupiti. Proložíme jimi roviny $\gamma \equiv (a, b)$, $\vartheta \equiv (b, c)$, $\iota \equiv (c, d)$, $\varkappa \equiv (d, e)$, $\lambda \equiv (e, f)$ a $\mu \equiv (f, a)$. Průsečnice z rovin γ a $\varkappa$ prochází průsečíky X přímek a a d a Y přímek b a e, průsečnice $x \equiv (\vartheta, \lambda)$ průsečíky $Y \equiv (b, e)$ a Z přímek c a f a průsečnice $y \equiv (\iota, \mu)$ průsečíky $Z \equiv (c, f)$ a $X \equiv (a, d)$. Tyto tři průsečnice tvoří tedy trojúhelník XYZ a stopy jejich T, R a S musí ležeti na stopě p roviny tohoto trojúhelníka. Ve stopách těch protínají se stopy rovin, jež se v průsečnicích z, x a y protínají, totiž $T \equiv (p_1^\gamma, p_1^\varkappa)$, $R \equiv (p_1^\vartheta, p_1^\lambda)$ a $S \equiv (p_1^\iota, p_1^\mu)$, kdež jsou stopy rovin dány spojnicemi stop přímek roviny určujícími: $p_1^\gamma \equiv \overline{AB}$, $p_1^\vartheta \equiv \overline{BC}$, $p_2^\iota \equiv \overline{CD}$, $p_1^\varkappa \equiv \overline{DE}$, $p_1^\lambda \equiv \overline{EF}$ a $p_1^\mu \equiv \overline{FA}$. Tím jest dokázána věta Pascalova pro kružnici:

„V šestiúhelníku do kružnice vepsaném protínají se protější strany v bodech přímky.“

Poněvadž můžeme každou kuželosečku považovati za centrální průmět kružnice (Pithardt-Seifert, VI. a VII. R. str. 37., VI. Rg. str. 58.) a poněvadž se průsečíky přímek a spojnice bodů opět promítají v průsečíky a spojnice příslušných průmětů, platí obě věty pro každou kuželosečku:

V šestiúhelníku kuželosečce opsaném procházejí spojnice protějších vrcholů jediným bodem. (Věta Brianchonova.)

V šestiúhelníku kuželosečce vepsaném protínají se protější strany na jedné přímce. (Věta Pascalova.)

Rozmanitosti mathematické.

Podává studujícím školní rada **Václav Hübner** na Král. Vinohradech.

I.

Budiž dán úhel $oac = \alpha$; spojnici $\overline{oc}$ zvolme za osu x-ovou a rameno $ao \perp oc$ za osu y-ovou. Sestrojme svazek paprsků o středu a a na každý paprsek nanesme od průsečíku jeho s osou x úsečky stálé délky $a = 2\overline{ac}$.

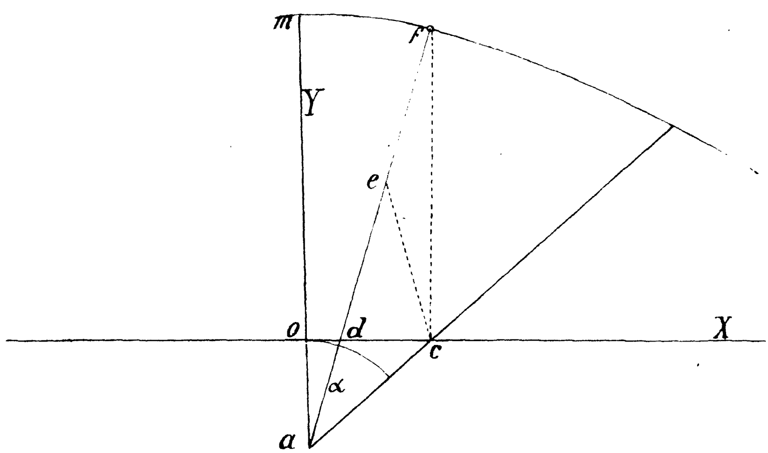
Geometrické místo koncových bodů nanesených úseček jest křivka zvaná konchoida Nikomedeova (konchoida přímky) *n.* lasturnice.

Rovnice konchoidy.

Souřadnice lib. bodu f buďtež $x = \overline{oc}$, $y = \overline{cf}$, úsečky $\overline{oa} = b$, $\overline{df} = a = 2\overline{ac}$, $\overline{ad} = n$, $\overline{od} = m$. Z podobnosti $\triangle$ *oad* a $\triangle$ *dcf* plyne:

$$\overline{cf} : \overline{df} = \overline{oa} : \overline{ad} \ldots y : a = b : n. \tag{1}$$

$$\overline{cf} : \overline{dc} = \overline{oa} : \overline{od} \ldots y : (x - m) = b : m. \tag{2}$$



Obr. 1.

Z $\triangle$ *oad* jest

$$\overline{od}^2 = \overline{ad}^2 - \overline{oa}^2 \ldots m^2 = n^2 - b^2. \tag{3}$$

Určíme-li z rovnice (1), (2) m a n a dosadíme-li do rovnice (3), obdržíme

$$\frac{b^2x^2}{(b+y)^2} = \frac{a^2b^2}{y^2} - b^2,$$

nebo

$$\frac{x^2y^2}{(b+y)^2} + y^2 = a^2,$$

nebo

$$y^4 + 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)\, y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0.$$

Dělíme-li tuto rovnici y^2, jest

$$x^2 + b^2 - a^2 + 2by + y^2 - \frac{2a^2b}{y} - \frac{a^2b^2}{y^2} = 0$$

a

$$x^2 = \frac{a^2(y+b)^2 - y^2(y+b)^2}{y^2},$$

tudíž

$$x = \pm \frac{b+y}{y}\sqrt{a^2-y^2} . = \pm\left(\frac{b}{y}+1\right)\sqrt{a^2-y^2}.$$

Křivka jest tudíž souměrná dle osy y.

Vyšetříme-li $\frac{dx}{dy}$ pro hořejší znaménko, obdržíme:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{b\sqrt{a^2-y^2}}{y^2} - \frac{b+y}{\sqrt{a^2-y^2}} = -\frac{y^3+a^2b^2}{y^2\sqrt{a^2-y^2}}$$

a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{y^3+a^2b^2},$$

t. j. směrnice tečny v libovolném bodě křivky.

Důsledky: 1. Je-li $x = 0$, pak $y = a$ (bod m). Směrnice tečny jest $\frac{dy}{dx} = 0$, t. j. tečna v bodě m sestrojena jest || s osou X (nejvyšší bod — vrchol).

2. Je-li $y = 0$, pak $x = \infty$ a směrnice tečny jest opět $= 0$, t. j. bod leží na ose X v ∞ a osa X jest tudíž asymptotou křivky.

Připomenutí. Ježto možno nanášeti stálou délku $a = \overline{2ac}$ oběma smysly od průsečíku každého paprsku, má konchoida dvě nekonečné větve na různých stranách osy X.

Rozdělení úhlu α na tři stejné části.

Sestrojme $\overline{cf} \perp \overline{oc}$ (f jest na konchoidě), spojme f s vrcholem a úhlu α, pak jest $\sphericalangle\, oaf = \frac{1}{3}\alpha$.

Spojíme-li bod e (střed úsečky $\overline{df}$) s bodem c, jest z $\triangle$ pravoúhlého dcf: $\overline{dc} = \overline{ef} = \overline{ec}$ (poloměry opsané kružnice); ježto $\overline{df} = 2\overline{ac}$, jest $\overline{de} = \overline{ef} = \overline{ec} = \overline{ac}$ a $\triangle$ ace jest rovnoramenný, tudíž $\sphericalangle\, caf = \sphericalangle\, aec$.

Úhel aec jest však vnějším úhlem $\triangle$ rovnoramenného cef, pročež $\sphericalangle\, aec = 2 \sphericalangle\, afc$, čili $\sphericalangle\, caf = 2 \sphericalangle\, afc$; ježto $\sphericalangle\, \alpha$

$= \sphericalangle oaf + \sphericalangle fac$ a $\sphericalangle afc = \sphericalangle oaf$ jest $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle afc + \sphericalangle fac$ $= \sphericalangle afc + 2afc = = 3 \sphericalangle afc$, pročež $\sphericalangle afc = \sphericalangle oaf = \frac{1}{3}\alpha$. Nikomedes, matematik alexandrinský, ukázal, že konchoidou řešiti lze rozdělení úhlu na tři rovné části.

II.

Jestliže se kružnice K_1 o poloměru r valí bez posouvání po pevné kružnici K (téhož poloměru r, vně se jí dotýkající), vytvoří bod kružnice K_1 epicykloidu, která vzhledem k tvaru srdcovitému sluje kardioida.

Rovnice křivky.

Jsou-li souřadnice bodu $m : x = \overline{op}$, $y = \overline{pm}$, souřadnice středu o_1 valící kružnice $\overline{os}$, $\overline{so_1}$, jest $x = \overline{op} = \overline{os} + \overline{sp}$ a $y = \overline{mp} = \overline{ts} = \overline{o_1 s} - \overline{o_1 t}$.

Při valení kružnice K_1 po pevné kružnici K platí, že arc ab = arc bm, t. j. $\frac{1}{180}\pi r \alpha = \frac{1}{180}\pi r \alpha'$, čili $\alpha = \alpha'$ (úhly α, α' jsou příslušné středové úhly oblouků $\widehat{ab}$ a $\widehat{bm}$).

Z obrazce jest patrno, že

$\overline{os} = \overline{oo_1} \cos\alpha = 2r\cos\alpha$, $\overline{sp} = \overline{tm} = \overline{o_1 m} \,.\, \sin mo_1 t = r \sin mo_1 t$;
$\sphericalangle mo_1 t = \alpha' - (90 - \alpha) = -[90 - (\alpha + \alpha')] = -(90 - 2\alpha)$,
tudíž $\overline{sp} = -r\cos 2\alpha$ a $x = 2r\cos\alpha - r\cos 2\alpha \ldots (1)$.

Dále jest

$$\overline{o_1 s} = \overline{oo_1} \sin\alpha = 2r\sin\alpha,\ \overline{o_1 t} = \overline{o_1 m}\cos mo_1 t = r\sin 2\alpha,$$

pročež

$$y = 2r\sin\alpha - r\sin 2\alpha \ldots (2).$$

Pošineme-li počátek soustavy souřadnic o do bodu a, jsou nyní souřadnice bodu $m \ldots x' = \overline{ap} = x - r$ a $y' = \overline{mp} = y$.

Z rovnice (1) plyne

$$x = x' + r = 2r\cos\alpha - r(2\cos^2\alpha - 1) = 2r\cos\alpha - 2r\cos^2\alpha + r$$
$$\text{a} \quad x' = 2r\cos\alpha(1 - \cos\alpha).$$

Z rovnice (2) vyplývá pak:

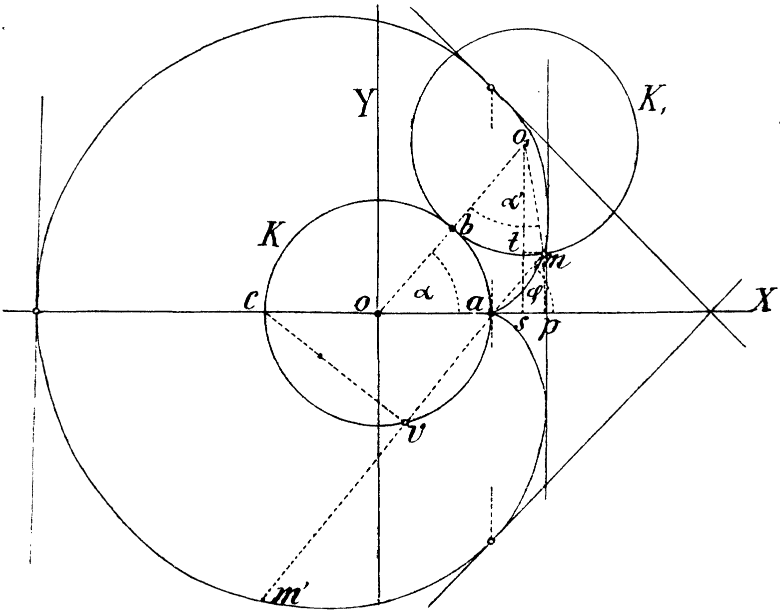
$$y' = 2r\sin\alpha - 2r\sin\alpha\cos\alpha = 2r\sin\alpha(1 - \cos\alpha).$$

Sečteme-li zdvojmocněné poslední dvě rovnice, obdržíme

$$x'^2 + y'^2 = 4r^2(1 - \cos\alpha)^2 \ldots (3),$$

dělíme-li pak poslední dvě rovnice, dostaneme

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} \alpha.$$



Obr. 2.

Ježto

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2}$$

jest

$$\cos \alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Píšeme-li místo

$$\left\{ \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\} \ldots \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\},$$

obdržíme z rovnice (3)

$$x^2 + y^2 = 4r^2 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2,$$

nebo též

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2r \, . \, \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

nebo

$$x^2 + y^2 = 2r\sqrt{x^2 + y^2} - 2rx,$$

anebo též

$$2r\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 + 2rx.$$

Zdvojmocníme-li tuto rovnici, nabudeme tvaru

$$4r^2x^2 + 4r^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 + 4rx\,(x^2 + y^2) + 4r^2x^2,$$

t. j.

$$(x^2 + y^2)^2 + 4rx\,(x^2 + y^2) - 4r^2y^2 = 0,$$

rovnice hledané křivky je-li počátek v bodě a.

Polární rovnice křivky. Je-li $\overline{am} = \varrho$, $\sphericalangle\, pam = \varphi$, jest

$$\overline{ap} = x = \varrho \cos\varphi, \quad \overline{pm} = y = \varrho \sin\varphi,$$

a

$$\varrho^4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 + 4r\varrho^3\cos\varphi\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 4r^2\varrho^2\sin^2\varphi = 0$$

čili

$$\varrho^2 + 4r\varrho\cos\varphi - 4r^2\sin^2\varphi = 0$$

a $\varrho = -2r\cos\varphi \pm \sqrt{4r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi} = -2r\cos\varphi + 2r,$

(ϱ jest kladné) t. j.

$$\varrho = 2r\,(1 - \cos\varphi) = 4r\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

polární rovnice kardioidy.

Prodloužíme-li průvodič $\overline{am}$ na opačnou stranu, vznikne bod m'; i jest

$$\overline{am} = \varrho = 2r\,(1 - \cos\varphi), \quad \overline{am'} = \varrho' = 2r\,[1 - \cos(180 + \varphi)]$$
$$= 2r\,(1 + \cos\varphi).$$

Z pravoúhlého $\triangle\, avc$ plyne

$$\overline{av} = \overline{ac}\cos vac = 2r\cos\varphi$$

a ježto

$$\overline{vm} = \overline{va} + \overline{am} = 2r\cos\varphi + 2r\,(1 - \cos\varphi) = 2r$$

a $\quad \overline{vm'} = \overline{am'} - \overline{av} = 2r\,(1 + \cos\varphi) - 2r\cos\varphi = 2r,$

jest též

$$\overline{vm} = \overline{vm'} = 2r,$$

kterážto rovnice podává nám jednoduchý způsob sestrojení kardioidy.

Vrátíme-li se opět k původní soustavě o počátku o, jest psáti x místo $x - r$ a rovnice přejde ve tvar

$$[(x-r)^2 + y^2]^2 + 4r(x-r)[(x-r)^2 + y^2]^2 - 4r^2y^2 = 0;$$

zjednodušením obdržíme

$$(x^2 + y^2)^2 - 6r^2(x^2 + y^2) + 8r^3x - 3r^4 = 0,$$

rovnici kardioidy (křivky stupně čtvrtého), je-li počátek ve středu pevné kružnice K.

Z této rovnice obdržíme

$$y = \pm \sqrt{3r^2 - x^2 \pm 2r\sqrt{3r^2 - 2rx}}.$$

Důsledky:

1. Je-li $x = r$, jest $y = \pm \sqrt{2r^2 \pm 2r^2}$, tudíž $y_{12} = 0$ (bod úvratu a) $y_3 = 2r$, $y_4 = -2r$.

2. Z rovnice o počátku a plyne, je-li $y = 0$ (osa X), $x^4 + 4rx^3 = 0$, čili $x^3 = 0$, a $x = -4r$, nebo v původní soustavě (počátek o), $(x - r)^3 = 0$, $x = r$ a $(x - r) = -4r$, $x = -3r$.

3. Pro $x > \frac{3}{2}r$, jest y imaginární a rovněž při větší hodnotě záporné než $3r$, jest y imaginární.

4. Vyšetříme-li směrnici tečny, shledáme, že tečna v bodě $(-3r, o)$ jest kolmá k ose X, tečny v bodech $(r, \pm 2r)$ svírají s osou x úhly 135^0, 45^0, tečny v bodech $(\frac{3}{2}r, \pm \frac{1}{2}r\sqrt{3})$ spolu splývají a jsou kolmé k ose X.

III.

Průsečíky parabol $y^2 = 2ax$, $x^2 = ay$ mají souřadnice

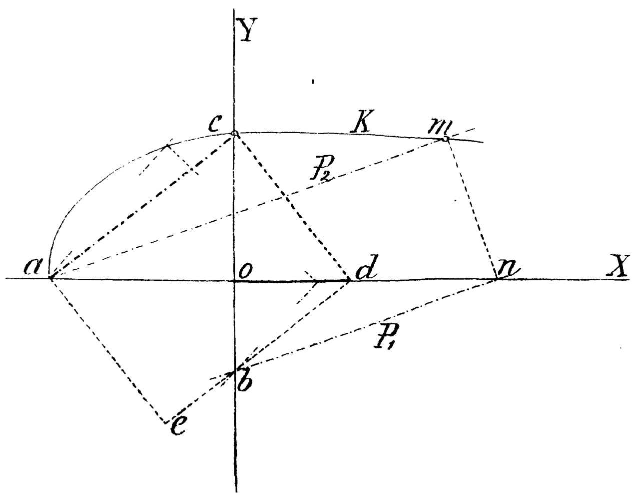
$$\left\{\begin{matrix} x = 0, & x = a\sqrt[3]{2} \\ y = 0, & y = a\sqrt[3]{4} \end{matrix}\right\};$$

úsečka $x = a\sqrt[3]{2}$ značí hranu krychle, která se obsahem svým rovná dvojnásobné krychli o hraně a (úloha delická, již starým Řekům známá).

Též průsečík paraboly $x^2 = ay$ s hyperbolou $xy = 2a^2$ má souřadnice $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$.

Tímto způsobem řešil úlohu delickou Menaichmos, prý učitel Alexandra Velikého.

Jiný způsob, jenž slouží k sestrojení výrazu $a\sqrt[3]{2}$, jest následující: Opišme ze středu $(a, \frac{1}{2}a)$ kružnici, která prochází vrcholem paraboly $y^2 = 2ax$ a vyšetřme průsečíky dvou křivek; rovnice kružnice jest $(x - a)^2 + (y - \frac{1}{2}a)^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2$, čili $x^2 + y^2 - 2ax - ay = 0$. Řešením obou rovnic dostaneme



Obr. 3.

$\frac{y^4}{4a^2} - ay = 0$, nebo $y\,(y^3 - 4a^3) = 0$, z čehož $y = 0$, $y = a\sqrt[3]{4}$ a $x = 0$, $x = a\sqrt[3]{2}$.

Způsob tohoto sestrojení pochází od francouzského mathematika Descartesa.

Pomocí této konstrukce lze řešiti na př. úlohy: zdvojnásobiti danou kouli $(\frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{8}{3}\pi r^3)$, proměniti válec anebo kužel v kouli, proměniti přímý jehlan s podstavou čtvercovou v krychli a j. v.

Učiňme $\overline{oa} = 2a$, $\overline{ob} = a$, veďme kterýmkoli směrem body b, a paprsky $P_1 \parallel P_2$, pak $nm \perp P_2$, sestrojme podobným způsobem několik bodů i obdržíme spojením jich křivku K (kubická parabola).

Rovnice křivky.

Rovnice paprsku P_1 jdoucí bodem b $(o, -a)$, jest

$$y + a = Ax \ldots (1).$$

Rovnice paprsku P_2 jdoucí bodem a $(-2a, o)$, jest

$$y = A(x + 2a) \ldots (2).$$

Průsečík n paprsku P_1 s osou x má souřadnice $\left(\frac{a}{A}, o\right)$; rovnice přímky nm kolmé ku P_2, jest

$$y = -\frac{1}{A}\left(x - \frac{a}{A}\right) \ldots (3).$$

Spojením rovnice (2) a (3) nabudeme

$$y^2 = -(x + 2a)\left(x - \frac{a(x + 2a)}{y}\right), \qquad A = \frac{y}{x + 2a},$$

čili

$$y^3 = (x + 2a)(2a^2 + ax - xy).$$

Je-li $y = 0$, jest $x = -2a$ (bod a jest bodem křivky).

Je-li $x = 0$, jest $y^3 = 4a^3$, $y = a\sqrt[3]{4}$ (bod c má tedy souřadnice $(0, a\sqrt[3]{4})$.

Je-li $x = \infty$, jest $y = \infty$.

Spojme nyní průsečík c s bodem a, sestrojme $cd \perp ac$ i jest $\overline{od} = a\sqrt[3]{2}$. $(bd \parallel ac)$.

Směrnice úsečky $\overline{ac}$ jest $\frac{a\sqrt[3]{4}}{2a} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Směrnice úsečky $\overline{cd} \perp \overline{ac}$ jest $-\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$, tudíž rovnice úsečky $\overline{cd}$, jest $y - a\sqrt[3]{4} = -\frac{2}{\sqrt[3]{4}}x$ a její průsečík d s osou X $(y = 0)$, má $x = od = \frac{1}{2}a\sqrt[3]{16} = a\sqrt[3]{2}$ (jiný způsob řešení úlohy delické).

Přihlédněme k obdélníku $acde$, v němž jest $cb \perp ad$, $\overline{oa} = 2a$, $\overline{ob} = a$, $\overline{od} = x$ $\overline{oc} = y$. Z pravoúhlého $\triangle$ acd plyne $\overline{oc}^2 = \overline{oa} \cdot \overline{od}$, t. j. $y^2 = 2ax$. Z pravoúhlého $\triangle$ bcd plyne

$\overline{od}^2 = \overline{ob} \cdot \overline{oc}$, t. j. $x^2 = ay$. Tyto paraboly určují, jak na počátku odst. III. bylo sděleno, výraz $y = a\sqrt[3]{2}$.

IV.

Podmínka, aby přímka $y = mx + n$ byla tečnou paraboly $y^2 = -2px$, plyne z diskriminantu rovnice

$$(mx + n)^2 + 2px = 0;$$

i jest

$$m^2x^2 + 2x\,(mn + p) + n^2 = 0$$

a

$$x_{12} = \frac{-2\,(mn + p) \pm \sqrt{4\,(mn + p)^2 - 4m^2n^2}}{2m^2},$$

tudíž

$$(mn + p)^2 = m^2n^2,$$

nebo

$$2mn + p = 0\,\ldots\,(1).$$

Rovnice přímky, jdoucí počátkem kolmo na tečnu

$$y = mx + n\,\ldots\,(2),$$

zní

$$y = -\frac{1}{m}\,x\,\ldots\,(3);$$

určíme-li m, n z rovnic (2), (3)

$$m = -\frac{x}{y}, \qquad n = y + \frac{x^2}{y}$$

a dosadíme-li je do rovnice (1), obdržíme

$$-2\,\frac{x\,(x^2 + y^2)}{y^2} + p = 0,$$

anebo

$$y^2 = \frac{2x^3}{p - 2x}.$$

(Dokončení.)